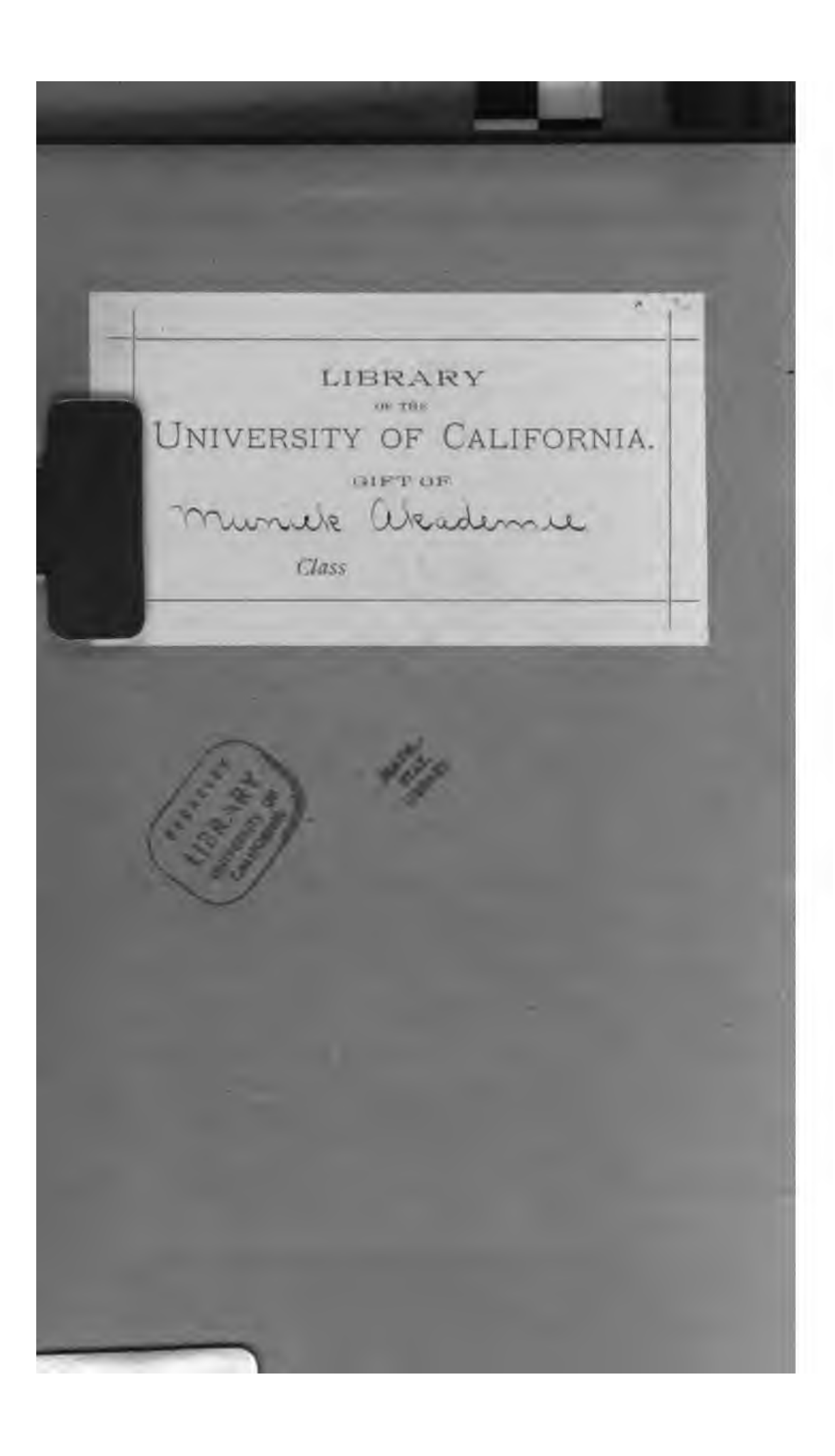


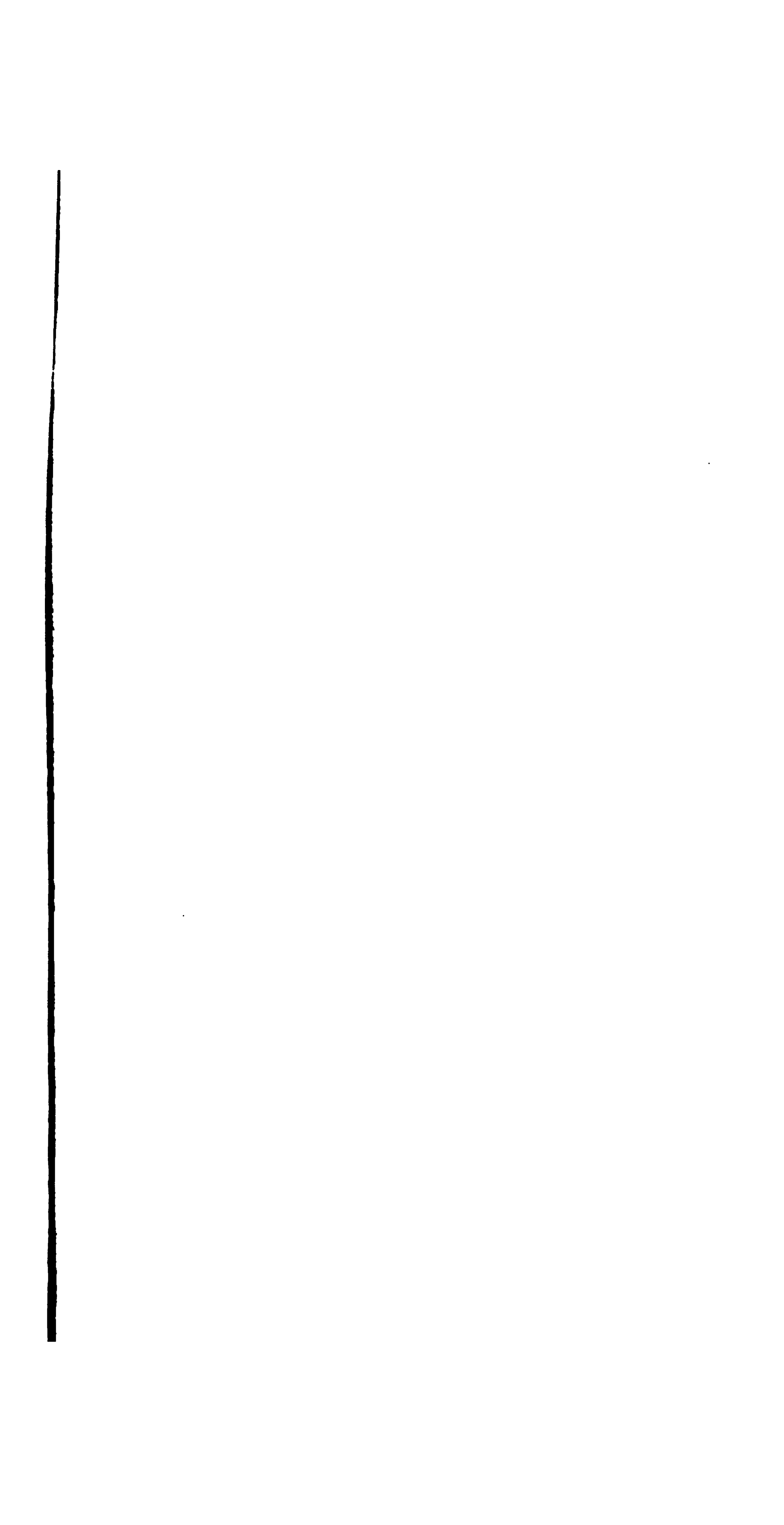


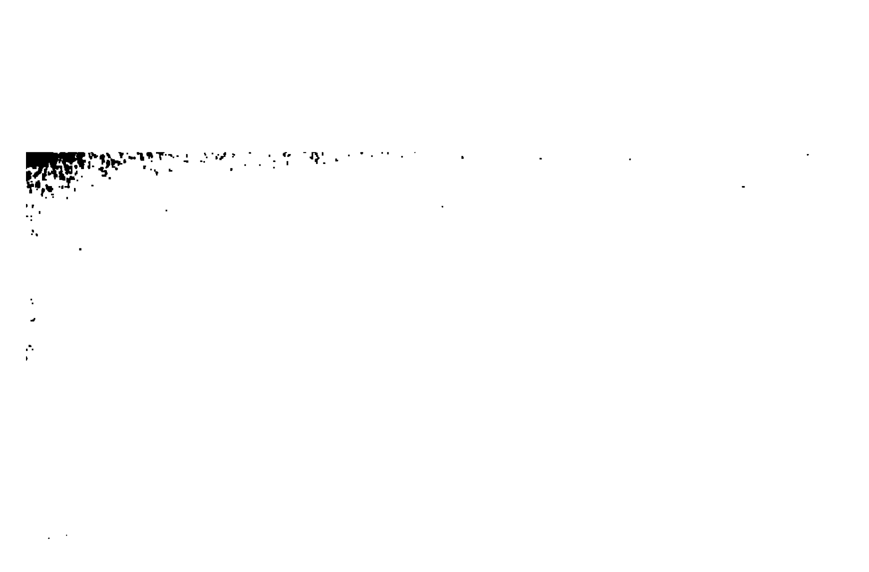




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Münch Akademie
Class







Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

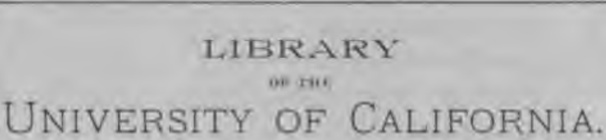
zu München.



1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Münch Akademie
Class



Sitzungsberichte

der

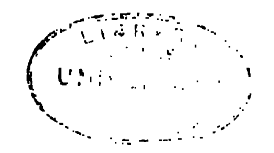
mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXX. Jahrgang 1900.

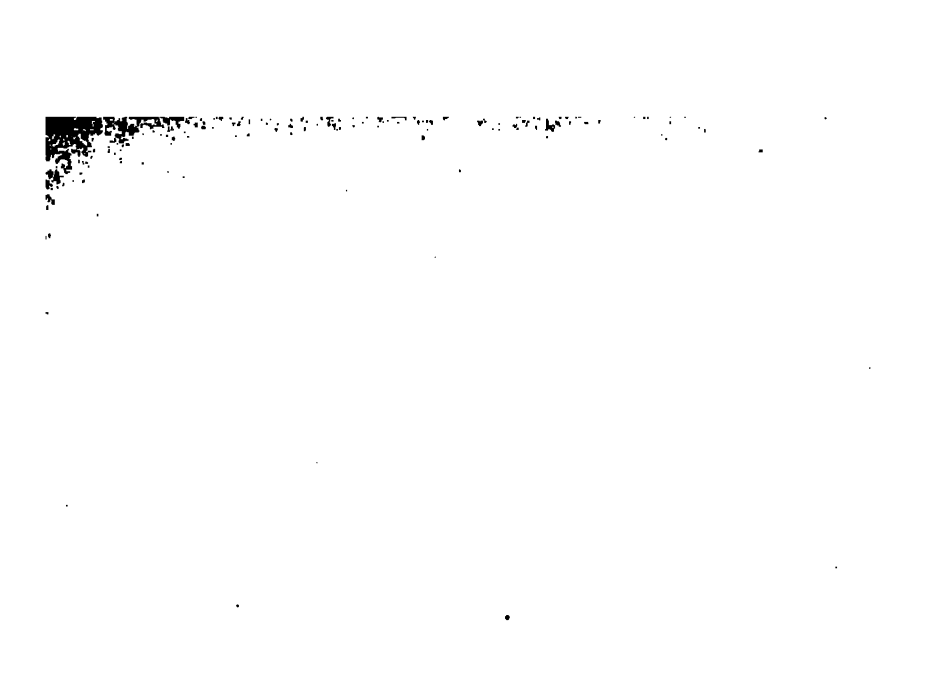


München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).







Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.



1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

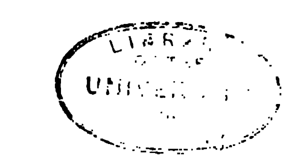
mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXX. Jahrgang 1900.



München.
Verlag der k. Akademie.
1901.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Seite

F. Doflein: a) Ueber eine neue Süsswasserkrabbe aus Columbien, gesammelt von Ihrer Königl. Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern 121
b) Weitere Mittheilungen über dekapode Crustaceen der k. bayerischen Staatssammlung . . . 125

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 141. Stiftungstages am 28. März 1900.

K. A. v. Zittel: Ansprache 301
C. v. Voit: Nekrologe 315

Sitzung vom 5. Mai 1900.

*M. Wolf: Aussennebel der Plejaden 147
S. Finsterwalder: Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen (mit Taf. I) 149
J. Göttler: Conforme Abbildung der Halbebene auf ein Flächenstück, welches von einer circularen Curve dritter Ordnung oder von einer bicircularen Curve vierter Ordnung begrenzt wird (mit Taf. II u. III) 165
A. Kelly: Ueber Conchit, eine neue Modification des kohlensauren Kalkes 187
*E. Weinschenk: Chemisch-geologische Studien; zur Kenntniss der Graphitlagerstätten:
II. Alpine Graphitlagerstätten.
III. Die Graphitlagerstätten der Insel Ceylon . . . 148

Sitzung vom 13. Juni 1900.

M. Wolf: Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiakallichtes und den Gegenschein (mit Taf. IV) 197
A. Pringsheim: Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und Integrale 209
A. Korn: Ueber den sogenannten semidefinitiven Fall in der Theorie der Maxima und Minima 235
*A. v. Baeyer: Ueber Aut-Oxydation 195

Sitzung vom 7. Juli 1900.

J. Schick: Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie 249
E. v. Weber: Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen 273

Sitzung vom 3. November 1900.

Seite

H. Ebert: Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger See 435
E. v. Weber: Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen 393
A. Pringsheim: Ueber die Convergenz periodischer Kettenbrüche 463

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 14. November 1900.

*K. A. v. Zittel: Rede über Ziele und Aufgaben der Akademien im 20. Jahrhundert 489
Wahlen 489
*H. Riggauer. Festrede über die Entwicklung der Numismatik und der numismatischen Sammlungen im 19. Jahrhundert 490

Sitzung vom 1. Dezember 1900.

F. Lindemann: Zur Theorie der automorphen Functionen II . . 493
H. Ebert: Messungen der elektrischen Zerstreuung im Freiballon 511
S. Finsterwalder: Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen 533
A. Pringsheim: Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Functionen 541
O. Maas: Ueber Entstehung und Wachsthum der Kieselgebilde bei Spongien (mit Tafel V) 553

Einsendungen von Druckschriften 1, 25

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 13. Januar 1900.

1. Herr A. Rothpletz hält einen Vortrag: „Ueber eigenthümliche Deformationen jurassischer Ammoniten durch Drucksuturen und deren Beziehungen zu den Stylolithen."

2. Herr F. Lindemann legt eine Abhandlung der Herren Professoren C. Cranz und K. R. Koch an der technischen Hochschule in Stuttgart als Fortsetzung ihrer in den Abhandlungen der Akademie veröffentlichten Untersuchung über die Vibration des Gewehrlaufes während des Durchgangs des Geschosses vor. Die Arbeit ist für die Abhandlungen der Akademie bestimmt.

3. Herr Ad. v. Baeyer hält einen Vortrag: „Ueber die Einwirkung des Caro'schen Reagens auf Ketone." Derselbe wird anderweit veröffentlicht werden.

---

aufgelöst ist. Hier indessen liegt die Sache anders. Zwar fehlt die äussere Schale, aber die inneren Scheidewände sind theilweise noch vorhanden und die äussere Form zeigt keine Streckung nach einer bestimmten Richtung. Zu beiden Seiten des grössten Durchmessers beschreiben die Hälften des Umganges einen Bogen, der die jenem Durchmesser entsprechende Krümmung besitzt, so dass man eine Deformation überhaupt gar nicht vermuthen könnte, wenn beide Hälften isolirt wären. So aber stossen beide Bogenabschnitte auf der Ebene des grössten Durchmessers unter einem stumpfen Winkel zusammen, wie die Bögen zweier Abschnitte eines Kreises, die nach Entfernung des Kreis-Mittelstückes direct aneinander geschoben worden sind.

Berechnet man den Durchmesser des ganzen Gehäuses, welches diesen zwei Ammoniten-Hälften entsprechend ihrer Rundung bei normaler Ausbildung zukommen würde, so erhält man eine Länge von $10^1/_2$ cm, wo er jetzt nur $8^1/_2$ cm misst. Es macht so den Eindruck, als ob von dem ursprünglichen Ammoniten ein 2 cm breites Mittelstück verschwunden sei, und da sich in der That in dieser Richtung einige Drucksuturen hinziehen, so erschien es mir längst schon äusserst wahrscheinlich, dass dieselben eine Auflösung dieser fehlenden Mittelzone bewirkt haben möchten. Um jedoch eine wohlbegründete Ueberzeugung zu erlangen, war es nothwendig den Ammoniten der Symmetrieebene nach zu durchschneiden. Hierbei war mir Herr Dr. Grünling erfolgreich behülflich, wofür ich ihm meinen Dank ausspreche.

Die eine der so erhaltenen Schnittflächen ist in nebenstehender Figur abgebildet auf Grund einer photographischen Aufnahme, in welcher nur die Drucksuturlinien durch Ueberzeichnung stärker hervorgehoben sind. Der Kalk, welcher das Ammoniten-Gehäuse ausfüllt, ist roth, aber von verschiedener heller bis dunkler Färbung. Die Kammern sind nur noch zum Theil erkennbar, nemlich im letzten Umgang und einem kleineren inneren Theil. Das letzte Drittel des Umganges gehört zur Wohnkammer, weiter zurück liegen die stark convexen



Medianer Längsschnitt durch einen Ammoniten von Ruhpolding in natürl. Grösse nach photograph. Aufnahme. Nur die Drucksuturen und Septen sind durch Ueberzeichnung etwas deutlicher gemacht.

Septen, von denen aber nur zwei noch ganz intact sind. Die anderen zeigen mehr oder minder scharf ausgeprägte kleine Zacken, wie sie bei den Drucksuturen vorkommen. Die Füllmasse der Kammern ist durch hellrothe Färbung ausgezeichnet, in den Partien aber, wo die Septen verschwunden sind, herrscht dunkelrothe Farbe vor, d. h. der Kalk ist dort thon- und eisenreicher. Zugleich wird er von zahlreichen Suturflächen durchsetzt, die sich verzweigen und bald enger bald weiter schaaren. Während in den hellrothen Partien diese Suturen auf die Septen beschränkt sind und darum auch weit auseinanderstehen, liegen sie in den dunklen Theilen dicht geschaart aber zunächst mehr oder weniger zur längeren Axe parallel. Sie stehen aber keineswegs alle vertikal zur abgebildeten Symmetrie-Ebene und viele schneiden dieselbe unter sehr spitzen Winkeln.

Die Erhaltung und Sichtbarkeit der Kammern steht im umgekehrten Verhältniss zur Häufigkeit der Suturen. Im äusseren Umgang gehen diese Druckerscheinungen fast nur von den Septen aus, von denen blos zwei ihre glatte Fläche noch nicht eingebüsst haben. Der Druck hat hier also hauptsächlich die von der Natur schon gelieferten Trennungsflächen für seine chemische Thätigkeit ausgesucht.

Die inneren Umgänge zeigen ein viel engeres Netz von Suturen, das nur stellenweise noch eine Beziehung zu den Septen erkennen lässt. Doch liegen gewisse Partien inselartig darin eingeschlossen, die durch hellere Farbe hervortreten und die nur von wenigen Suturen durchzogen werden. Auch die Kammerung wird darin wieder sichtbar, während sie ringsum fast ganz verschwunden ist.

Die von Drucksuturen stark erfüllte Zone ist im Allgemeinen im oberen Theil der inneren Umgänge (oben im Sinne der beigegebenen Abbildung genommen) breiter als unten und, da die von ihnen ausgehende Auflösung somit oben ebenfalls stärker gewesen sein wird als unten, so ist die rechte Hälfte des Ammoniten (ebenfalls im Sinne der Zeichnung) nicht gleichmässig gegen die linke herangepresst worden, sondern

oben stärker als unten, d. h. die Bewegung ging wie um ein Scharnier, dessen Rolle die drei besonders stark zerfressenen Septen unten auf der Abbildung übernommen zu haben scheinen. Erst später, wohl lange nach diesen Druckvorgängen, ist eine Zerreissung — eine Gangspalte — inmitten des Ammoniten entstanden und zum Theil von weissem Calcit wieder ausgefüllt worden. Dass dies eine jüngere Bildung ist, geht daraus hervor, dass die Suturflächen alle an der Spalte enden und keine hindurchsetzt.

Durch das Zerschneiden des Ammoniten ist es also möglich geworden ein klares Bild des Vorganges zu erlangen, durch welchen die Deformation hervorgerufen worden ist. Gemäss der Anordnung der Drucksuturen hat die damit in Verbindung stehende Kalkauflösung hauptsächlich eine mittlere Zone betroffen, die dadurch verkürzt wurde und ein näheres Aneinanderrücken der äusseren Theile gestattete, wodurch der ganze Ammonit ein längliches Aussehen erlangte. Er ist aber nicht gestreckt und in die Länge gezogen, sondern vielmehr gestaucht und verschmälert worden.

Es ist die gegenwärtig kürzere Achse, welche verkürzt wurde, während bei den gestreckten Fossilien die grössere Achse die verlängerte ist.

Die Formveränderung unseres Petrefacten ist also keine äusserliche, sondern recht eigentlich eine innere. Die Masse im Innern hat sich verändert, ist geschwunden und dem hat sich dann die äussere Form angepasst. Aber allerdings sind die bewirkenden Drucksuturen nicht auf dem Ammoniten beschränkt geblieben. Zum Theil wenigstens setzen sie in das Gestein hinein fort und haben auch darin Deformationen hervorgerufen. Es ist das selbstverständlich, da ja die Druckkräfte auf das ganze Gebirge gewirkt haben und auch das den Ammoniten umgebende Gestein verändern mussten. Aber im blossen Gestein ist es schwer eine richtige Vorstellung von der Grösse der eingetretenen Veränderungen zu erlangen, weil die ursprüngliche Beschaffenheit desselben unbekannt ist, während die normale Form des Ammoniten in unserem Falle als

Massstab für den Grad der Formveränderungen und Auflösungen dient. Darin liegt der besondere Werth des abgebildeten Stückes.

Die Beziehungen der Drucksuturen zu den Stylolithen.

Zwei Jahre, nachdem ich den Namen „Drucksuturen" aufgestellt hatte, schrieb Suess (Antlitz der Erde, Bd. II, S. 335), dass diese „Suturen" nicht durch Druck entstanden, sondern wahre Stylolithenbildungen seien, d. h. zahlreiche Theilchen eines oberen Sedimentes wären zapfenförmig in das untere eingesunken.

Nach weiteren acht Jahren hingegen erklärte Th. Fuchs (Sitzber. d. Akad. d. Wissensch. Wien, Bd. 103, 1894 Ueber die Natur und Entstehung der Stylolithen), dass die Stylolithen eine besondere Form der Drucksuturen und wie diese nicht im weichen, sondern im bereits erhärteten Gestein durch mit chemischer Auflösung verbundenem Druck entstanden seien.

Bestimmend für die letzte Auffassung war wohl das kurz vorher erschienene Capitel über die Drucksuturen in meinem Querschnitt durch die Ostalpen, welches ausdrücklich darauf hinwies, dass diese Suturen nicht auf die Schichtgrenzen beschränkt bleiben, was durch eine Reihe von Abbildungen deutlich gemacht werden konnte, und dass ihre Entstehung nothwendig mit chemischer Auflösung des Kalkes verbunden gewesen sein muss. Ich glaube deshalb, dass es nicht nothwendig ist, hierauf nochmals zurückzukommen. Dahingegen bedarf ein anderer Punkt weiterer Aufklärung. Jene beiden eben angeführten Urtheile sind, obwohl sie sich in der genetischen Auffassung direct widersprechen, darin doch einig, dass den Drucksuturen und Stylolithen gleiche Entstehung zukomme. Nach Suess sind Drucksuturen wahre Stylolithenbildung, nach Fuchs sind die Stylolithenbänder nur eine besondere Form der Drucksuturen und er meint, dass ich die Identität beider Bildungen auszusprechen noch nicht gewagt habe, offenbar unter dem Einfluss der landläufigen Meinung

und vielleicht speciell unter dem Einflusse von Gümbels letzter Publication (von 1882).

Ich hatte nemlich 1894 (S. 213) ausdrücklich erklärt: „die Drucksuturen unterscheiden sich von den echten Stylolithen, wie sie Gümbel 1882 beschrieben und erklärt hat, dadurch, dass sie nicht auf die Schichtgrenzen beschränkt und nicht schon vor der Verfestigung des Kalksedimentes entstanden sind". Dass ich dabei besonders auf Gümbels Arbeit verwiesen habe, geschah deshalb, weil ich dadurch einer besonderen Begriffsumgrenzung für die Stylolithen enthoben wurde und es damals vermeiden wollte, auf gewisse Unzulänglichkeiten hinzuweisen, die unseren Erklärungen der Stylolithenbildung noch immer anhaften. Heute will ich dies nachholen.

Die morphologischen Unterschiede zwischen den Drucksuturen und Stylolithenbändern.

Die Auszackungen der Drucksuturflächen sind nie sehr hoch und schwanken zwischen Bruchtheilen eines Millimeters und etwa 1—2 cm. Sie sind niemals stielförmig, sondern mehr oder weniger konisch zugespitzt, dabei aber auf den Seitenflächen fein ausgezackt oder unregelmässig gerieft.

Die Vorsprünge auf den Stylolithenbändern hingegen erreichen gar nicht selten Höhen von mehreren cm bis 1 dm, manchmal sogar bis 3 dm. Ihre Seitenflächen sind von der Basis bis zum meist abgestumpften Ende zu einander parallel gerichtet oder doch nur schwach convergirend. Zugleich sind diese Wände deutlich gerieft, und zwar von untereinander parallelen, bald breiten und flachen, bald schmalen und tiefen Furchenstreifen, die von unten bis oben heraufgehen und dem ganzen Vorsprung Aehnlichkeit mit einem Holzpflock geben, der in der Richtung der Holzfaser geschnitten ist. Deshalb hat Eaton dafür den Namen Lignilites gewählt. Das Ende der Vorsprünge ist stets flach und entweder ziemlich eben von einer Thonschicht oder einem Petrefact begrenzt oder von kleineren Rauhigkeiten bedeckt. Die Seitenwände sind bald

kerzengerade, bald schwach gekrümmt, manchmal sogar so stark, dass ihr Ende der Basis sich zukehrt.

Der Körper dieser Vorsprünge ist sehr verschieden gestaltet. Häufig besitzt er einen mehr oder weniger kreisrunden bis polygonalen Querschnitt und damit zugleich eine ausgesprochene Pfeilerform. Das sind die auffälligsten Stylolithen und zugleich diejenigen, welche in den Sammlungen am meisten vertreten und oft genug allein bei Erklärungsversuchen berücksichtigt worden sind. Ebenso häufig sind aber solche Vorsprünge, deren Grundriss ganz unregelmässig ist und nicht selten in einer Richtung starke Verlängerung aufweist, so dass das Ganze nicht mehr zapfen-, sondern eher mauerförmig erscheint. Solche Mauern sind ebenso wie die Zapfen mit vollkommen senkrechten und parallel gestreiften Seitenwänden versehen, die aber in vielen Fällen eine Art von Terrassirung zeigen, indem die Seiten treppenartig von der Basis bis zur Oberfläche des Vorsprunges aufsteigen. Dabei sind die Oberflächen dieser Terrassen nicht gerieft, sondern nur ihre Wände.

Wo im Kalkstein eingeschlossene Fremdkörper, insbesondere Petrefacten, die Drucksuturen berühren, reichen sie gewöhnlich nicht von einer auf die andere Seite herüber, oder wenn dies doch der Fall ist, ergänzen sich die beiderseitigen Theile niemals vollkommen. Sie sind zusammen kleiner als das ursprüngliche ganze Petrefact. Wo die Sutur ein solches anschneidet, fehlt also die Ergänzung desselben auf der anderen Seite in der Regel vollständig. Bei den Stylolithen hingegen werden die Fremdkörper niemals durchschnitten, vielmehr richten sich die Wandungen der Zapfen sehr genau nach deren Form, so dass die das Ende derselben so häufig krönenden Schalen von Pecten, Lima oder die Gehäuse von Seeigeln und Asteriden nicht nur vollkommen erhalten sind, sondern dass sich auch die Umrisse der Zapfen ganz genau nach der Form dieser Petrefacten richten.

Die Drucksuturen sind von einer dünnen Thonhaut begleitet, deren Farbe jedoch stets von der des Kalksteines abhängig, in gelbem Kalk bräunlich, in röthlichem tiefroth, in

grauem schwärzlich ist. Auch die Stylolithenbänder lassen meist eine thonige Zwischenschicht erkennen, die aber in der Farbe nicht immer mit dem Kalkstein übereinstimmt, z. B. grünlich bei gelbem Kalkstein ist und in der Regel nur auf den flachen oberen Enden der Zapfen liegt, während die längsgerieften Seitenwände frei davon zu sein pflegen.

Die Drucksuturen sind eine weit verbreitete und sehr häufige Erscheinung in allen Kalksteinen aller Formationen, aber nur da, wo mehr oder weniger starke Aufrichtung und Faltung des Sediments stattgefunden hat. In den noch horizontal gelagerten Kalkbänken fehlen sie ganz oder sind doch nur äusserst selten.

Die Stylolithen hingegen kommen davon ganz unabhängig vor und die schönsten Exemplare sind gerade aus flachgelagerten Bänken bekannt geworden. Sie sind aber verhältnissmässig sehr selten, und auf bestimmte Bezirke und Horizonte beschränkt. Sie wurden bisher aus dem Silur-, Devon- und Carbon-Kalk Nord-Amerikas, dem Zechstein, Rogenstein, Muschelkalk, oberen Jura und der oberen Kreide Europas beschrieben. Sie gehen zumeist von Schichtflächen aus und zwar so, dass ihr Ende nach oben gerichtet ist, gleichgiltig ob sie gerade oder verbogen, vertikal oder schiefstehend sind. Seltener ist ihr Ende nach unten gerichtet und noch seltener entspringen sie nicht den Schichtflächen, sondern nehmen ihren Anfang inmitten einer Kalkbank, wobei die Zapfen dann mehr oder weniger horizontal liegen. Die Drucksuturen durchsetzen im Gegensatz dazu die Bänke in allen möglichen Richtungen und sind ganz unabhängig vom Verlauf der Schichtflächen. Wo sie gleichwohl dieselben eine Strecke weit begleiten, beweisen sie ihre Unabhängigkeit dadurch, dass sie plötzlich aus dieser Fläche herausspringen und in eine andere Schichtfläche übergehen (s. Fig. 95, Ostalpen-Querschnitt, S. 212). Sodann durchkreuzen sie sich und verbinden sich miteinander ganz regellos, was bei den echten Stylolithenbändern bisher nicht beobachtet worden ist.

Die genetischen Unterschiede zwischen den Drucksuturen und den Stylolithenbändern.

Wenn wir zunächst noch berücksichtigen, dass die beiden Bildungen ausschliesslich auf Kalksteine und Dolomite beschränkt sind, so ergibt sich aus den morphologischen Eigenschaften mit Nothwendigkeit, dass die Drucksuturen erst längere Zeit nach Ablagerung der von ihnen betroffenen Sedimente entstanden sein können, als letztere bereits feste Gesteine geworden waren. Der Gebirgsdruck fand keine weiche, in sich bewegliche Masse mehr vor, wohl aber eine solche, die gegenüber der lösenden Kraft der unter hohem Druck stehenden Gesteinsfeuchtigkeit keinen vollkommenen Widerstand leisten konnte. Die chemische Wirkung des Bodenwassers bethätigte sich natürlich am stärksten auf den Druck- und Schichtflächen und von da aus sehen wir denn auch die Auflösung des Kalkes ausgehen. Langsam werden die Wände angefressen und, wo Petrefacten im Kalk liegen, werden auch sie angegriffen und allmählich aufgezehrt. Da aber die Widerstandsfähigkeit gegen die lösende Kraft nicht überall eine gleichmässige ist, so ist es auch die Auflösung nicht — es bleiben kleinere Partien erhalten, die als Vorsprünge auf den Flächen stehen bleiben, während andere Partien rasch verschwinden und Vertiefungen zurücklassen. So muss man sich denken, dass das zackige Ineinandergreifen der Suturflächen entstand. Aber nur der kohlensaure Kalk war löslich — nicht der Thon, das Eisen und manche andere Substanzen, die jeder Kalkstein in mehr oder minder grossen Mengen einschliesst und denen er zum Theil seine Färbung verdankt. Diese blieben also auf den Druckflächen zurück, wo sie sich zu einer dünnen aber intensiver gefärbten Haut ansammelten.

Die Stylolithen lassen nichts erkennen, was auf eine irgendwie wesentliche chemische Thätigkeit hindeutete, und hierin liegt ein hauptsächlicher genetischer Unterschied gegen die Drucksuturen. Die Versteinerungen, welche die Zapfen verhältnissmässig nicht selten krönen, sind stets ebenso voll-

kommen erhalten wie andere im normalen Kalkstein eingeschlossene. Es ist mir kein Fall bekannt, wo grössere Petrefacten von den Stylolithenbändern durchschnitten oder gar angefressen wären. Wenn wir die gewöhnlichste Form der aufrecht stehenden Stylolithen zunächst ins Auge fassen, so erscheint es so, als ob die untere Bank Zapfen in die obere Bank entsende, aber die kleinen Thonkappen der Zapfen sind nur abgerissene Theile einer allgemeinen dünnen Lettenlage, welche die zwei Kalkbänke trennt. Dies beweist, dass nicht eigentlich die Zapfen von unten heraufgetrieben worden, sondern nur stehen geblieben sind, während die obere Bank durch ihr eigenes Gewicht und das der noch weiter aufgelagerten Sedimente die untere Bank zusammengepresst und ihre Oberfläche um mindestens Zapfenlänge heruntergedrückt hat. Damit dies aber ohne chemische Auflösung, die dabei keine Rolle gespielt hat, möglich war, muss die Masse noch weich oder, vielleicht besser ausgedrückt, noch locker gewesen sein. Dieser Zustand kann aber nur verhältnissmässig kurze Zeit nach Entstehung des Kalkabsatzes bestanden haben, so lange das Meereswasser mit seinen leicht löslichen Salzen noch den Kalksand und Schlamm durchdrängte und die kleinen Kalkkörner sich noch nicht fest aneinander angeschlossen hatten, so wie das jetzt der Fall ist. Später war eine wirkliche Stylolithenbildung nicht mehr möglich.

Wenn auf diese Weise eine lockere Schicht um einige Centimeter zusammengedrückt wurde, so konnte dies doch nur dann in ganz gleichmässiger Weise geschehen, wenn die Festigkeit derselben überall gleich gering war. Hatten sich aber irgendwo schon Verfestigungen vielleicht durch Ausscheidung eines krystallinen Bindemittels oder durch concretionäre Bildungen eingestellt, dann trat dort keine Compression oder doch nur eine geringere als ringsherum ein, und diese Theile blieben dann als Zapfen stehen, während daneben die obere Schicht heruntersank und mit ihren festeren Kalkkörnern die Wände der Zapfen in der Richtung der Bewegung, also vertikal abwärts in ähnlicher Weise riefte, wie das auf glatten Flächen

(Rutschflächen) bei Verwerfungen häufig geschieht. Wenn also eine Asteride auf einen fünfkantigen Pfeiler mit fünf einspringenden Nischen oder ein Seeigel auf einen cylinderförmigen Pfeiler zu stehen gekommen ist, so ist anzunehmen, dass diese Petrefacten bei Entstehung der Stylolithen zufällig einen etwas festeren Theil der Kalkbank unter sich hatten, der aber heute, wo die ganze Bank erhärtet ist, als solcher nicht mehr erkannt werden kann.

Natürlich ist aber nicht nur diese eine Bank von der Compression betroffen worden sondern auch die darüber liegende, und wenn in dieser ebenfalls festere Theile sich befanden, so konnte der Gegendruck der unteren Bank an diesen Stellen nicht so wirksam sein und es erklärt sich daraus warum, wenn auch viel seltener, Zapfen vorkommen, die von oben nach unten gerichtet sind, wie das von verschiedenen Forschern beobachtet und beschrieben worden ist.

Der Druck der auflastenden Massen erzeugt in lockeren Massen aber nicht nur eine Bewegung in vertikaler Richtung, da ja die Compression nach jeder Richtung möglich ist, und so ist es denkbar, dass bei verschiedenartiger Festigkeit der einzelnen Theile der Sedimentlager auch Zapfen in schräger oder sogar horizontaler Richtung entstanden, wenn schon dieselben nicht so häufig eintreten konnten, weil die Schwerkraft dabei nicht mehr mitwirkte. So wird es begreiflich, warum auch schiefgestellte, gebogene und umgekrümmte neben den senkrechten und geraden Zapfen vorkommen und warum auch innerhalb der Kalkbänke selbst ganz horizontal liegende Stylolithen angetroffen werden, die also nicht von den Schichtflächen ausgehen. Bei letzteren, deren Vorhandensein schon Schmid 1846[1]) und Thurmann 1856 ausdrücklich behaupten, scheinen Thon- und Petrefactenkappen zu fehlen, was auch ganz begreiflich ist.

Während die Compression tieferer Sedimente durch die

---

[1]) Schmid und Schleiden. Die geognost. Verhältnisse des Saalthales bei Jena, 1846, S. 47.

darüber entstehenden jüngeren Ablagerungen wohl ein ziemlich allgemein verbreiteter Vorgang war, blieb die Bildung von Stylolithen nur auf solche Fälle beschränkt, wo die Erhärtung der noch lockeren Schichten nicht gleichmässig vor sich ging. Wir begreifen deshalb leicht, warum die Stylolithen verhältnissmässig selten und, wo sie vorkommen, gewöhnlich nur auf bestimmte Bänke oder Horizonte beschränkt sind, dort aber oft eine grosse Häufigkeit haben.

Wir sind somit zu dem Ergebniss gelangt, dass Drucksuturen und Stylolithen zwei morphologisch und genetisch recht verschiedene Erscheinungen sind — die ersteren Wirkungen des Gebirgsdruckes auf festen Kalkstein, die letzteren Wirkungen des Druckes der Sedimentdecke auf noch grösstentheils unverfestigte Kalkablagerungen.

Zur Erforschungsgeschichte der Stylolithen und Drucksuturen.

Ein reiches Verzeichniss der Stylolithen-Literatur hat 1872 H. Eck in den Abhandl. z. geolog. Spezialkarte Preussens, Bd. 1, S. 81, gegeben. Dass es jedoch auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen kann, geht schon daraus hervor, dass die amerikanischen Arbeiten ganz darin fehlen. Ich will keineswegs versuchen ein vollständiges Verzeichniss hier zu geben, sondern nur die hauptsächlichsten Ergebnisse dieser Forschungen, soweit sie mir bekannt sind und von allgemeinerer Bedeutung erscheinen, zusammenstellen.

Stylolithen sind beschrieben aus Kalk- und Dolomitbänken des Silur, Devon, Carbon, Zechstein, Buntsandstein (Rogenstein), Muschelkalk, weissen Jura und der oberen Kreide.

Drucksuturen sind erwähnt aus Silur, Carbon, Trias, Jura und Kreide.

Gewöhnlich wird Freiesleben als derjenige erwähnt, der die Stylolithen zum ersten Mal 1807 beschrieben habe (Geognost. Arbeiten I, S. 69). Aber nach dem Auszug, den H. Eck 1872 (l. c.) gegeben hat, gebührt diese Ehre Mylius,

der in seinen Physikal. Belustigungen, Berlin 1751, aus den Rüdersdorfer Brüchen Schwielen, welche die Arbeiter Mahle nennen, „wie versteinert Holz" schildert, was sich wohl nur auf die dort, wie Quenstedt sagt, zu Millionen vorkommenden Stylolithen beziehen kann. In Amerika hat sie Eaton (in Report on the district adjoining the Erie Canal S. 134) 1824 unter dem Namen Lignilites (wegen der Aehnlichkeit mit Holzfaser) beschrieben. In Deutschland gab Klöden 1828 (Beiträge z. min.-geognost. Kenntniss der Mark Brandenburg) für die Rüdersdorfer Vorkommnisse den Namen Stylolithes sulcatus, während Vanuxem 1842 (Geology of New-York, Part III, S. 107) den Namen Epsomites aufstellte. Gegenwärtig hat sich die Klöden'sche Bezeichnung Stylolith allgemein auch in Amerika eingebürgert. Thurmann hat dafür 1856 (Essai d'orographie jurassique) das Wort diapérasmes gebildet, abgeleitet von *διαπεραω*, durchdringen.

Von den Drucksuturen hat Hall 1843 (Geol. of New-York, Part IV) eine charakteristische Abbildung (Fig. 53, Seite 131) gegeben. Eingehend hat sie Thurmann (l. c.) 1856 beschrieben unter dem Namen: syncollèmes diaclivaires und thlasmes diaclivaires, worauf ich nachher noch zurückkomme. Ich habe sie dann als Drucksuturen 1886, 1894 und 1899 benannt und gedeutet und Th. Fuchs hat sie (l. c.) 1894 als Stylolithenbänder bezeichnet. Trotz ihrer ungemeinen Häufigkeit sind die Lehrbücher der Geologie und Petrographie bisher stillschweigend an ihnen vorübergegangen.

Die Deutung der Stylolithen hat den Scharfsinn der Forscher auf die verschiedensten Wege geführt. Nicht weniger als sieben Theorien sind aufgestellt worden.

1. Die Petrifications-Theorie ist die älteste, die von den anderen aber bald aus dem Feld geschlagen und dann gänzlich aufgegeben worden ist. Eaton (1824) sah in den Stylolithen fossile Corallen und Klöden (1828) Abdrücke von Quallen, wofür er auch noch 1834 (die Versteinerungen der Mark Brandenburg) eintrat.

2. Die Krystallisations-Theorie hat in Amerika die vorhererwähnte alsbald abgelöst und bis 1867 die Meinungen beherrscht. Vanuxem (l. c. S. 107) betrachtet 1842 die Krystallisation von Magnesiumsulphat in dem noch weichen Sediment als die Ursache der cylindrischen Zapfen. J. Hall (l. c. 1843) glaubt, dass auch Kochsalz und Emmons (Geol. of New-York, Part II, 1842, S. 111) dass Strontium-Sulphat gleiche Erscheinungen erzeugen konnten, während aber die Coelestinkrystalle noch erhalten sind, seien die Bittersalzkrystalle aufgelöst worden und hätten nur ihre Eindrücke hinterlassen. Hunt stellte deshalb für diese Bildungen 1863 (Geology of Canada, S. 632) den Namen Crystallites auf.

In Deutschland hat sich diese Anschauung ebenfalls, aber ganz unabhängig von Amerika entwickelt, wie es scheint sogar in Unkenntniss der dortigen Arbeiten. Rossmässler und Cotta (Grundriss der Geognosie 1845—46, S. 128) brachten die Stylolithen in Verbindung mit den stängeligen Eiskrystallen, die sich im Winter im feuchten Schlamm bilden, und H. von Meyer (N. Jahrb. 1862) hält sie für Gruppen von nadelförmigen Krystallen, hauptsächlich von Gyps, die meist von demselben Gestein ausgefüllt seien, in welchem sie sich entwickelt haben.

Diese Theorie ist durch Marsh 1867 in Amerika erfolgreich widerlegt worden, in Deutschland hat sie überhaupt niemals allgemeineren Anklang gefunden.

3. Die Exhalations-Theorie mag hier nur der Vollständigkeit und der Curiosität wegen einen Platz finden. Alberti nimmt 1858 (Württemb. Jahreshefte d. Naturw., Bd. 14, S. 292) aufsteigendes Petroleum, Zelger, der den Stylolithen sogar einen langen Aufsatz im N. Jahrb. (S. 833, Bd. 22, 1870) widmete, entweichendes Gas als die causa movens an.

4. Die Regen-Theorie wurde 1852 von Quenstedt eingeführt (Handb. der Petrefactenkunde, I. Aufl.) und 1853 (Württemberg. Jahresb., Bd. 9, S. 71) eingehender besprochen. Er wurde dazu verführt durch die Aehnlichkeit der kleinen Erdpyramiden, welche der Regen unter gewissen Bedingungen

an vegetationslosen Böschungen erzeugt. Wie bei den grossen Erdpyramiden liegt auch da nicht selten ein grösseres Steinchen als Schutz obendrauf. Die Deckelschalen der Stylolithen wurden damit verglichen, und obwohl Quenstedt selbst die Schwierigkeiten erkannte, welche dieser Auffassung entgegenstehen, so hat er sie doch mit den Worten eingeführt: „alle anderen Ansichten darüber sind falsch“, und selbst dann noch, nachdem er 1861 eine ganz andere und jedenfalls viel richtigere Erklärung mit den Worten abgeschlossen hatte „dies nach langem Schwanken meine jetzige Ansicht“, hat er seine frühere Auffassung wörtlich in der Petrefactenkunde 1867 in der II. und 1885 in der III. Auflage wiederholt. Für eben solche Entstehung hat auch E. Weiss 1868 (N. Jahrb., S. 729) das Wort ergriffen.

5. Die Contractions-Theorie. Schon 1849 schrieb Strombeck (Zeitschr. Deutsch. Geol. Ges. S. 178) „eine gewisse ungleichförmige Contraction des Gesteines, die nach seiner Ablagerung erfolgte, ist die Hauptbedingung gewesen“. Aber erst 1852 hat Plieninger (Württemberg. naturw. Jahresh., Bd. 8, S. 78) dieser Vorstellung eingehendere Aufmerksamkeit gewidmet. Nach Ablagerung und Trockenlegung sollen sich im Kalkschlamm Trockenrisse gebildet haben, die durch niederrieselndes Regenwasser gestreifte Wände erhielten und aus denen dann bei der Gesteinserhärtung die gerieften Stylolithenwände wurden.

Dass diese Theorie so wenig wie eine der vorher besprochenen im Stande ist, die Entstehung der Stylolithen in zufriedenstellender Weise zu erklären, steht heutigen Tages wohl fest.

6. Die Druck-Theorie bleibt somit als einzige Zuflucht übrig und sie erfreut sich ja auch gegenwärtig allgemeinster Anerkennung, wenn schon im Einzelnen die Meinungen auch da recht weit auseinandergehen. Zuerst ist sie von Quenstedt 1837 (Wiegmanns Archiv f. Naturgesch., Bd. 2, S. 223) angedeutet worden. „Stylolithen sind durch organische Wesen geleitete Absonderungen.“ Die Muschelschalen

unterbrachen den Zusammenhang der noch weichen Gesteinsmasse in vertikaler Richtung, in der sich diese Masse zusammenzog und niedersetzte, und machten eine schnellere Zusammenziehung der aufrecht darunter oder darüber liegenden Gesteinsmassen möglich, was dann die seitlichen Absonderungen dieser Masse von dem sich langsamer setzenden Nebengestein bedingte.

So bedeutsam diese Aeusserung auch wirkte, da sie der Klöden'schen Theorie den Todesstoss versetzte, so begreift man doch leicht, dass sie nicht einmal ihren Autor auf die Dauer befriedigen konnte. Schon 1843 suchte Quenstedt (Flötzgebirge Württembergs) nach einer besseren Begründung. Er nahm an, die „leitenden Versteinerungen“ hätten ein anderes specifisches Gewicht wie der sie umgebende Schlamm gehabt und wären, je nachdem dasselbe grösser oder kleiner war, langsam niedergesunken oder aufgestiegen, wobei der zurückgelegte Weg durch die vertikale Streifung im Schlamm markirt worden sei. Mit guten Gründen wurde diese Erklärung von Plieninger (l. c. 1852) bekämpft und alsbald auch von Quenstedt selbst aufgegeben, der sich inzwischen der Regentheorie zugewandt hatte. Dann aber machte er 1861 (Epochen der Natur S. 200) einen neuen Versuch, der bisher den meisten Anklang gefunden hat. Wenn zwei Kalkschichten übereinander abgelagert, aber von einer dünnen Thonschicht von einander getrennt waren, so „mochte schon der verschiedenzeitige Niederschlag gewisse Differenzen in der Härte der oberen und unteren Masse hervorbringen. Als nun die darauf lagernde Masse immer mehr drückte, riss die Lettenschicht, die untere Kalkbank drang in die obere und umgekehrt.“

Diese Erklärung war nicht neu, wenn schon sie von den meisten als solche hingenommen worden ist. Neu war darin nur, dass auf das Zerreissen der Thonschicht ein besonderer Werth gelegt wurde, als ob dieselbe härter oder fester wie der Kalk gewesen wäre, was doch bei dem vorausgesetzten weichen und durchfeuchteten Zustand der Ablagerungen gar nicht der Fall sein konnte. Nach Mittheilung von H. Eck (l. c. 1872) soll Beyrich eine ähnliche Erklärung mündlich schon früher mit-

getheilt haben. Ganz sicher ist aber jedenfalls, dass Thurmann die literarische Priorität hat (l. c. 1856). Die Stylolithen sind ihm die cannellirten Zähne, mit denen die Kalkmassen im weichen Zustande ineinanderdrängen, wenn local sich Massen gegenüberliegen, die sich in ihrer Widerstandsfähigkeit gegen Druck verschiedenartig verhalten. Die einsinkende Masse wird durch die Bewegung an den Seitenwänden gerieft. Der Druck ist meist vertikal nach unten, manchmal auch horizontal gerichtet, durch ersteren entstehen die vertikalen Stylolithen auf den Schichtflächen, durch letzteren horizontale, in den Bänken von den Kluftflächen ausgehende. Wie weit Beyrich und Quenstedt durch diese Ideen Thurmanns beeinflusst waren, ist nie bekannt geworden. Dass aber auch in der ganzen späteren Stylolithen-Literatur der Arbeit dieses vortrefflichen Beobachters, die erst nach seinem Tode veröffentlicht worden ist, keine Erwähnung gethan wird, ist sehr merkwürdig, erklärt sich jedoch zum Theil aus ihrer Schwerfälligkeit und einigen Absonderlichkeiten, auf die ich weiterhin zurückkommen werde. Unter allen Umständen gebührt aber Thurmann das Verdienst, die erste physikalisch wohl begründete Erklärung der Stylolithen oder, wie er sie nennt, Diasperasmen, als Druckerscheinungen gegeben zu haben.

O. C. Marsh veröffentlichte 1867 (Proc. Americ. Assoc. Sciences, Vol. 16, S. 135—143) einen Aufsatz „on the origin of the so called Lignilites or Epsomites“, indem er auf Grund eingehender Studien über die Stylolithen Deutschlands und Nord-Amerikas die Krystallisations-Theorie bekämpfte und der Druck-Theorie in Amerika erfolgreichen Eingang verschaffte. Er lehnte sich vollständig an die Auffassung Quenstedts von 1861 an, ergänzte sie aber in mehreren Punkten. Freilich legt auch er das Hauptgewicht auf die gedeckelten Stylolithen und nennt den Deckel geradezu den Schlüssel des Mysteriums. Er meint, dass eine Schale unter der dünnen Thonschicht zwischen zwei weichen Kalklagen dem Druck von oben, der die untere Lage im Ganzen hinunterdrückt, grösseren Wider-

stand leisten müsse, so dass sie sich langsamer als die übrige Oberfläche senke und meist wie eine Säule stehen bleibe. Als Ursachen dieser grösseren Widerstandskraft zählt er auf 1. dass nach oben gewölbte Schalen wie Keile die Cohäsion der aufliegenden Massen überwunden haben, 2. dass das Gewicht des Deckels die Masse unter ihm bereits verdichtet habe, 3. dass die organische Substanz des Deckels im Kalkschlamm darunter bereits Kalkconcretionen veranlasst habe, deren Zustandekommen nach oben die hangende Thonschicht verhinderte. Liegen die Schalen statt unter über der Thonschicht, dann bilden sich Zapfen nach unten aus. Wo solche Deckel fehlen, kann die Ursache in anderweitigen Ungleichheiten der Dichtigkeit in der plastischen Kalkmasse liegen, aber die Säulen werden dann nicht so regelmässig geformt.

Der Ueberzug von Calcit-, Dolomit-, Gyps- oder Coelestin-Krystallen, der sich öfters auf den gerieften Wänden der Zapfen findet, sei nicht primär, sondern erst nachträglich durch Infiltration entstanden.

Gümbel hat sich 1882 (Z. D. geol. Ges., Bd. 34, S. 642) über diesen Gegenstand geäussert. Er schliesst sich ausdrücklich an die Auffassung von Beyrich und Quenstedt an, verräth aber in keiner Weise eine Kenntniss der wichtigen Arbeiten von Thurmann und Marsh.

Er gibt zunächst eine genaue Beschreibung der Stylolithen, in der besonders auffällt, dass er das Vorkommen horizontaler Stylolithen bezweifelt. Den Vorgang der Entstehung schildert er folgendermassen: „Die Stylolithen sind innerhalb mehrerer aufeinander lagernder, in Form eines Kalkschlammes abgesetzter, durch thonige oder mergelige Zwischenlagen abgetrennter Schichten dadurch entstanden, dass bei dem ungleichen Verhalten, bei dem Austrocknen oder Verfestigen die Thon- oder Mergellage sich zusammenzog, rissig wurde, in kleine Stückchen klüftete und dass dadurch die bisher bestehende Gleichgewichtslage der zwei aufeinanderruhenden Kalkschichten gestört wurde, die auflagernde Kalkmasse einen Druck auf die unterliegende ausübte, der bei dem Austrocknen entstandenen Raumvermin-

derung entsprechend sich senkte und dadurch einzelne kleinere, durch das Zersprengen der Thonlage abgetrennte Partien der unterliegenden Masse zu einer aufsteigenden Bewegung veranlasste. Die kleinere Masse wurde nemlich dadurch gezwungen, dem Druck der grösseren nachzugeben, was nur durch eine Bewegung nach aufwärts möglich war, da die Unterlage jede Bewegung in dieser Richtung verhinderte. Durch diese wechselseitige Bewegung, nemlich einer sich senkenden in der Hauptmasse und einer aufsteigenden in den zerstückelten kleinen Partien, entstand die zapfenförmige Verkeilung der Stylolithen mit dem einschliessenden Gestein und durch die Bewegung selbst nach dem Umriss der hierbei bahnbrechenden Schale oder Thonschieferscholle bildete sich die Cannellirung und Längsstreifung der Stylolithen. Das durch Zerreissung der unteren Thonlage abgetrennte Thonstück erscheint als die Kappe des Stylolithen, die während des Aufsteigens sich abtrennenden Thontheilchen als thoniger Ueberzug des Stylolithen.“ Gümbel hat diesen Vorgang experimentell nachzuahmen versucht, indem er eine mit Löchern versehene Bleiplatte zwischen zwei plastische aus Thon und Malerkreide gemischte Lagen einschaltete. Durch den Druck der Platte wurden dann stylolithenähnliche Zapfen der unteren Masse heraus- und in die obere Masse hineingepresst.

Nach Gümbel läge also das Ursächliche in dem Vorhandensein einer trennenden Thonschicht und deren Zerreissen in Folge der Austrocknung. Im Experiment soll deshalb die Bleiplatte die Rolle der zerrissenen Thonschicht spielen. Auf das Mangelhafte dieser Veranstaltung hat bereits Th. Fuchs (1894) hingewiesen, wenn schon er hierbei in einer Hinsicht Gümbel Unrecht that, nemlich mit Bezug auf „die niemals fehlende Thonkappe“, die ja auch bei Gümbels Experiment erhalten wurde. Viel anfechtbarer als das Experiment erscheint mir die physikalische Begründung. Der dünnen Thonlage wird hier eine Rolle zugeschrieben, die sie gar nicht spielen konnte. Wenn die aufliegende noch weiche plastische Kalkmasse einen „grossen Druck“ ausübte, so konnte die dünne

Thonschicht nicht zerreissen, höchstens zusammengepresst werden, was aber in diesem Falle gerade das Gegentheil von Zerreissen bedeutet. Auch brauchte die obere Kalkmasse keineswegs auf ein Zerreissen der Thonschicht zu warten, um auf die untere Kalkmasse einen Druck auszuüben, der sich ja durch die dünne Thonschicht hindurch längst fortgepflanzt hatte. Ein weiterer Mangel dieser Auffassung besteht auch darin, dass sie die horizontalen Stylolithen nicht erklären kann. Bereits 1883 habe ich Gümbel horizontale Stylolithen überbracht, die ich in Begleitung von Eb. Fraas beim Aufstieg von Spaichingen nach der Dreifaltigkeitskirche im weissen Jura β anstehend getroffen hatte. Auf seinen Wunsch überliess ich ihm das eine der zwei Stücke, welche einem vertikal die Kalkbank durchsetzenden Stylolithenband entnommen waren. Die Zapfen haben zum Theil eine Länge von 1 Zoll und zeigen scharfe Cannellirung. Aber erst 1888 (Zeitschr. D. geol. Ges. S. 187) gab Gümbel seinen Zweifel am Bestehen horizontaler Stylolithen auf, als er solche im Jurakalk von Burglengenfeld in der Oberpfalz aufgefunden hatte. Er suchte gleichwohl seine frühere Erklärung aufrecht zu erhalten, indem er annahm, ursprünglich vertikale Zapfen seien durch Ablenkung nach vorhandenen Spalten in horizontale Richtung gebracht worden. Wie freilich in dem weichen plastischen und noch nicht ausgetrockneten Kalkschlamm, der unter hohem Druck stand, Spalten bestehen konnten, darüber gibt er uns keine Aufklärung.

Die beste, auch heute noch stichhaltige Erklärung, ist jedenfalls diejenige Thurmanns. Liegen zwei Kalkschichten in weichem (pelomorphem) Zustand übereinander, so drückt die obere auf die untere, einerlei ob eine thonige Zwischenschicht vorhanden ist oder nicht. Ist die untere Schicht irgendwo stärker comprimirbar als sonst ringsum, oder wird ein stärkerer Druck auf sie ausgeübt, so sinkt die obere Masse dort zapfenförmig ein und erhält dabei seitliche Striemung. Die horizontalen Stylolithen sind durch Seitendruck entstanden, der aber gewöhnlich zu schwach war oder erst eintrat, als das

Gestein nicht mehr plastisch genug war, so dass diese Stylolithen sich nicht so häufig und wohl charakterisirt entwickeln konnten.

Auffällig erscheint dabei nur, dass Thurmann den vertikalen Druck und den seitlichen als von einander unabhängig und auch zeitlich getrennt ansieht und nicht die Consequenz zog, dass vertikaler Druck im Gestein von so weicher und plastischer Beschaffenheit sich auch in seitlicher Richtung fortpflanzen muss.

Darüber, warum die Massen an einigen Stellen nicht so stark oder stärker comprimirbar waren, finde ich bei Thurmann keine weiteren Angaben, und diejenigen, welche Marsh gegeben hat, sind gewiss ungenügend und erklären für die deckelfreien Stylolithen gar nichts.

7. Die Auflösungs-Theorie. So weit die bisher besprochenen Ansichten auch unter sich auseinandergehen, so haben sie alle doch das gemeinsame, dass sie die Stylolithenbildung in eine Zeit versetzen, in der die Kalksteine noch nicht ihre heutige feste Beschaffenheit besassen, sondern noch weich und plastisch waren.

Th. Fuchs ist der einzige, der ihre Entstehung in festem Gestein vor sich gehen lässt und zwar in der gleichen Weise, wie sich die Drucksuturen bilden, durch Druck und chemische Auflösung, eine Annahme, die mir aus den schon früher erwähnten Gründen nicht haltbar erscheint.

Die Drucksuturen-Literatur ist sehr viel kleiner als die über Stylolithen. Hall hat 1843 eine Abbildung derselben gegeben (l. c. Fig. 53), sie aber zu den Ligniliten oder Epsomiten gestellt und ebenso wie bei diesen in Krystallisationen ihre Entstehung gesucht.

Thurmann hingegen hat sie sehr eingehend beschrieben und abgebildet, aber in einer recht merkwürdigen Weise erklärt, die in der späteren Literatur fast keine weitere Beachtung gefunden hat, zum Theil wohl deshalb, weil sie niemanden recht einleuchten wollte, zum Theil auch, weil seine Darstellung,

wie schon erwähnt, recht schwerfällig war und man sich, um sie überhaupt zu verstehen, erst mühsam in die ihr eigenthümlichen Bezeichnungsweisen hineinarbeiten muss.

Gleichwohl ist seine erst postum erschienene Arbeit so voll von feinen Beobachtungen und Gedanken, dass es sich wohl der Mühe lohnt, sie kennen zu lernen und das um so mehr, als sie nicht ohne Einfluss auf die später von A. Heim aufgestellte Hypothese der latenten Plasticität gewesen zu sein scheint.

Thurmann geht davon aus, dass alle Sedimente nach ihrer Ablagerung sich, ehe sie ihre heutige feste Beschaffenheit erlangten, in einem pelomorphen Zustand befunden haben.

Der Pelomorphismus (πηλος Schlamm) ist dadurch bedingt, dass der feine, aus nicht wahrnehmbaren Molecülen bestehende Kalkschlamm mit Meereswasser vermischt blieb. Diese Masse ist vollkommen dehnbar und plastisch, beweglich wie Gallerte, fähig und geneigt bei geringster Erschütterung auf glatten Spalten zu zerreissen und diese Spalten wieder zu schliessen, Wasser zu verlieren, sich dadurch zusammenzuziehen und dabei auf Spalten mit rauher und zackiger Oberfläche auseinander zu reissen. Durch Druck verliert diese Masse Flüssigkeit und nimmt an Volumen ab. Gegen eine freie Oeffnung gepresst lässt sie sich in dieselbe hineinpressen, wobei sie eine der Oeffnung entsprechende Form annimmt. Durch Seitendruck wird sie gefaltet, durch vertikalen Druck von unten aufgebogen, wobei die der pelomorphen Masse etwa beigemengten lithomorphen (d. h. festen, wasserfreien) Körper, wie z. B. Muschelschalen oder Belemniten-Rostren zerbrechen oder defigurirt werden können.

Die Dauer dieses pelomorphen Zustandes war sehr lang, aber verschieden lang bei den verschiedenartigen Sedimenten, von denen einige wie z. B. die Cementmergel auch schon im noch feuchten Zustand fest werden konnten. Lithomorphe Körper, wie Oolithe, Schalen, Gehäuse und Skelettheile von Thieren, Sandkörner und Gerölle wurden bereits während der

Sedimentbildung von der pelomorphen Masse eingeschlossen, andere bildeten sich darin nachher während des pelomorphen Zustandes, wie z. B. Gänge, Nester und Geoden von Calcit, Quarz, Schwefeleisen etc. Je grösser die Menge der lithomorphen Körper war, um so geringer der Pelomorphismus.

Alle Veränderungen, die durch den pelomorphen Zustand bedingt sind, heissen Pelomorphosen, die obere und untere Grenzfläche der Schichten oder Bänke Epicliven und Hypocliven, alle anderen Spaltflächen Diacliven. Die normalen, d. h. rechtwinkelig zu den Schichtflächen stehenden und die anormalen, damit einen kleineren Winkel bildenden Diacliven sind Pelomorphosen, doch gibt es daneben auch noch unregelmässige lithomorphe Diacliven, die erst nach Beginn der Verfestigung der Sedimente entstanden sind. Die glatten pelomorphen Epicliven nennt Thurmann galenisch oder Galenien (γαληνη Meeresstille), agalenisch heissen sie, wenn sie durch Druck, Reibung und Zerreissungen entstellt sind.

Hauptdiacliven (diaclives principales) durchsetzen mehrere Schichten und gehören zwei rechtwinkelig sich kreuzenden Systemen an; Nebendiacliven (d. secundaires) setzten nur durch eine Schicht und heissen accessorisch, wenn sie anormal sind.

Die Diacliven sind entweder klaffend und leer, oder mit Calcit, niemals aber mit pelomorpher Substanz ausgefüllt, weil sie erst später entstanden sind als die von ihnen nicht mehr betroffene hangende Gesteinsschicht. Sie klaffen manchmal, wenn auch selten, bis 1 dm weit, zuweilen sind sie aber auch wieder ganz zusammengegangen (recollement). Den Volum-Schwund, welcher die Diacliven erzeugt hat, berechnet Thurmann für den von ihm untersuchten Theil des Juragebirges auf ein Zehntausendstel. Er ist bedingt durch die innere Wärme, welche das Wasser austreibt und schreitet von unten nach oben fort.

Thlasmen (ϑλαω quetschen, zerdrücken) heissen die Rauhigkeiten der Diacliv-Wände. Es sind ausgezogene Spitzen,

Splitter (esquilles), die beim Auseinanderreissen der pelomorphen Masse entstehen. Bei den Epicliven kommen sie nicht vor.

Schliessen sich die thlasmirten Wände (thlasmées) der Diacliven wieder zu, so können sich — und es ist dies besonders bei den secundären Diacliven der Fall — die beiderseitigen Thlasmen wieder so genau ineinander fügen, dass diese Contractionsrisse sehr leicht der Beobachtung entgehen. Es sind das Syncollemen (*συγκολλαω* zusammenleimen), und es unterliegt mir keinem Zweifel, dass damit die echten Drucksuturen gemeint sind.

Fügen sich die Thlasmen beim Schliessen der Diacliven aber nicht mehr genau ineinander, so zerdrücken sie sich gegenseitig, die Wände werden eben, glatt, wellig oder auch gestreift, und diese Oberflächenformen heissen dann Tripsen (*τριψις* Reibung). Es gibt sowohl tripsirte Diacliven als auch Epicliven.

[Ein Theil dieser Tripsen sind die wohlbekannten Rutschstreifen.]

Die tripsirten Diacliven können aber nochmals auseinandergerissen werden und es entstehen dann die Xecollemen (von *ξεκολλημα*, décollement, abgeleitet, ein Wort, das aber selbst Passow unbekannt ist und wohl *ἐκκολλημα* heissen sollte).

Die Rauhigkeiten dieser xecollirten Wände unterscheiden sich von denen der thlasmirten Wände dadurch, dass sie stärker hervortreten, aber weiter von einander abstehen. [Mir scheint, dass diese Formverschiedenheiten Wirkungen des auf den Kluftflächen zirkulirenden Wassers sind.]

Als Diaperasmen endlich werden die Stylolithen bezeichnet, wie schon weiter oben eingehender dargestellt wurde.

Der pelomorphe Zustand hat nach Thurmann im Jura noch existirt, als schon die heutigen Thäler eingeschnitten waren, denn es finden sich häufig an den Thalgehängen Felsabrutschungen mit tripsirten Wänden. Auch die grossen Verwerfungen gingen im pelomorphen Gebirge vor sich, weil die Spaltenwände gestreift sind. Die Gerölle der tertiären Nagel-

fluh waren noch pelomorph, als sie ihre gegenseitige Eindrücke erhielten (galets tripsés), mithin sind sie auch aus Zerstörung pelomorpher Juragesteine entstanden, woraus auf einen sehr raschen Abrollungsprocess geschlossen wird. Selbst die tertiären Lithodomen fanden pelomorphe Küstenfelsen vor, in die sie ihre Löcher bohrten. Lithomorphe Körper, wie z. B. Molluskengehäuse, konnten natürlich keine Pelomorphosen erleiden, wo pelomorph umgewandelte (comprimirte oder in die Länge gezogene) Steinkerne solcher Gehäuse gefunden werden, muss man annehmen, dass diese Umformung erst nach Auflösung der Schale eingetreten ist.

Vier grosse Perioden werden endlich von Thurmann unterschieden: die erste umfasst die Sedimentation der hoch pelomorphen Massen, in der zweiten öffnen sich in Folge seismischer Oscillationen die Diacliven, in der dritten treten die grossen Dislocationen (Gebirgsbildung) ein und in der vierten beginnt die Solidification des Gesteins. In allen diesen Perioden nahm der Pelomorphismus langsam aber stetig ab.

Marsh (l. c.) hat 1867 die von Hall abgebildete Drucksutur zu den unvollkommenen Stylolithen gestellt und er weist darauf hin, dass gerade solche undeutliche Säulenbildungen und Riefungen, die längs Rissen oder auch mitten im Kalkstein auftreten, recht häufig sind. Wo sie schräg zur Bankung verlaufen, schreibt er sie der Wirkung seitlichen Druckes zu, ohne indessen zu sagen, wie derselbe entstand.

Dass diese Drucksuturen nicht in dem noch weichen, sondern im bereits verfestigten Gestein und nicht in Folge von Contraction der Gesteinsmasse, sondern von Pressung und damit verbundener chemischer Auflösung entstanden sind, habe ich 1886 nachgewiesen und 1894 weiter ausgeführt. Daraufhin hat dann Th. Fuchs (l. c.) noch 1894 ebenfalls und mit besonderer Bezugnahme auf Halls Abbildungen für die Stylolithen und Drucksuturen gleiche Entstehungsart gefordert, aber im Gegensatz zu Hall und Marsh beide als Druckerscheinungen mit chemischer Auflösung in festem Gestein aufgefasst. Er gibt als besondere Begründung dieser

Vereinigung noch folgendes an: „Dass die Stylolithen nicht in weichem, nachgiebigem, sondern in bereits verfestigtem Gestein entstanden, scheint mir übrigens bereits aus der feinen, scharfen, parallelen Riefung hervorzugehen, welche die Seiten derselben zeigen und welche ein ganz charakteristisches Merkmal der Stylolithen darstellen. Ueberdies erscheinen diese Seiten oft wie polirt und bieten ganz das Bild einer Rutschfläche oder eines Harnisches dar.

Derartige Oberflächenzeichnungen können sich meiner Ansicht nach nur auf festem Gestein bilden und scheint mir die Bildung geriefter, glänzender Rutschflächen auf einer weichen teigartigen Masse nicht gut denkbar.“

Wir sehen, dass zwei Forscher dieselbe Erscheinung zu gerade entgegengesetzten genetischen Schlussfolgerungen benutzt haben.

Thurmann schliesst aus dem Vorhandensein von Riefungen und Rutschflächen auf den weichen — Fuchs auf den harten Zustand des Gesteines während deren Entstehung. In Wirklichkeit können sich dieselben sowohl im weichen wie im festen Gestein bilden. Als 1887 hinter dem Bad Sulz bei Peissenberg ein grösserer Bergrutsch eintrat in Folge der Ueberlastung eines lehmreichen Gehänges durch eine Steinbruchhalte, trat eine sehr scharfe seitliche Trennung zwischen der bewegten und der in Ruhe gebliebenen Gebirgsmasse ein. Erstere hatte sich mit allem was darauf stand, Büschen, Bäumen und Häusern, langsam abwärts bewegt, und als ich über zwei Jahre später die Stelle besuchte, waren die Rutschstreifen, die sich dabei auf der seitlichen Abrissspalte im Lehm genau in der Richtung der Bewegung gebildet hatten, noch vollkommen deutlich erhalten. Selbst einige Jahre später fand ich sie nach Entfernung des Rasenbodens immer noch sichtbar. Die Weichheit des Gesteines kann also nicht als Hinderniss für die Entstehung der Streifen auf den Stylolithen gelten, eher die Härte. Auf den Drucksuturen findet man allerdings auch eine Art von Streifung, aber sie ist ganz anders ausgebildet. Kurze riefenartige Vertiefungen wechseln mit einander ab und

geben der Oberfläche mehr ein zerhacktes als ein gestreiftes oder cannellirtes Aussehen. Chemische Auflösung kann so lange und regelmässige Furchen, wie sie die Zapfen der Stylolithen zeigen, nicht erzeugen, denn dazu gehörte, dass an den Vertiefungen immer das Nebengestein, an den Erhöhungen immer das Gestein der Zapfen widerstandsfähiger gegen Auflösung geblieben wäre, ein Zufall, der in solcher Häufigkeit und Beständigkeit nicht eingetreten sein kann.

Sitzung vom 3. Februar 1900.

1. Herr Hermann Ebert legt eine in seinem Laboratorium von den Herren Hugo Freitag und Georg Heinrich ausgeführte Arbeit: „Ueber die magnetische Susceptibilität organischer Verbindungen" vor.

2. Herr Richard Hertwig hält einen Vortrag: „Ueber die Bedeutung der Befruchtung bei Protozoen". Derselbe wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

3. Herr Alfred Pringsheim macht eine Mittheilung: „Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenz-Kreise".



Ueber das magnetische Verhalten von Alkoholen.

Von **Gg. Heinrich.**

(Eingelaufen 10. Februar.)

Bei den Untersuchungen kam die Quincke'sche Steighöhenmethode in der Modifikation von Gust. Jäger (Sitzungsber. d. Wiener Ak. d. Wiss. Math.-nat. Kl. CVI. Abt. II) zur Anwendung.

Jeder Alkohol wurde bei 5 verschiedenen Feldstärken (von 7500 bis 11500 Kraftlinien pro cm^2) untersucht und für jede Feldstärke wurden 6 Einzelbeobachtungen gemacht.

Wir bezeichnen mit k die magnetische Susceptibilität, M das Molekulargewicht, $k \cdot M$ den Molekularmagnetismus, $\mathfrak{H}$ die Feldstärke.

Es fanden sich folgende Resultate:

1) Sämtliche Alkohole sind diamagnetisch.

2) Der Molekularmagnetismus $k \cdot M$ ist für eine Substanz nicht konstant, sondern von der magnetischen Feldstärke abhängig. Dabei nimmt der Diamagnetismus mit steigender Feldstärke ab und zwar in dem Maasse, dass in ziemlicher Annäherung für eine Substanz $k \cdot M \cdot \mathfrak{H}$ als Konstante betrachtet werden kann.

3) Für gleich hohe Alkohole, d. h. für Alkohole, die dieselbe Anzahl von Atomen, aber in verschiedener Bindung, enthalten, zeigte sich $k \cdot M \cdot \mathfrak{H}$ abhängig von der chemischen Konstitution. Die magnetischen Eigenschaften sind also für Alkohole nicht rein additiver Natur, sondern nach der Konstitution verschieden.

Die Endzahlenwerte für die untersuchten Alkohole sind:

			$k \cdot M \cdot \mathfrak{H}$
CH_3OH:	Methyl-Alkohol		-0.185 ± 0.004
C_2H_5OH:	Aethyl-Alkohol		-0.296 ± 0.003
C_3H_7OH:	Propyl-Alkohol.	Normal	-0.392 ± 0.009
„	„	Iso.	-0.409 ± 0.007
C_4H_9OH:	Butyl-Alkohol.	Normal	-0.520 ± 0.009
„	„	Iso.	-0.541 ± 0.008
„	Trimethylcarbinol		-0.482 ± 0.014
$C_5H_{11}OH$:	Amyl-Alkohol.	Iso.	-0.599 ± 0.014
„	Dimethylaethylcarbinol		-0.563 ± 0.011.

Ueber die magnetische Susceptibilität organischer Substanzen der aromatischen Reihe.

Von **Hugo Freitag.**

(*Eingelaufen 10. Februar.*)

Die Untersuchung wurde nach der von G. Jäger und St. Meyer in den Wiener Ak. Berichten, math.-nat. Kl. CVI, Abteilung II, angegebenen Methode ausgeführt und ergab folgende Resultate:

1) Der Molekularmagnetismus ist für die untersuchten Präparate keine rein additive Eigenschaft, sondern von der chemischen Konstitution abhängig.

2) Sämtliche untersuchte Flüssigkeiten zeigten sich diamagnetisch.

3) Der Diamagnetismus nimmt mit wachsender Feldstärke ab.

4) Zwischen dem Molekularmagnetismus k_m und der Feldstärke $\mathfrak{H}$ besteht mit guter Annäherung die Beziehung:

$$k_m \mathfrak{H} = \text{konst.}$$

Als Zahlenwerte dieses konstanten Produkts wurden gefunden:

		$k_m \cdot \mathfrak{H}$
C_8H_{10}:	Orthoxylol	-0.734 ± 0.006
„	Metaxylol	-0.718 ± 0.010
„	Paraxylol	-0.685 ± 0.014
„	Aethylbenzol	-0.675 ± 0.006
C_9H_{12}:	Pseudocumol	-0.623 ± 0.010
„	Mesitylen	-0.773 ± 0.011.

Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 2. April.)

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, die noch für die Stellen $X = R \cdot e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen convergirt, ist zwar unter gewissen Einschränkungen[1]) allemal eine Fourier'sche Reihe. Immerhin ist man bei der Beurtheilung der Convergenz von $\mathfrak{P}(R\, e^{\vartheta i})$ nicht ausschliesslich auf diejenigen Ergebnisse angewiesen, welche die allgemeine Theorie der Fourier-schen Reihen liefert. Abgesehen von den elementaren Kriterien für unbedingte oder bedingte Convergenz, kommt als ein der Potenzreihe als solcher eigenthümliches Hülfsmittel das Verhalten von $\lim \mathfrak{P}(x)$ bei speciellem oder beliebigem Grenzübergange $\lim x = X$ in Betracht. In § 1 der folgenden Mittheilung wird zunächst in ganz elementarer Weise untersucht, in wieweit aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$ geschlossen werden kann. Die Cauchy'sche bezw. Fourier'sche Integral-Darstellung der Reihen-Coefficienten führt sodann in § 2 zu einem Kriterium für die absolute Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$. Daran schliessen sich (§ 3) Betrachtungen über Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und doch nicht absolut convergiren. Schliesslich (§ 4) werden weitere Anhaltspunkte zur Beurtheilung von $\mathfrak{P}(X)$ aus dem Umstande gewonnen, dass $\mathfrak{P}(X)$ durch Trennung des Reellen und Imaginären in zwei von einander abhängige, in ihren Convergenz-Eigenschaften sich gegenseitig bedingende Fourier'sche Reihen zerfällt.

[1]) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 337 ff.

§ 1. Der Abel'sche Grenzwerth-Satz und seine Umkehrungen.

1. Es sei:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu \qquad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i) \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit endlichem Convergenz-Bereiche, d. h. einem mit einem gewissen Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Da man, sofern nicht schon $R = 1$ ist, $\mathfrak{P}(x)$ mit Hülfe der Substitution $x = Ry$ in die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(y) = \sum_1^\infty {}^\nu (a_\nu R^\nu) \cdot y^\nu$ mit dem Convergenz-Radius $|y| = 1$ transformiren kann, so dürfen wir, ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, im folgenden ein für allemal als Convergenz-Radius von $\mathfrak{P}(x)$ den Werth $|x| = 1$ annehmen. Ist dann $\sum a_\nu$ convergent und bedeutet ϱ eine reelle positive Zahl < 1, so besagt der bekannte Abel'sche Grenzwerth-Satz, dass:

$$\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu, \tag{2}$$

und daraus folgt unmittelbar, dass auch:

$$\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu, \tag{3}$$

falls X eine beliebige Stelle auf dem Convergenzkreise bedeutet, für welche $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu$ convergirt.

Es liegt auf der Hand, dass dieser Satz nicht ohne weiteres umkehrbar ist. Denn für die Convergenz von $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ an irgend eine einzelne Stelle X der Peripherie ist nicht nur das Verhalten von $\mathfrak{P}(x)$ in der Nähe dieser speciellen Stelle X, sondern dasjenige in der Nähe des gesammten Convergenzkreises maassgebend. So würde z. B. schon das Vorhandensein einer einzigen Stelle X', für welche $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X')$

von der ersten oder höherer Ordnung unendlich wird, die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für alle übrigen Stellen X definitiv ausschliessen. Auch folgt aus der Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für irgend ein bestimmtes X nicht nur die Existenz der Beziehung (3), sondern, auf Grund einer zuerst von Herrn Stolz[1]) bewiesenen Verallgemeinerung jenes Abel'schen Satzes, die weitere Beziehung:

$$\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu X^\nu, \tag{4}$$

falls x auf einem beliebigen Strahle der Stelle X zustrebt; während andererseits aus der Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ keineswegs ohne weiteres auf diejenige von $\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ in dem eben angegebenem Sinne geschlossen werden kann (Beispiel: $\mathfrak{P}(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$ bei $x = 1$).[2])

Ja sogar, wenn auch $\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ im obigen Sinne für jede Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt, so braucht darum $\mathfrak{P}(X)$ für keinen einzigen Werth X zu convergiren $\left(\text{Beispiel: } \mathfrak{P}(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\right)$.[3])

2. Es giebt einen einzigen, besonders einfachen Fall, in welchem der in Gl. (2) bezw. (3) enthaltene Satz ohne weiteres umkehrbar ist. Um denselben zu erledigen, schicken wir zunächst den folgenden Satz voraus:

Wenn $\sum a_\nu$ *eigentlich* divergirt, so ist $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty$ (d. h. $\lim_{\varrho=1} |\mathfrak{P}(\varrho)| = +\infty$). Dabei soll $\sum a_\nu = \sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ eigentlich divergent heissen, wenn mindestens eine

---

[1]) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), p. 370. Vgl. auch: Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 374.

[2]) Vgl. auch § 2, Nr. 2.

[3]) Vgl. Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54.

der beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum \beta_\nu$ eigentlich d. h. nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergirt).[1])

Beweis. Es sei etwa, um irgend eine Festsetzung zu treffen, $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = +\infty$. Setzt man:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu = \sigma_\nu,$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$(5)\quad \sum_1^n a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^{m-1}{}^\nu (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1})\cdot\sigma_\nu + \sum_m^{n-1}{}^\nu (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1})\cdot\sigma_\nu + \sigma_n\cdot\varrho^n \quad (n>m).$$

Da $\lim\limits_{\nu=\infty} \sigma_\nu = +\infty$, so besitzen die σ_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots.$ eine endliche untere Grenze g_1 (die eventuell auch negativ sein könnte). Bedeutet dann allgemein g_m die untere Grenze von $\sigma_m, \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots.$, so folgt aus (5):

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu > g_1(\varrho - \varrho^m) + g_m \cdot \varrho^m,$$

und daher, wegen $\varrho < 1$:

$$(6)\qquad \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu \left\{ \begin{array}{ll} > g_1 + g_m \varrho^m, & \text{wenn } g_1 < 0, \\ > g_m \varrho^m, & \text{wenn } g_1 \geq 0. \end{array} \right.$$

---

1) Es würde nicht genügen, anzunehmen, dass lediglich:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu + \beta_\nu i) = \infty,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \left| \sum_1^n{}^\nu (a_\nu + \beta_\nu i) \right| = +\infty.$$

Denn aus:

$$\lim_{n=\infty} |A_n + B_n i| = +\infty$$

folgt noch nicht einmal, dass eine der Zahlenfolgen $|A_\nu|$, $|B_\nu|$ den Grenzwerth $+\infty$ haben müsste. Es könnte auch:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |A_n| = \infty, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} B_n = \infty,$$

dagegen

$$\underline{\lim_{n=\infty}} |A_n|, \quad \underline{\lim_{n=\infty}} |B_n|$$

endlich sein.

Unterwirft man ϱ der Bedingung:

$$\varrho \geqq \frac{m}{m+1}, \tag{7}$$

so wird:

$$\varrho^m \geqq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} > \frac{1}{e} \text{ für jedes (noch so grosse) } m,$$

und somit:

$$\sum_1^n{}^{\nu} a_\nu \varrho^\nu > g_1 + \frac{1}{e} \cdot g_m \text{ bezw. } > \frac{1}{e} \cdot g_m. \tag{8}$$

Da, wegen $\lim_{m=\infty} \sigma_m = +\infty$, auch $\lim_{m=\infty} g_m = +\infty$, so kann man m so fixiren, dass g_m, also auch $g_1 + \frac{1}{e} \cdot g_m$ eine beliebig gross vorgeschriebene positive Zahl G übersteigt. Alsdann wird aber nach Ungl. (8):

$$\sum_1^n{}^{\nu} a_\nu \varrho^\nu > G \tag{9}$$

für jedes $n > m$ und jedes $\varrho \geqq \frac{m}{m+1}$. Mithin ergiebt sich:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu \varrho^\nu = +\infty \tag{10}$$

und schliesslich:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^{\nu} (a_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu = \infty, \quad \text{d. h. } \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty, \tag{11}$$

ohne dass über die β_ν eine weitere Voraussetzung gemacht zu werden braucht. — Analog im Falle

$$\sum_1^\infty{}^{\nu} a_\nu = -\infty, \text{ bezw. } \sum_1^\infty{}^{\nu} \beta_\nu = \pm\infty. —$$

Ersetzt man wiederum noch a_ν durch $a_\nu X^\nu$, so folgt:

Ist $\sum a_\nu X^\nu$ *eigentlich* divergent, so wird:

$$\lim_{\varrho=\infty} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty.$$

3. Hieraus kann man zunächst den folgenden Schluss ziehen:

Besitzt für irgend eine Stelle X (auf dem Convergenzkreise) $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen bestimmten Werth, so kann $\sum a_\nu X^\nu$ nur *convergiren* oder *uneigentlich divergiren.*

Da aber die uneigentliche Divergenz definitiv ausgeschlossen erscheint, wenn die reellen wie die imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$, zum mindesten von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab, unter sich gleichbezeichnet sind, so gewinnt man den Satz:

Besitzt $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ für irgend eine Stelle $e^{\vartheta i}$ einen bestimmten Werth, und sind (zum mindesten für $\nu \geqq n$) die Terme $(\alpha_\nu \cos \nu \vartheta - \beta_\nu \sin \nu \vartheta)$ unter sich, ebenso die Terme $(\alpha_\nu \sin \nu \vartheta + \beta_\nu \cos \nu \vartheta)$ unter sich *gleichbezeichnet*, so ist $\sum a_\nu e^{\nu \vartheta i}$ *convergent.*

Dabei gestattet die auf die Vorzeichen der Reihenglieder bezügliche Bedingung noch eine kleine Verallgemeinerung, die auf der Bemerkung beruht, dass der Convergenz-Charakter einer Reihe durch Multiplication mit einem Factor von der Form $e^{\lambda i}$ in keiner Weise geändert wird. Da die Bedingung, dass die reellen, sowie imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$ für $\nu \geqq n$ unter sich gleichbezeichnet sein sollen, geometrisch gesprochen den Sinn hat, dass die Punkte $a_\nu X^\nu$ (abgesehen von einer endlichen Anzahl) durchweg im Innern und auf der Begrenzung eines einzigen der vier von den Axen gebildeten rechten Winkel liegen, und da andererseits durch Multiplication mit $e^{\lambda i}$ jeder Punkt lediglich eine Drehung um den Winkel λ erleidet, so kann die geometrische Bedeutung jener verallgemeinerten Bedingung dahin ausgesprochen werden: die Punkte $a_\nu X^\nu$ müssen (zum mindesten für $\nu \geqq n$) im Innern und auf der Begrenzung eines durch irgend zwei vom Nullpunkte ausgehende Strahlen gebildeten rechten Winkels liegen.

4. Sieht man von dem eben betrachteten Falle ab, so muss zu der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$, falls man daraus auf die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ schliessen will, noch irgend eine andere Bedingung hinzukommen, welche in geeigneter Weise von dem Gesammtverhalten des Grenzwerthes $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ für alle möglichen X und jeden beliebigen Grenzübergang abhängen muss. Als einfachste Form einer solchen Bedingung, die sich ja auch unmittelbar als nothwendig für die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ erweist, würde sich zunächst die Prämisse $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ ergeben. Dieselbe scheint indessen nicht hinreichend zu sein, um daraus in Verbindung mit der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ zu erschliessen. Dagegen hat Herr Tauber gezeigt,[1]) dass eine andere für die Convergenz von $\sum a_\nu$ nothwendige Bedingung, nämlich: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_1^n {}^\nu\, \nu\, a_\nu = 0$, in Verbindung mit der hierzu gleichfalls nothwendigen Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho)$, stets auch die Convergenz von $\sum a_\nu$ zur Folge hat. Ich möchte dieses mir bemerkenswerth erscheinende Resultat hier gleichfalls ableiten und zunächst einige auch an sich nützliche Betrachtungen voranschicken, die ich gleich etwas allgemeiner fasse, als für den Zweck des fraglichen Beweises nothwendig wäre.

5. Setzt man:

$$(12) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n, \qquad 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n = s_n',$$

so folgt der Satz, dass für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n=\infty} s_n$, also für die Convergenz von $\sum u_\nu$, die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0$$

nothwendig erscheint aus einem etwas allgemeineren, zuerst

---

[1]) Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 8 (Wien 1897), p. 273.

von Kronecker bewiesenen[1]) Satzes (s. weiter unten Gl. (19)). Dieses Resultat lässt sich indessen auch in sehr einfacher Weise aus einem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze[2]) ableiten. Darnach ist nämlich (mit einer unerheblichen Abweichung in der Formulirung):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{\nu=\infty} (A_n - A_{n-1}), \tag{13}$$

falls der rechts auftretende Grenzwerth existirt. Substituirt man hier:

$$\begin{aligned} A_n &= s_1 + s_2 + \ldots + s_n \\ &= n \cdot u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n \end{aligned}$$

und multiplicirt die betreffende Gleichung mit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ so wird:}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} (n \cdot u_1 + (n-1)\, u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n) = \lim_{n=\infty} s_n,$$

falls $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ überhaupt (d. h. als endlich oder in bestimmter Weise unendlich) existirt. Ist aber $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ zugleich endlich, also $\sum u_\nu$ convergent, so kann man die letzte Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ u_1 + u_2 + \ldots + u_n - \frac{n u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_1}{n+1} \right\} = 0$$

d. h. man findet (wenn man noch der Symmetrie zu Liebe den Nenner $n+1$ durch n ersetzt):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0. \tag{14}$$

Geht man statt von dem Cauchy'schen Satze (13) von dessen Stolz'scher[3]) Verallgemeinerung aus, nämlich:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{M_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} \tag{15}$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 103 (1886), p. 980.

[2]) Analyse algébr., p. 59.

[3]) Math. Ann. Bd. 14 (1879), p. 232.—Allg. Arithm. Bd. 1, p. 173.

(wo die M_ν mit ν monoton in's Unendliche wachsen und wiederum die Existenz des rechts auftretenden Grenzwerthes vorausgesetzt wird) und substituirt:

$$(16)\begin{cases} \dfrac{A_\nu - A_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = s_{\nu-1}, \\ \text{also: } \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} = \lim\limits_{n=\infty} s_{n-1} = \lim\limits_{n=\infty} s_n, \end{cases}$$

so wird:

$$A_\nu - A_{\nu-1} = (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}$$

und, wenn man $\nu = 2, 3, \ldots n$ setzt und die betreffenden Gleichungen addirt:

$$(17)\qquad A_n = A_1 + \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}.$$

Durch Einführung der Beziehungen (16), (17) in Gl. (15) nimmt daher der betreffende Grenzwerthsatz, wenn man noch beachtet, dass: $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{A_1}{M_n} = 0$, zunächst die folgende Form an:

$$(18)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{M_n} \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} = \lim_{n=\infty} s_n,$$

sofern $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ überhaupt existirt. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich aber noch in folgender Weise transformiren:

$$\begin{aligned} \sum_2^n{}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} &= \sum_2^n{}^\nu M_\nu s_{\nu-1} - \sum_1^{n-1}{}^\nu M_\nu s_\nu \\ &= \sum_2^n{}^\nu M_\nu (s_{\nu-1} - s_\nu) - M_1 s_1 + M_n s_n \\ &= M_n s_n - \sum_1^n{}^\nu M_\nu u_\nu \end{aligned}$$

(wegen: $s_1 = u_1$ und für $\nu > 1$: $s_\nu - s_{\nu-1} = u_\nu$), sodass Gl. (18) in die folgende übergeht:

$$\lim_{n=\infty} \left(s_n - \frac{1}{M_n} \sum_1^n{}^\nu M_\nu u_\nu \right) = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Ist jetzt wiederum noch $\lim_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl, d. h. $\sum u_\nu$ convergent, so folgt schliesslich:

$$(19) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{M_1 u_1 + M_2 u_2 + \ldots + M_n u_n}{M_n} = 0. \text{ [1]}$$

Diese Beziehung bildet also, geradeso wie die speciellere (14) eine nothwendige Bedingung für die Convergenz von $\sum u_\nu$. Dass die Bedingung (14) für die Convergenz von $\sum u_\nu$ nicht hinreichend ist, folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dass es divergente Reihen mit positiven Termen $u_\nu > \nu$ giebt: so genügt z. B. die Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$ der Bedingung (14), obschon sie divergirt. Was sodann die Bedingung (19) betrifft, so gelten im Falle $u_\nu > 0$ die folgenden, ohne besondere Schwierigkeit zu beweisenden Sätze:

Wie stark auch $\sum u_\nu$ divergiren mag, so lassen sich stets monoton in's Unendliche wachsende Folgen M_ν angeben, derart dass die Relation (19) erfüllt ist.[2]

Wie schwach auch $\sum u_\nu$ divergiren mag, so lassen sich stets solche M_ν angeben, für welche der Grenzwerth (19) von Null verschieden ausfällt.

Daraus folgt dann schliesslich:

Genügen die u_ν (wo $u_\nu > 0$) bei jeder Wahl der M_ν der Beziehung (19), so ist $\sum u_\nu$ convergent.

In diesem Sinne kann also die Bedingung (19) als hinreichend für die Convergenz von $\sum u_\nu$ gelten. —

Schliesslich bemerke ich noch, dass nach dem Cauchyschen Satze Gl. (13):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n}{n} = \lim_{n=\infty} n u_n,$$

---

[1]) Das ist die Kronecker'sche Bedingung, die sich noch in gewisser Weise verallgemeinern lässt. Vgl. Kronecker a. a. O. und Jensen, Comptes rendus, T. 106 (188-), p. 835.

[2]) Dieser Satz bleibt natürlich a fortiori auch für beliebige u_ν bestehen.

sobald der rechts stehende Grenzwerth existirt. Somit ist die Beziehung (14) allemal erfüllt, wenn:

$$\lim_{n=\infty} n \cdot u_n = 0 \tag{20}$$

(aber nicht umgekehrt). Entsprechend ergiebt sich aus dem verallgemeinerten Cauchy'schen Satze (Gl. (15), dass die Relation (19) sicher besteht, wenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{M_n}{M_n - M_{n-1}} \cdot u_n = 0\,. \tag{21}$$

6. Hülfs-Satz I. Convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ für $|x| < r \leqq 1$, so gelten für $|x| < r$ die Transformationen:

(A) $\mathfrak{P}(x) = (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu s_\nu x^\nu$

(B) $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot s'_\nu x^\nu$

wo:

$$s_\nu = \sum_1^\nu{}^\lambda a_\lambda, \quad s'_\nu = \sum_1^\nu{}^\lambda \lambda \cdot a_\lambda\,.$$

Beweis. Die Formel (A) ist sehr bekannt, wird jedoch zumeist unter wesentlich engeren Voraussetzungen abgeleitet. Sie wird hauptsächlich, nach dem Vorgange von Dirichlet,[1]) zum Beweise des Abel'schen Grenzwerthsatzes (Gl. (1)) benützt, also unter der Voraussetzung, dass $\sum a_\nu$ convergirt, d. h. $\lim_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Da in diesem Falle offenbar $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$, so resultirt die Formel (A) ohne weiteres aus der Abel'schen Transformations-Gleichung:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu x^\nu = (1-x) \cdot \sum_1^{n-1}{}^\nu s_\nu x^\nu + s_n x^n, \tag{22}$$

wenn man n in's Unendliche wachsen lässt. Wird aber die obige auf $\lim s_n$ bezügliche Annahme nicht gemacht, so müsste,

[1]) Journ. de Math. (2), T. 7 (1863), p. 253. — Ges. Werke, Bd. II, p. 305.

um von Gl. (22) zur Formel (A) zu gelangen, erst feststehen, dass $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$. Dies lässt sich in der That, auf Grund der vorausgesetzten Convergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$, ohne Schwierigkeit direkt nachweisen. Noch einfacher gelangt man jedoch, ohne den Weg über die Transformation (22) zu nehmen, zur Formel (A) mit Hülfe der unmittelbar für $|x| < r \leqq 1$ als richtig erkannten Beziehung:

$$(23) \qquad \frac{1}{1-x} \cdot \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty{}^\nu x^\nu \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu s_\nu x^\nu .$$

Die Vergleichung mit (22) lehrt dann zugleich, dass allemal: $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$, sofern nur die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ einen von Null verschiedeneren Convergenz-Radius r besitzt, mag s_n im übrigen auch mit n beliebig stark in's Unendliche wachsen.

Zum Beweise der Formel (B) bemerke ich zunächst, dass gleichzeitig mit $\mathfrak{P}(x)$ auch die Reihe $x \cdot \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \nu \cdot a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$ convergirt. Daraus folgt aber auf Grund der soeben gemachten Bemerkung, dass auch:

$$(24) \qquad \lim_{n=\infty} s'_n x^n = 0, \quad x \cdot \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty{}^\nu s'_\nu x^\nu \text{ für: } |x| < r.$$

Man hat sodann:

$$s'_\nu - s'_{\nu-1} = \nu \cdot a_\nu, \quad \text{also } a_\nu = \frac{s'_\nu - s'_{\nu-1}}{\nu} \; (\nu = 2, 3, 4, \ldots.),$$

und diese Beziehungen gelten auch noch für $\nu = 1$, wenn man s'_0 die Bedeutung von 0 beilegt. Hiernach ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \sum_1^n{}^\nu a_\nu x^\nu &= \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu} \cdot x^\nu - \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} \\ (25) \qquad &= \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \left(\frac{\nu+1}{\nu} - x \right) \cdot x^\nu + \frac{1}{n} s'_n x^n \\ &= \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \cdot x^\nu + \frac{1}{n} \cdot s'_n \cdot x^n, \end{aligned}$$

und hieraus, mit Rücksicht auf Gl. (24) und die Convergenz von $\sum s'_\nu x^\nu$ (aus welcher a fortiori diejenige der beiden rechts auftretenden Reihen resultirt):

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot s'_\nu x^\nu, \text{ q.e.d.}$$

Zusatz. Für $x = 1$ resultirt aus (25) die späterhin zu benützende Beziehung:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu = \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} + \frac{s'_n}{n}. \tag{26}$$

7. Hülfs-Satz II. Ist $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ (wo wiederum: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), so hat man:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0. \text{ [1]} \tag{27}$$

Beweis. Es ist:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu + \sum_{n+1}^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$$

$$= \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho^{n+1}\left(s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1}\right).$$

Da andererseits:

$$s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1} = s_{n+1} + \sum_2^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1}$$

$$= (1-\varrho) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu s_{\nu+n} \varrho^{\nu-1} \quad \text{(mit Benützung der Formel (A))}$$

$$= \frac{1}{\varrho^n}(1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1},$$

so folgt:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho(1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1}, \tag{28}$$

und daher:

$$|\mathfrak{P}(\varrho)| < \sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + |s_n| + (1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{s_\nu}{\nu}\right| \cdot \nu \varrho^{\nu-1}. \tag{29}$$

[1]) Der Satz lässt sich leicht in folgender Weise verallgemeinern: Ist: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{s_n}{n^p} = 0$, so hat man: $\lim\limits_{\varrho=1} (1-\varrho)^{1-p} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0$.

Wegen $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{s_\nu}{\nu} = 0$ lässt sich nun zu beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass:

$$\left|\frac{s_\nu}{\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für: } \nu > n,$$

also, wenn man Ungl. (29) noch mit $(1-\varrho)$ multiplicirt:

$$|(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^{\nu}|a_\nu| + |s_n|\right\} + (1-\varrho)^2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}\nu\,\varrho^{\nu-1}.$$

Da aber:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\,\nu\,\varrho^{\nu-1} < \sum_1^{\infty}{}^{\nu}\,\nu\,\varrho^{\nu-1} = \frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

so resultirt aus der letzten Ungleichung die folgende:

$$(30)\qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^{\nu}|a_\nu| + s_n\right\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wird jetzt ϱ so eingeschränkt, dass:

$$(31)\qquad \begin{gathered} (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^{\nu}|a_\nu| + s_n\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{d. h. } \varrho > 1 - \frac{\varepsilon}{2\left(s_n + \sum_1^n{}^{\nu}|a_\nu|\right)} \quad (\text{aber} < 1), \end{gathered}$$

so ergiebt sich:

$$(32)\qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < \varepsilon,$$

und, da ε jede noch so kleine Zahl > 0 bedeuten kann, schliesslich:

$$\lim_{\varrho=1} |(1-\varrho)\,\mathfrak{P}(\varrho)| = 0. \text{ —}$$

Zusätze. (a) Ersetzt man wiederum a_ν durch $a_\nu X^\nu$, wo $|X| = 1$, so folgt:

Ist:

$$(33)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n}{n} = 0,$$

so hat man:

$$(34)\quad \lim_{\varrho=1}(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho X) = \lim_{\varrho=1}(X-\varrho X)\cdot\mathfrak{P}(\varrho X) = 0.$$

(b) Die Bedingung (33) ist offenbar für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X| = 1$ erfüllt, wenn:

$$(35)\quad \lim_{n=\infty}\frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{n} = 0.$$

In diesem Falle gilt also auch die Relation (34) für jedes X.

(c) Ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, so besteht (nach dem Cauchy'schen Satze, Gl. (13)) allemal auch die Beziehung (35) und somit wiederum auch Gl. (34) für jedes X.

8. Nunmehr beweise ich den oben erwähnten Satz des Herrn Tauber in der folgenden Fassung:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz von $\sum\limits_1^\infty{}^\nu a_\nu$ besteht in den beiden Beziehungen:

$$(\mathrm{I})\quad \lim_{\varrho=1}\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = A \quad \text{(d. h. gleich einer bestimmten Zahl)}$$

$$(\mathrm{II})\quad \lim_{n=\infty}\frac{s_n'}{n} = 0 \qquad (\text{wo: } s_n' = 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \ldots + n\cdot a_n).$$

Beweis. Die Nothwendigkeit der Bedingung (I) folgt aus der Stetigkeit der Potenzreihe, diejenige der Bedingung (II) aus Gl. (14), p. 44.

Um zu zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichen, transformire ich zunächst $\sum\limits_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$ mit Hülfe der Formel (B) p. 47, also:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s_\nu'}{\nu\cdot(\nu+1)}\cdot\varrho^\nu + (1-\varrho)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu \frac{s_\nu'}{\nu+1}\cdot\varrho^\nu.$$

Lässt man ϱ gegen 1 convergiren, so folgt mit Benützung der Voraussetzung (I) und des Hülfssatzes II (dessen Anwendbarkeit aus dem Zusatze c) und der Voraussetzung (II) folgt):

$$(36)\qquad A = \lim_{\varrho=1} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \varrho^\nu .$$

Da es hierbei gleichgültig ist, welche Folge monoton gegen 1 zunehmender Zahlenwerthe ϱ durchläuft, so hat man speciell:

$$(37)\qquad \begin{aligned} A &= \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu \\ &= \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu + \lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu . \end{aligned}$$

In Folge der Voraussetzung (II) kann man zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass $\left|\frac{s'_\nu}{\nu}\right| < \varepsilon$ für $\nu > n$, also:

$$\left| \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu$$

$$< \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu = \frac{n}{n+1} \cdot \varepsilon ,$$

d. h. es ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu = 0 ,$$

und man kann in Folge dessen die Beziehung (37) durch die folgende (nur noch von einem Grenzübergange abhängige) ersetzen:

$$(38)\qquad A = \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu .$$

Man hat nun ferner, mit Benützung von Gl. (26)

$$(39)\qquad s_n = \sum_{1}^{n}{}^{\nu} a_\nu = \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} + \frac{s'_n}{n}$$

und daher in Folge der Voraussetzung (II) und Gl. (38):

$$(40)\qquad \lim_{n=\infty} (s_n - A) = \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left\{ 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu \right\} .$$

Da aber:

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu} < \frac{\nu}{n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

so wird:

$$\left| \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \frac{s'_{\nu}}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu} \right\} \right| < \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \left| \frac{s'_{\nu}}{\nu + 1} \right| < \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \left| \frac{s'_{\nu}}{\nu} \right|,$$

und da mit Rücksicht auf die Voraussetzung (II) und den Cauchy'schen Satz (Gl. (13)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \left| \frac{s'_{\nu}}{\nu} \right| = 0,$$

so geht Gl. (40) schliesslich in die folgende über:

$$\lim_{n=\infty} (s_n - A) = 0, \tag{41}$$

d. h. man findet:

$$\sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} a_{\nu} = A, \tag{42}$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

9. Substituirt man wiederum $a_{\nu} X^{\nu}$ für a_{ν}, so nimmt der eben bewiesene Satz die folgende Form an:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty} {}^{\nu} a_{\nu} x^{\nu}$ für irgend eine Stelle $x = X$, besteht in der Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ und der Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot a_1 X + 2 \cdot a_2 X^2 + \ldots + n \cdot a_n X^n) = 0. \tag{43}$$

Ist insbesondere $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, also auch: $\lim_{n=\infty} n \cdot |a_n| = 0$, so hat man (s. die Bemerkung am Schlusse von Nr. 5, Gl. (20)) auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot |a_1| + 2 \cdot |a_2| + \ldots + n \cdot |a_n|) = 0, \tag{44}$$

und somit besteht in diesem Falle die Beziehung (43) für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X| = 1$. Man gewinnt daher schliesslich noch den folgenden Satz:

> Ist $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, so convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ für *jede* Stelle X mit dem absoluten Betrage 1, für welche $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen endlichen Werth besitzt.

Es läge nahe aus den Sätzen in Nr. 8 und 9 durch Einführung der bekannten Integral-Form für die Coefficienten a_ν Convergenz-Bedingungen abzuleiten, welche lediglich von der Beschaffenheit der durch die Gleichung $f(x) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ definirten Randfunction (vgl. den folgenden Paragraphen) abhängen. Es ist mir indessen nicht gelungen, auf diesem Wege weitere Bedingungen zu erhalten, als diejenigen, welche aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bereits bekannt sind.

---

§ 2. Ein Kriterium für die absolute Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenz-Kreise.

1. Es sei wiederum:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit dem Convergenz-Radius $|x| = 1$. Dieselbe definirt dann zunächst für $|x| < 1$ eine eindeutige und stetige Function von x, die mit $f(x)$ bezeichnet werden möge. Für die Stellen $X = e^{\vartheta i}$ auf dem Convergenz-Kreise soll sodann $f(x)$ definirt werden durch die Beziehung:

$$f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X), \tag{2}$$

wo ϱ, wie früher, stets eine positive reelle Zahl, kleiner als 1 bedeutet. Für solche Stellen X, für welche ein (endlicher oder unendlich grosser) $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ nicht existirt,

mag $f(X)$ als undefinirt gelten. Die auf diese Weise für alle Stellen $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme etwaiger Stellen der letztgenannten Art eindeutig definirte Function $f(x)$ soll schlechthin die zur Reihe $\mathfrak{P}(x)$ zugehörige Function und speciell $f(X)$ die zugehörige Randfunction heissen.

Es ist ohne weiteres klar, dass überall, wo $\mathfrak{P}(X)$ convergirt, die Beziehung $f(X) = \mathfrak{P}(X)$ besteht (nach dem Abel'schen Satze), und dass an allen Stellen X, über welche hinaus eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x)$ existirt, $f(X)$ mit dieser analytischen Fortsetzung zusammenfällt. Ist ferner $\mathfrak{P}(x)$ die Reihen-Entwickelung eines gegebenen arithmetischen Ausdruckes $F(x)$, für welchen $F(X) = \lim_{\varrho=1} F(\varrho X)$, so hat man offenbar $f(x) = F(x)$, $f(X) = F(X)$. In diesem Falle lässt sich im allgemeinen das Verhalten der Randfunction $f(X)$ aus der Natur des arithmetischen Ausdruckes $F(x)$ genau beurtheilen, und es handelt sich nun darum, aus diesem Verhalten bestimmte Schlüsse auf die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ zu ziehen. Hierzu ist vor allem erforderlich, dass die Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(X)$ sich identisch erweist, was bekanntlich keineswegs ohne weiteres der Fall zu sein braucht, auch wenn für $f(X)$ wirklich eine convergente Fourier'sche Reihe existirt.

Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe,[1]) basirt aber das etwaige Zusammenfallen von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier-schen Reihe für $f(X)$ nicht allein auf der Beschaffenheit dieser Randfunction, d. h. auf dem Verhalten von $\lim_{\varrho=1} f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})$ als Function der reellen Veränderlichen ϑ, vielmehr auf dem Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X — wobei unter der „Umgebung" einer solchen Stelle X immer nur derjenige Theil der Gesammt-Umgebung zu verstehen ist, welcher dem Inneren und der Peripherie des Einheitskreises angehört.

---

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346 ff.

2. Zur Kennzeichnung der eigenthümlichen Eventualitäten, welche bezüglich des Verhaltens von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X thatsächlich eintreten können, bemerke ich, dass aus der Stetigkeit von $f(x)$ längs eines etwa von den Punkten $X_0 = e^{\vartheta_0 i}$, $X_1 = e^{\vartheta_1 i}$ begrenzten Einheitskreis-Bogens und auf jedem Radius $\overline{OX'}$, wo X' jeden beliebigen Punkt jenes Bogens bedeutet,[1]) noch keineswegs folgt, dass $f(x)$ in der Umgebung einer solchen Stelle X' stetig sein müsse oder dass daselbst auch nur $|f(x)|$ unter einer endlichen Grenze bleibe. Die hierin ausgesprochene Thatsache, dass nämlich aus der Stetigkeit einer (für ein zweidimensionales Continuum definirten) Function in zwei auf einander senkrechten Richtungen noch keineswegs deren Gebiets-Stetigkeit (im üblichen Sinne) resultirt, ist zwar für Functionen zweier reeller Variabeln längst bekannt.[2]) Dass dieselbe aber auch an den Grenzstellen analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen vorkommen kann, ist meines Wissens bisher nicht bemerkt worden, und es mag daher nicht überflüssig erscheinen, die fragliche Erscheinung durch ein einfaches Beispiel zu illustriren.

Es sei zunächst für $|x| < 1$:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}.$$

Für jedes von 1 verschiedene $X = e^{\vartheta i} (-\pi \leqq \vartheta \leqq +\pi)$, also für jedes von 0 verschiedene ϑ hat man auf Grund der zur Definition der Randfunction gegebenen Festsetzung:

$$f(e^{\vartheta i}) = \lim_{\varrho=1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho e^{\vartheta i}-1}\right)^4} = e^{-\left(\frac{1}{e^{\vartheta i}-1}\right)^4},$$

und wegen:

---

[1]) Die Stetigkeit von $f(X')$ in der Richtung des Radius, ist allemal da vorhanden, wo ein bestimmtes endliches $f(X')$ überhaupt existirt, da ja die definirende Existenz-Bedingung $f(X') = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X')$ mit der betr. Stetigkeits-Bedingung zusammenfällt.

[2]) Vgl. Encyklopädie der Math. Wissensch. Bd. II, p. 48, Fussn. 254.

$$e^{\vartheta i} - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \sin\frac{\vartheta}{2},$$

schliesslich:

$$f(e^{\vartheta i}) = e^{-\frac{1}{16} \cdot \frac{\cos 2\vartheta - i \sin 2\vartheta}{(\sin\frac{1}{2}\vartheta)^4}}$$

(für jedes ϑ ausser $\vartheta = 0$). Ferner wird:

$$f(1) = \lim_{\varrho=1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho - 1}\right)^4} = 0,$$

und andererseits auch:

$$\lim_{\vartheta=0} f(e^{\vartheta i}) = 0,$$

sodass also $f(x)$ nicht nur für jede von $x = 1$ verschiedene Stelle, sondern auch noch für $x = 1$ in der Richtung des betreffenden Radius und längs der Peripherie stetig ist.

Zieht man jetzt aber solche Stellen x in Betracht, welche auf der die Punkte i und 1 verbindenden Geraden liegen, d. h. setzt man:

$$x = \xi + (1 - \xi) \cdot i \quad (0 < \xi < 1),$$

so folgt:

$$x - 1 = (\xi - 1)(1 - i),$$

und (wegen $(1 - i)^4 = -4$):

$$f(x) = e^{+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\xi - 1}\right)^4},$$

sodass also $f(x)$ für $\lim \xi = 1$, d. h. wenn x auf der Geraden $\overline{i\,1}$ der Stelle $x = 1$ zustrebt, unendlich gross (von unendlich höher Ordnung) wird.

Die Function $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x - 1}\right)^4}$ ist also für keine noch so kleine Umgebung der Stelle $x = 1$ stetig oder auch nur endlich,[1]) obschon sie auf jedem Radius und längs der Peripherie ausnahmslos stetig ist.

---

[1]) D. h. absolut genommen unter einer festen positiven Zahl bleibend.

Da man sich im übrigen solche Stellen, wie sie die eben betrachtete Function für $x = 1$ besitzt, auf dem Einheitskreise beliebig condensirt denken kann, so ist sogar die Möglichkeit vorhanden, dass eine im Einheitskreise convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ eine auf jedem Radius und längs der gesammten Peripherie endliche und stetige Randfunction $f(X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ besitzt, ohne dass $f(x)$ in der Umgebung irgend einer einzigen Stelle X stetig ist oder auch nur endlich bleibt.

3. Die Uebereinstimmung von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourierschen Reihe für $f(X)$ hängt wesentlich und ausschliesslich davon ab, dass die Gleichung:

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_\varrho)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt \quad (|x| < \varrho), \tag{3}$$

wo C_ϱ einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis mit dem Radius ϱ bedeutet, noch richtig bleibt, wenn man diesen Integrations-Kreis durch den Einheitskreis C_1 ersetzt. Hierzu wäre offenbar hinreichend, dass $f(X)$ für jede einzelne Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt und $f(\varrho X)$ bei $\lim \varrho = 1$ durchweg gleichmässig gegen den betreffenden Werth $f(X)$ convergirt. Kann nun aber auch schon das Vorhandensein einer einzigen Stelle X', für welche die eben genannte Bedingung nicht erfüllt, die Existenz der Gleichung (3) für $\varrho = 1$ hinfällig machen, selbst wenn $f(X')$, wie in dem Beispiele von Nr. 2, einen bestimmten, den benachbarten Randwerthen stetig sich anschliessenden Werth besitzt, so ist andererseits jene Bedingung doch sehr weit davon entfernt, eine nothwendige zu sein, da sogar dann, wenn sie für unendlich viele Stellen X' nicht erfüllt ist, noch die Möglichkeit besteht, in der Gleichung (3) C_ϱ durch C_1 zu ersetzen. Diese Möglichkeit beruht nämlich (abgesehen von gewissen, sogleich anzugebenden Einschränkungen) nicht sowohl auf der Anzahl der etwaigen Ausnahmestellen X', als vielmehr auf dem besonderen Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung jener

Stellen X'. In dieser Hinsicht sind folgende zwei Eventualitäten vorhanden:

(I) $|f(x)|$ bleibt in der Umgebung von X' durchweg unter einer endlichen Grenze. Wie ich in der oben citirten Abhandlung gezeigt habe,[1] wird durch das Auftreten einer solchen Stelle die Möglichkeit, in Gl. (3) den Integrationsweg C_ϱ durch C_1 zu ersetzen in keiner Weise alterirt (gleichgültig, ob $f(X')$ selbst einen bestimmten Werth besitzt oder nicht). Das gleiche gilt dann auf Grund bekannter Methoden der Integral-Theorie auch dann noch, wenn Stellen X' der bezeichneten Art, eine unausgedehnte Menge bilden.

(II) $|f(x)|$ nimmt in der Umgebung von X' beliebig grosse Werthe an (wobei es wiederum gleichgültig ist, ob $f(X')$ einen endlichen oder unendlich grossen Werth besitzt oder überhaupt nicht definirt ist). Auch in diesem Falle bleibt Gl. (3) noch für den Integrationsweg C_1 gültig, wenn $f(x)$ bis an die Stelle X' absolut integrabel ist, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. wenn das Integral $\int_{x_0}^{X'} |f(x)| \cdot dx$ für jeden solchen Weg gleichzeitig mit der Länge dieses Weges beliebig klein wird. Dieses zunächst für den Fall einer solchen Stelle geltende Resultat bleibt dann wiederum noch bestehen, wenn Stellen X' der bezeichneten Art eine reductible Menge bilden.[2]

Wenn nun $f(\varrho X)$ im allgemeinen, d. h. höchstens mit den soeben sub (I) und (II) als zulässig statuirten Ausnahmen, für $\lim \varrho = 1$ gleichmässig gegen die endlichen Randwerthe $f(X)$ convergirt, so wollen wir den hierdurch definirten Charakter von $f(x)$ durch den Ausdruck bezeichnen: Es sei $f(x)$ und $|f(x)|$ in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel. In diesem Falle darf man dann die Gleichung (3) auch durch die folgende ersetzen:

---

[1] a. a. O. p. 346.

[2] Vgl. Harnack, Math. Ann. Bd. 24 (1884), p. 224.

$$(4)\quad \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_1)} \frac{f(t)}{t-x}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\vartheta i}}{e^{\vartheta i}-x}\cdot d\vartheta \quad (|x|<1),$$

woraus dann weiter folgt, dass:

$$(5)\quad a_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{-\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta.$$

Da andererseits zunächst:

$\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0$ für jedes $\varrho < 1$ und $\nu = 1, 2, 3, \ldots,$

und in Folge der vorausgesetzten gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ und $|f(x)|$ auch:

$$\int_{(C_1)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \lim_{\varrho=1}\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0,$$

also:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta,$$

so folgt, wenn man diese letzte Gleichung einmal zu Gl. (5) addirt, das andere Mal davon subtrahirt:

$$(6)\quad a_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot \cos\nu\vartheta\cdot d\vartheta \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot \sin\nu\vartheta\cdot d\vartheta, \end{cases}$$

d. h. die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\cdot e^{\nu\vartheta i}$ ist mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch.

4. Mit Hülfe dieses Ergebnisses und der Zerlegung:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu e^{\nu\vartheta i} = \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu + \beta_\nu i)(\cos\nu\vartheta + i\cdot\sin\nu\vartheta)$$

$$= \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu\cos\nu\vartheta - \beta_\nu\sin\nu\vartheta) + i\sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu\cos\nu\vartheta + a_\nu\sin\nu\vartheta)$$

könnte man aus einem von Harnack[1]) bewiesenen Satze erschliessen, dass die Reihe $\sum(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2)$, also: $\sum |a_\nu|^2$ convergirt, sobald zu den bereits gemachten Voraussetzungen noch die weitere hinzukommt, dass auch $|f(e^{\vartheta i})|^2$, d. h. $|f(X)|^2$ längs des Einheitskreises, integrabel ist.

Man kann indessen dieses Resultat mit den hier zu Gebote stehenden Hülfsmitteln in etwas einfacherer Weise ableiten, wenn man statt der gleichmässigen Integrabilität von $|f(x)|$ von vornherein diejenige von $|f(x)|^2$ voraussetzt.

Man hat für $\varrho < 1$:

$$(7) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu \cdot e^{\nu \vartheta i} = f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}),$$

und wenn

$$\sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu i) \cdot x^\nu = \overline{f(x)} \qquad (|x| < 1)$$

gesetzt wird:

$$(8) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu \cdot e^{-\nu \vartheta i} = \overline{f(\varrho \cdot e^{-\vartheta i})}.$$

Berücksichtigt man, dass:

$$f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) \cdot \overline{f(\varrho \cdot e^{-\vartheta i})} = |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2,$$

so ergiebt sich durch Multiplication der Gleichungen (7) und (8):

$$(9) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) \cdot \varrho^{2\nu} + \sum_1^\infty {}^\nu \sum_1^\infty {}'^\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i)(\alpha_\nu - \beta_\nu i) \varrho^{\mu+\nu} \cdot e^{(\mu-\nu)\cdot \vartheta i}$$
$$= |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2,$$

wobei der Accent bei dem Doppelsummen-Zeichen ausdrücken soll, dass die Combination $\mu = \nu$ wegzulassen ist. Da nun:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(\mu-\nu)\cdot \vartheta i} \cdot d\vartheta = 0 \qquad \left(\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots \mu \gtrless \nu\right),$$

so folgt aus (9) durch Multiplication mit $d\vartheta$ und Integration in den Grenzen $-\pi$ bis $+\pi$:

---

[1]) Math. Ann. Bd. 19 (1882), p. 255. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, Bd. II, 1 (1885), p. 346.

$$(10) \qquad 2\pi \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \, |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta.$$

Da ferner, in Folge der vorausgesetzten gleichmässigen Integrabilität von $|f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|$:

$$\lim_{\varrho=1} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta,$$

so findet man zunächst:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu \, |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta$$

und, da die betreffende Reihe ausschliesslich positive Glieder enthält, mit Rücksicht auf Nr. 3 des § 1, schliesslich:

$$(11) \qquad \sum_1^\infty{}^\nu \, |a_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta,$$

sodass also $\sum |a_\nu|^2$ als convergent erkannt wird.

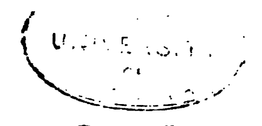
Es besteht somit der folgende Satz:

> Ist die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ zugehörige Function $f(x)$ nebst dem Quadrate ihres absoluten Betrages *in* und *auf* dem Convergenzkreise $|x| = 1$ gleichmässig integrabel,[1]) so convergirt die Reihe $\sum |a_\nu|^2$.

5. Um aus diesem Resultate weitere Schlüsse zu ziehen, formuliren wir zunächst den folgenden Hülfssatz:

---

[1]) Setzt man voraus, dass $|f(x)|$ für $|x| < 1$ durchweg unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus der gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ schon eo ipso diejenige von $|f(x)|$ und $|f(x)|^2$. In diesem Falle kann man auch statt der Integrale die von mir zur Darstellung der Mac Laurin'schen Reihen-Coefficienten angewendeten Mittelwerthe (vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 92; Math. Ann. Bd. 47 (1896), p. 137) einführen und das betreffende Resultat, mit Beibehaltung der im Texte benützten Schlussweise, lediglich mit den Hülfs-Mitteln der elementaren Functionen-Theorie ableiten.



Ist $\sum |a_\nu|^2$ convergent und bedeutet $\sum C_\nu^{-1}$ irgend eine convergente Reihe mit positiven Termen, so convergirt auch die Reihe $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$.[1])

Derselbe ist lediglich eine besondere Form des auf der bekannten Ungleichung:

$$\sqrt{p_\nu \cdot q_\nu} \leqq \tfrac{1}{2}(p_\nu + q_\nu) \quad (p_\nu > 0,\ q_\nu > 0)$$

beruhenden, schon bei anderer Gelegenheit[2]) von mir benützten Satzes, dass aus der Convergenz der beiden Reihen $\sum p_\nu$, $\sum q_\nu$ stets diejenige von $\sum \sqrt{p_\nu \cdot q_\nu}$ resultirt.

Aus dem obigen Hülfssatze folgt dann, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ gemachten Voraussetzungen jede Reihe von der Form $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$, z. B. $\sum \frac{|a_\nu|}{\nu^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$, $\sum \frac{|a_\nu|}{\sqrt{\nu} \cdot \lg \nu}$ etc. convergiren muss.

Angenommen nun, es gehöre zu der Potenzreihe:

$$(12) \qquad \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty {}^\nu\, \nu\, a_\nu \cdot x^{\nu-1}$$

eine Function $f_1(x)$, welche, ebenso wie $|f_1(x)|^2$, in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel ist, so ergiebt sich aus dem Satze der vorigen Nummer zunächst die Convergenz von $\sum \nu^2 \cdot |a_\nu|^2$ und somit auf Grund des obigen Hülfssatzes diejenige jeder Reihe von der Form $\sum C_\nu^{\frac{1}{2}} \cdot \nu \cdot |a_\nu|$,

z. B. $$\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot |a_\nu|, \quad \sum \frac{\sqrt{\nu}}{\lg \nu} \cdot |a_\nu|.$$

Daraus folgt dann a fortiori, dass $\sum |a_\nu|$ convergirt und somit $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem ganzen Einheitskreise absolut convergent ist.

---

[1]) Unrichtig wäre es, mit Harnack (Math. Ann. a. a. O.) aus der Convergenz von $\sum |a_\nu|^2$ auf das Verschwinden von $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot |a_\nu|^2$ schliessen zu wollen (vgl. meine Bemerkungen Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 343 ff.).

[2]) Sitz.-Ber. Bd. 29 (1899), p. 263.

Die der Function $f_1(x)$ auferlegten Bedingungen sind aber sicher erfüllt, wenn die zu $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine Derivirte $f'(x)$ besitzt, welche in der Umgebung[1]) der Peripherie-Stellen X im allgemeinen[2]) stetig ist und deren Quadrat höchstens für eine reductible Menge von Stellen X' von der Ordnung $1 - \varepsilon$ oder doch von einer „hinlänglich"[3]) niedrigeren, als der ersten

$$\left(\text{z. B. wie } \frac{1}{x}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-(1+\varepsilon)} \text{ etc. bei } x = 0\right)$$

unendlich wird. Denn für $|x| < 1$ hat man ohne weiteres $f_1(x) = f'(x)$ und sodann auf Grund der in Nr. 1 getroffenen Festsetzungen: $f_1(X) = \lim_{\varrho=1} f'(\varrho X) = f'(X)$. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

> Besitzt die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine in der Umgebung der Convergenzkreis-Stellen noch im allgemeinen stetige Derivirte, deren *Quadrat* höchstens für eine reductible Menge solcher Stellen von hinlänglich niedrigerer Ordnung als der *ersten* unendlich wird, so ist $\sum a_\nu x^\nu$ noch auf dem Convergenzkreise *absolut convergent.*

6. Dieses Kriterium ist von erheblich grösserer Tragweite, als das bekannte, auf einer gelegentlichen Bemerkung des Herrn Lipschitz[4]) beruhende, welches die ausnahmslose Stetigkeit der ersten und ausserdem noch die eindeutige Existenz und Endlichkeit der zweiten Derivirten fordert.

---

[1]) Diese Bezeichnung ist wiederum nur in dem am Schlusse von Nr. 1 definirten Umfange zu verstehen.

[2]) D. h. mit eventueller Ausnahme einer unausgedehnten Menge, für welche $f'(X)$ endlich-unstetig wird, bezw. nicht existirt, aber in der Umgebung endlich bleibt.

[3]) D. h. in der Weise, dass $|f'(x)|^2$ integrabel bleibt.

[4]) Lehrbuch der Analysis, Bd. II, p. 492. Vgl. auch Math. Ann. Bd. 26 (1886), p. 425.

Die Convergenz-Theorie der Fourier'schen Reihen würde auf Grund der über $f'(x)$ gemachten Voraussetzungen nur den Schluss gestatten,[1] dass $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise noch ausnahmslos convergirt.[2] Daraus folgt aber noch keineswegs die absolute Convergenz dieser Reihe, wie im folgenden Paragraphen noch des näheren erörtert wird.

Das nämliche Resultat würde sich auch aus dem Satze am Schlusse von § 1 (p. 54) ergeben, wenn man berücksichtigt, dass aus der Integral-Darstellung der a_ν (Gl. (6)) durch partielle Integration (welche wegen der über $f'(x)$ gemachten Voraussetzungen gestattet ist) sich ergiebt:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu \pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(e^{\vartheta i}) \cdot \sin \nu \vartheta \cdot d\vartheta$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0. -$$

Einen Schluss auf die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ gestattet dagegen ein von Heine[3] mitgetheilter Satz über die Art des Verschwindens der Fourier'schen Reihen-Coefficienten bei unendlich wachsendem Index. Darnach würde aus der Voraussetzung, dass $f'(e^{\vartheta i})$ nur von niedrigerer Ordnung als der $\frac{1}{2}$-ten unendlich werden darf, folgen, dass $\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{3}{2}} \cdot a_\nu = 0$, woraus dann ohne weiteres die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ hervorgeht. Der betreffende Satz gilt indessen nur für den Fall, dass $f'(e^{\vartheta i})$ der Dirichlet'schen Bedingung genügt. Zwar behauptet Heine ausdrücklich seine Gültig-

---

1) S. z. B. Serret-Harnack a. a. O., p. 353. Um das betreffende Resultat anzuwenden, hat man nur zu beachten, dass aus:

$$f(e^{\vartheta i}) = F(\vartheta)$$

sich ergiebt:

$$F'(\vartheta) = i \cdot e^{\vartheta i} \cdot f'(e^{\vartheta i}).$$

2) Dabei bliebe übrigens Schlussweise und Resultat noch gültig, wenn $f'(x)$ selbst (nicht erst $f'(x)^2$) in der angegebenen Art unendlich wird.

3) Handbuch der Kugelfunctionen, Zweite Auflage, Bd. I, p. 63.

keit auch für den Fall, dass die Function an einzelnen Stellen, wo sie nicht unendlich wird, unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Sein Beweis aber, wenn ich ihn anders richtig verstehe, scheint mir diesen Fall nicht zu umfassen, und ich möchte sogar den Satz selbst alsdann für unrichtig halten. Gerade durch das Auftreten unendlich vieler Maxima und Minima wird die Regelmässigkeit in der Abnahme der Reihencoefficienten im allgemeinen zerstört, und es tritt eben an die Stelle der Beziehung $\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{2}} \cdot a_\nu = 0$ lediglich die Convergenz der Reihe $\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot |a_\nu|$ (welche unmittelbar aus der Existenz jener Beziehung folgen würde, aber nicht umgekehrt).

Da alle Schwierigkeiten und Ausnahmefälle in der Theorie der Fourier'schen Reihen von dem eventuellen Vorkommen unendlich vieler Maxima und Minima herrühren, so scheint mir ein wesentlicher Vorzug des oben gegebenen Kriteriums gerade darin zu liegen, dass es in dieser Hinsicht nicht die geringste Einschränkung verlangt.

7. Im übrigen sind die in jenem Satze, bezüglich der Existenz und des Verhaltens von $f'(x)$ für die Stellen X, eingeführten Voraussetzungen sehr weit davon entfernt, für die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ nothwendige zu sein. Dies geht schon daraus hervor, dass dieselben ja nicht nur die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$, sondern sogar diejenige von $\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot a_\nu X^\nu$ nach sich ziehen. Man könnte darnach eine schärfere Form des fraglichen Kriteriums etwa dadurch erzielen, dass man statt der ersten Derivirten eine solche mit ächt gebrochenem Index[1]) in Betracht zieht: für seine praktische Anwendbarkeit würde indessen auf diese Weise kaum etwas gewonnen werden.

Andererseits lehrt ein Blick auf die bekannte Weierstrass'sche Function $\sum a_\nu \cdot x^{b^\nu}$ ($a < 1$, b eine ungerade ganze

[1]) Riemann, Ges. Werke, XIX, p. 332. — Hadamard, Journ. de Math. 4ième Série, T. 8 (1892), p. 154.

Zahl, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$), dass es Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise absolut convergiren, ohne für irgend eine Stelle desselben eine bestimmte Derivirte zu besitzen. Die Natur dieses Beispiels lässt zugleich deutlich erkennen, dass die Existenz eines im allgemeinen endlichen $f'(X)$ durch die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ in keiner Weise präjudicirt wird (ähnlich, wie etwa die Convergenz oder Divergenz von $\sum a_\nu$ über die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ nicht das geringste aussagt). Bedeutet nämlich a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) irgend eine Folge reeller oder complexer Zahlen von der Beschaffenheit, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1$, so besitzt nicht nur die Potenzreihe: $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu X^\nu$, sondern auch jede aus ihr herausgehobene Potenzreihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ den Convergenzradius 1. Die zu $\mathfrak{P}(x)$ gehörige Function $f(x)$ kann dann auf dem Convergenzkreise das denkbar einfachste Verhalten zeigen, nämlich für alle Stellen mit Ausnahme einer einzigen noch regulär sein, gleichgültig ob $\sum |a_\nu|$ convergirt oder divergirt. Andererseits lässt sich die Folge der natürlichen Zahlen m_ν allemal (auf unendlich viele Arten) so auswählen, dass $\sum |a_{m_\nu}|$ (also $\sum a_{m_\nu} X^{m_\nu}$ absolut) convergirt und zugleich der Convergenzkreis eine singuläre Linie für $\sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ bildet: bei passender Annahme der a_ν und m_ν kann man insbesondere erzielen, dass die zu $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ gehörige Function $\overline{f(x)}$ für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen X kein endliches $\overline{f'(x)}$ besitzt. Mit anderen Worten: Gerade derjenige Process, welcher hier die absolute Convergenz der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ auf dem Convergenzkreise zur Folge hat, nämlich das Herausheben der Theilreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ aus der Reihe $\mathfrak{P}(x)$, zerstört in diesem Falle die Existenz einer im allgemeinen endlichen und stetigen Derivirten. Beispiel: Man setze $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $m_\nu = 2^\nu$. Die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu} \cdot x^\nu$$

convergirt für $|x| = 1$ nur noch bedingt, ausser für die Stelle $x = 1$, wo sie eigentlich divergirt; für alle übrigen Stellen verhält sich die zugehörige Function regulär, besitzt also endliche Derivirte jeder Ordnung.

Andererseits convergirt die Reihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{2^\nu} \cdot x^{2^\nu}$ auf dem Convergenzkreise noch absolut, die zugehörige Function besitzt aber für alle Stellen $X = e^{(\frac{1}{2})^n \cdot m\pi i}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ keine endliche Derivirte, da die Reihe $\overline{\mathfrak{P}'(x)} = \frac{1}{x} \cdot \sum_0^\infty {}^\nu x^{2^\nu}$ daselbst eigentlich divergirt und somit

$$\overline{f'(X)} = \lim_{\varrho=1} \overline{\mathfrak{P}'(\varrho X)} = \infty$$

wird (nach § 1, Nr. 2).

---

§ 3. Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und dennoch nicht absolut convergiren.

1. Ich habe bei früherer Gelegenheit[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass zwar alle bekannteren Potenzreihen, die auf dem Convergenzkreise noch bedingt convergiren, daselbst mindestens eine Divergenzstelle besitzen, dass es nichts destoweniger Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise ebenfalls nur bedingt, aber ausnahmslos convergiren. Nachdem ich a. a. O. einen allgemeinen Typus von Reihencoefficienten a_ν mitgetheilt, für welche $\sum a_\nu x^\nu$ die fragliche Eigenschaft besitzt, habe ich daran die Frage geknüpft, ob sich nicht auch im Einheitskreise analytische, durch geeignete Singularitäten auf der Peripherie charakterisirte Functionen angeben lassen, deren Mac Laurin'sche Entwickelung

[1]) Math. Ann. Bd. 25 (1885), p. 419.

auf der Peripherie ausnahmslos und doch nur bedingt convergirt. Diese Frage kann auf Grund derjenigen allgemeinen Betrachtungen, welche ich in einer anderen, oben bereits citirten Arbeit[1]) angestellt habe, und durch Angabe sehr einfacher Beispiele in bejahendem Sinne entschieden werden. Man setze etwa:

$$f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}, \tag{1}$$

sodass also:[2])

$$(2) \quad \begin{aligned} & f(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu\,, \\ & \text{wo: } a_0 = 1 \text{ und für } \nu > 1 : a_\nu = \sum_0^\nu{}^{\varkappa} \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} (\nu-1)_{\varkappa-1}. \end{aligned}$$

Die Function ist auf der gesammten Peripherie des Einheitskreises noch regulären Verhaltens mit Ausnahme der Stelle $x = 1$. Hier wird:

$$f(1) = \lim_{x=1} f(x) = 0, \tag{3}$$

und zwar allemal, wenn x auf einen beliebigen Strahl aus dem Innern der Stelle 1 zustrebt. Andererseits hat man:

$$f(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\tfrac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) \right\} \quad (\vartheta \lessgtr 0), \tag{4}$$

sodass also $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = 0$ mit unendlich vielen Oscillationen endlich-unstetig wird. Die Fourier'sche Reihe für $f(e^{\vartheta i})$, welche in Folge der Bedingung (3) und des im übrigen durchweg regulären Verhaltens von $f(x)$, mit der Reihe $\sum a_\nu e^{\nu\vartheta i}$ zusammenfällt, ist alsdann für $-\pi \leqq \vartheta < \pi$ ausnahmslos[3])

---

1) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346.

2) A. a. O. p. 355.

3) Vermöge eines sinnentstellenden Druckfehlers heisst es a. a. O., dass die fragliche Reihe für $\vartheta = 0$, also für $x = 1$, divergirt. Dass es sich hierbei wirklich nur um einen Druckfehler handelt, geht daraus hervor, dass ich an anderer Stelle (Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54, Fuss-

convergent. Sie kann indessen keinesfalls absolut convergiren, weil in diesem Falle die dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ ausnahmslos stetig sein müsste. Somit ist die Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise zwar ausnahmslos, jedoch lediglich bedingt convergent. Für $x = 1$ ergiebt sich dabei insbesondere, auf Grund der Beziehung (3) und des Abelschen Satzes:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = 0. \quad (5)$$ [1]

Dieses Beispiel lässt zugleich deutlich erkennen, durch welche Art von Singularitäten $X' = e^{\vartheta' i}$ die fragliche Convergenz-Erscheinung hervorgebracht wird: es muss $\lim_{x=X'} f(x)$ einen eindeutig bestimmten Werth besitzen, wenn x auf einem beliebigen Strahle von innen her der Stelle X' zustrebt; andererseits muss $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = \vartheta'$ eine Unstetigkeit erleiden, welche immerhin noch die Convergenz der betreffenden Fourier'schen Reihe für $\vartheta = \vartheta'$ bestehen lässt, die aber dann eo ipso deren absolute Convergenz definitiv ausschliesst.[2]

---

note) ausdrücklich die Convergenz dieser Reihe (bezw. der damit gleichartigen:

$$e^{-\frac{1}{x}} = \sum c_\nu (x-1)^\nu \quad \text{für } x = 0)$$

hervorgehoben habe. Die Convergenz für $\vartheta = 0$ folgt im übrigen aus den von Du Bois Reymond angestellten Untersuchungen über Fourier'sche Reihen (Abh. der Bayer. Akad. II. Cl. Bd. XII², p. 37. 44), etwas einfacher aus § 4, Nr. 4 dieses Aufsatzes. — Wie ich inzwischen bemerkt habe, hat Herr Saalschütz die Coefficienten der Reihe: $e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e}\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ zum Gegenstande einer sehr ausführlichen Untersuchung gemacht (Archiv der Math. und Phys. (2), Bd. 6 (1888), p. 305—350) und hierbei auch einen (mir freilich nicht ganz einwurfsfrei erscheinenden), auf asymptotischer Integration einer für die Coefficienten a_ν bestehenden Recursionsformel beruhenden Beweis für die Convergenz von $\sum a_\nu$ mitgetheilt.

[1]) Uebereinstimmend mit dem von Herrn Saalschütz (a.a.O. p. 334) durch asymptotische Betrachtungen berechneten Resultate.

[2]) Vgl. auch § 4, Nr. 6.

2. Die von mir früher mitgetheilten, am Anfange dieses Paragraphen erwähnten Potenzreihen (mit ausnahmslos bedingter Convergenz für $|x| = 1$) sind von der Form:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \tag{6}$$

wo ε_ν in bestimmter Abwechselung die Werthe ± 1 besitzt, während die M_ν eine monoton in's Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen vorstellen, von der Beschaffenheit, dass zwar:

$$M_\nu > \nu \tag{7}$$

ist, dagegen $\sum \frac{1}{M_\nu}$ divergirt $\left(\text{z. B. } M_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}\right)$. Ich will nun zeigen, dass man, bei etwas anders gewählter Anordnung jener Glieder-Vorzeichen ε_ν, Reihen von analogem Verhalten gewinnen kann, bei welchen die monotone Zunahme der M_ν nur in dem Maasse erforderlich ist, dass $\sum \frac{1}{M_\nu^2}$ convergirt, sodass also im wesentlichen[1]) nur

$$M_\nu > \sqrt{\nu}$$

zu sein braucht. Abgesehen davon, dass die in diesem Falle zulässige Wahl $M_\nu = \nu$ ein besonders einfaches Beispiel einer Reihe von der fraglichen Beschaffenheit giebt, so scheint mir das betreffende Resultat aus dem Grunde besonders lehrreich, weil es eine bemerkenswerthe Ergänzung zu dem Satze in Nr. 4 des vorigen Paragraphen liefern wird.

Ich setze, wie in Gl. (6):

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \quad \text{wo: } \varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}, \tag{8}$$

---

[1]) Genauer gesagt:

$$M_\nu \gtrsim \sqrt{\nu} \cdot m_\nu,$$

wo m_ν nur so in's Unendliche zu wachsen braucht, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ convergirt (cf. Gl. (20)).

(dabei soll $[\sqrt{\nu}]$ die grösste in $\sqrt{\nu}$ enthaltene ganze Zahl bedeuten), und will darauf ausgehen, die schwächste monotone Zunahme der M_ν zu bestimmen, bei welcher die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| = 1$ noch ausnahmslos convergirt.

Damit dies zunächst an der Stelle $x = 1$ stattfinde, also $\sum a_\nu$ convergire, ist nach p. 46, Gl. (19) jedenfalls nothwendig, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{M_1 a_1 + M_2 a_2 + \ldots + M_n a_n}{M_n} = 0$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{M_n} = 0, \text{ wo: } \sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n. \tag{9}$$

Die aus bestimmten Gruppen positiver und negativer Einheiten bestehende Summe σ_n nimmt bei successive wachsendem n unter anderen Werthen eine Reihe von Minimal- bezw. Maximal-Werthen an, welche allemal dann auftreten, wenn ε_n das Schlussglied einer Gruppe negativer bezw. positiver Einheiten bildet. Da $\varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}$ und $[\sqrt{\nu}]$ jedesmal um 1 zunimmt, wenn ν gerade eine Quadratzahl m^2 erreicht, wobei dann also ε_ν das Vorzeichen wechselt, so sind jene Minimal- und Maximalwerthe von σ_n charakterisirt durch die Bedingung $n = m^2 - 1$; und zwar ist das betreffende Schlussglied ε_n ein negatives bezw. positives, der entsprechende Werth von σ_n also ein Minimum bezw. Maximum, je nachdem n gerade oder ungerade. Man hat nun für $n = (2\mu + 1)^2 - 1 = 4\mu^2 + 4\mu$:

$$\sigma_{4\mu^2+4\mu} = \sum_1^3{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_4^8{}^\nu |\varepsilon_\nu| + \sum_9^{15}{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_{16}^{24}{}^\nu |\varepsilon_\nu| + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{(2\mu-1)^2}^{(2\mu)^2-1}{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_{(2\mu)^2}^{(2\mu+1)^2-1}{}^\nu |\varepsilon_\nu|$$

$$= (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu - 1) - (4\mu + 1)$$

$$= -.2\mu, \tag{10}$$

und für $n = (2\mu)^2 - 1 = 4\mu^2 - 1$:

$$\sigma_{4\mu^2-1} = (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu - 1)$$

$$= 2\mu + 1. \tag{11}$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass:

$$(12) \qquad \lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2+4\mu}}{\sqrt{4\mu^2+4\mu}} = -1, \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2-1}}{\sqrt{4\mu^2-1}},$$

und da die Folge der $\sigma_{4\mu^2+4\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ offenbar den unteren, die Folge der $\sigma_{4\mu^2-1}$ den oberen Limes von σ_n definirt, schliesslich:

$$(13) \qquad \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = -1, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = +1.$$

Daraus folgt aber, dass die nothwendige Bedingung (9) für die Convergenz von $\sum a_\nu$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn:

$$(14) \qquad M_\nu \succ \sqrt{\nu},$$

sodass man also setzen kann:

$$(15) \qquad M_\nu = \sqrt{\nu} \cdot m_\nu, \text{ wo: } \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty.$$

Man hat nun mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu = \sum_1^n{}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} = \sum_1^{n-1}{}^\nu \sigma_\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}}\right) + \frac{\sigma_n}{M_n}$$

$$= \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{\sigma_\nu}{M_\nu} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + \frac{\sigma_n}{M_n},$$

und daher, mit Berücksichtigung von Gl. (15) und (13):

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} \cdot \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}.$$

Daraus folgt, dass $\sum a_\nu$ gleichzeitig mit der rechts stehenden Reihe, also wegen: $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} = 1$, gleichzeitig mit der Reihe

$$\sum \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}$$

convergirt.

Man hat nun:

$$\frac{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}-\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}=\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\vartheta_\nu}{2\nu}\right)\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\vartheta'_\nu\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}\qquad \left(\text{wo: } \lim_{\nu=\infty}\vartheta_\nu=1,\ \lim_{\nu=\infty}\vartheta'_\nu=1\right)$$

$$(16)\qquad =\frac{1}{\vartheta'_\nu}\cdot\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}+\frac{\vartheta_\nu}{2\vartheta'_\nu}\cdot\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}.$$

Da $\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$ das allgemeine Glied einer convergenten Reihe bildet, sofern nur überhaupt m_ν mit ν monoton (wenn auch beliebig langsam) in's Unendliche wächst,[1]) so wird die fragliche Reihe dann und nur dann convergiren, wenn $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt. Darnach ergiebt sich also zunächst:

Für die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$, wo: $a_\nu=(-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ ist *nothwendig*, dass $\lim_{\nu=\infty} m_\nu=\infty$, *hinreichend*, dass die m_ν monoton zunehmen und $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt.

3. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass alsdann gleichzeitig mit $\sum a_\nu$ auch $\sum a_\nu X^\nu$ für jedes von 1 verschiedene X mit dem absoluten Betrage $|X|=1$ convergirt. Man hat nämlich:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})(X+X^2+\ldots+X^\nu)+a_n(X+X^2+\ldots+X^n),$$

also für jedes von 1 verschiedene X:

$$(17)\quad \sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\frac{X}{1-X}\cdot\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})\cdot(1-X^\nu)+a_n\cdot\frac{X(1-X^n)}{1-X}$$

[1]) Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 327.

und, wegen $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n=\infty}} |1 - X^n| \leqq 2$:

$$(18) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu = \frac{X}{1-X} \sum_1^\infty {}^\nu (a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot (1 - X^\nu).$$

Da für (jedes X und ν): $|1 - X^\nu| \leqq 2$, so convergirt die rechts stehende Reihe sicher, wenn $\sum |a_\nu - a_{\nu+1}|$ convergent ist. Da je zwei auf einander folgende Terme a_ν, $a_{\nu+1}$ gleiches Vorzeichen haben, ausser wenn:

$$\nu = (\lambda + 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda + 2), \quad \nu + 1 = (\lambda + 1)^2 \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so findet man:

$$\sum_1^\infty {}^\nu |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty {}^{\nu\,\prime} \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}}\right) + \sum_1^\infty {}^\lambda \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} + \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}}\right),$$

wo der Accent an dem ersten Summenzeichen der rechten Seite andeuten soll, dass die Werthe: $\nu = \lambda(\lambda + 2)$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ auszuschliessen sind: an die Stelle der betreffenden Glieder treten die in der zweiten Summe vereinigten. Setzt man diese letztere in die Form:

$$\sum_1^\infty {}^\lambda \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} - \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}}\right) + 2 \sum_1^\infty {}^\lambda \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

und fügt die Glieder der ersten Summe noch zu denjenigen der Summe $\sum'$, so wird:

$$(19) \quad \sum_1^\infty {}^\nu |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty {}^\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}}\right) + 2 \sum_1^\infty {}^\lambda \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

sodass sich unmittelbar die Convergenz von $\sum |a_\nu - a_{\nu+1}|$ ergiebt, wenn man noch beachtet, dass nach Gl. (15):

$$M_{(\lambda+1)^2} = (\lambda + 1) \cdot m_{(\lambda+1)^2}$$

und sodann, wegen $m_{(\lambda+1)^2} > m_{\lambda+1}$:

$$M_{(\lambda+1)^2} > (\lambda + 1) \cdot m_{\lambda+1} > \lambda \cdot m_\lambda,$$

also $\sum \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} < \sum \frac{1}{\lambda \cdot m_\lambda}$ d. h. convergent ist.

Man findet somit schliesslich:

Die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu$, wo: $a_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu}$ ist für $|X| = 1$ ausnahmslos convergent, wenn die m_ν monoton in dem Maasse zunehmen, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ *convergirt.* Sie convergirt also nur *bedingt*, wenn andererseits die m_ν so angenommen werden, dass $\sum \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu}$ *divergirt.* Man setze z. B.:

$$(20) \quad m_\nu = (\sqrt{\nu})^\varepsilon,\ m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon},\ m_\nu = \lg \nu \cdot (\lg_2 \nu)^{1+\varepsilon}, \text{ etc. } (\varepsilon > 0).$$ [1]

4. Da mit der Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ a fortiori auch $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu^2}$ convergirt und $|a_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu}$, so folgt zunächst, dass bei den Reihen $\sum a_\nu x^\nu$ der betrachteten Art stets $\sum |a_\nu|^2$ convergent ist. Andererseits können aber die m_ν so langsam zunehmen (z. B. $m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon}$), dass keine niedrigere Potenz, als das Quadrat der $|a_\nu|$ eine convergente Reihe liefert. Mithin erhält man das folgende Resultat:

---

[1]) Ein besonders einfaches, für Vorlesungszwecke geeignetes Beispiel resultirt, wie bereits oben bemerkt wurde, für:

$$m_\nu = \sqrt{\nu}, \quad \text{also: } M_\nu = \nu.$$

Die Gleichung (19) nimmt in diesem Falle die Form an:

$$\sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} + 2\sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(\lambda+1)^2},$$

welche ohne weiteres die Convergenz der betreffenden Reihe erkennen lässt. Andererseits ergiebt sich die Convergenz von $\sum a_\nu$ hier unmittelbar aus der (durch einfache Rechnung leicht zu verificirenden) Bemerkung, dass die positiven und negativen Glieder sich zu Gruppen alternirenden Vorzeichens vereinigen lassen, deren Zahlenwerthe monoton gegen Null abnehmen.

Es giebt Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ mit dem Convergenzradius 1, welche für $|x| = 1$ noch ausnahmslos *bedingt* convergiren, während $k = 2$ der *kleinste* Exponent ist, für welchen $\sum |a_\nu|^k$ (also $\sum a_\nu^k X^\nu$ *absolut*) convergirt.

Die zur Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ besitzt hier für jede einzelne Stelle X der Peripherie einen bestimmten endlichen Werth (nämlich den Werth $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu$). Da ferner die aus Gl. (17) durch Substitution von x für X resultirende Beziehung:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{x}{1-x} \sum_1^{n-1}{}^\nu (a_\nu - a_{\nu+1})(1 - x^\nu) + a_n x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}$$

erkennen lässt, dass die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gleichmässig convergirt im Innern und auf der Begrenzung desjenigen Bereiches, welcher entsteht, wenn man aus der Fläche des Einheitskreises eine beliebig kleine Umgebung der Stelle 1 ausscheidet, so folgt weiter, dass $f(x)$ nicht nur längs der gesammten Peripherie mit eventuellem Ausschlusse der Stelle 1, sondern in der Umgebung jeder von 1 verschiedenen Stelle X vollkommen stetig ist. In der Nähe der Stelle $x = 1$ kann dagegen $\sum a_\nu x^\nu$ (und speciell auch $\sum a_\nu X^\nu$) ungleichmässig convergiren (ich vermuthe, dass dies auch wirklich der Fall sein dürfte, obschon es mir andererseits bisher nicht gelungen ist, einen vollständigen Beweis dafür zu erbringen). In Folge dessen braucht auch $|f(x)|$, wiewohl für jede einzelne Stelle x (incl. X) einen bestimmten endlichen Werth besitzend, in der Umgebung der Stelle $x = 1$ nicht unter einer festen Grenze zu bleiben. Für das etwaige Anwachsen von $|f(x)|$ in der Nähe der Stelle 1 lässt sich leicht eine obere Grenze angeben. Da nämlich:

$$\left| \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \cdot (\varrho X)^\nu \right| \leq \sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu| \cdot \varrho^\nu \quad \text{d. h.} < \sum_1^\infty{}^\nu \frac{\varrho^\nu}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu} = F(\varrho),$$

so kann der Werth von $|f(x)|$ für $x = \varrho \cdot e^{\vartheta i}$ niemals denjenigen von $F(\varrho)$ übersteigen. Dabei wird $F(\varrho)$ für $\lim \varrho = 1$ schwächer unendlich als $(1 - \varrho)^{\frac{1}{2}}$, ja sogar um so viel schwächer, dass nicht nur $F(\varrho)$, sondern auch $F(\varrho)^2$ für $\varrho \leqq 1$ integrabel bleibt.[1]) Hieraus kann nun zwar die Integrabilität von $|f(x)|^2$ auf jedem in den Punkt 1 von Innen her einmündenden Strahle erschlossen werden: ob aber diese Eigenschaft auch längs der Peripherie erhalten bleibt, ist auf diesem Wege nicht ohne weiteres zu erkennen.[2]) Es kann dies indessen aus der hier a priori feststehenden (absoluten) Convergenz der Reihe $\sum a_\nu^2$ durch Umkehrung der in § 2, Nr. 4 benützten Schlussweise gefolgert werden.

Hiernach genügt also $f(x) = \sum_1^\infty {}^\nu\, a_\nu x^\nu$ den sämmtlichen für die Gültigkeit des Satzes § 2, Nr. 4 geforderten Bedingungen und sogar noch den weiteren, für jede Stelle X einen endlichen Werth zu besitzen und, mit eventueller Ausnahme der einzigen Stelle $X = 1$, auch vollkommen stetig zu bleiben. Trotzdem giebt es, bei geeigneter Auswahl von m_ν, keinen Exponenten $k < 2$, derart dass $\sum |a_\nu|^k$ convergirt. Man kann darnach sagen, dass der fragliche Satz das äusserste leistet, was aus den ihm zu Grunde liegenden Voraussetzungen gefolgert werden kann.

---

[1]) Die Richtigkeit der ersten Behauptung folgt unmittelbar aus p. 49, Fussnote; die der zweiten aus einem ähnlichen, den Zusammenhang zwischen der Abnahme (bezw. Zunahme) der $|a_\nu|$ und dem Unendlichwerden von $\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty {}^\nu\, a_\nu \varrho_\nu$ noch genauer präcisirenden Satze, den ich bei späterer Gelegenheit mittheilen werde.

[2]) Die gleichmässige Integrabilität von $f(x)$ selbst steht wegen der absoluten Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot a_\nu X^{\nu+1} = \int_0^X f(x)\, dx$ von vornherein ausser Frage.

§ 4. Zusammenhang zwischen dem reellen und imaginären Theile der Randfunction.

1. Man hat, mit Beibehaltung der bisher angewendeten Bezeichnungen:

$$(1) \qquad f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\,\varrho^\nu \cdot e^{\nu \vartheta i} \text{ für } \varrho < 1,$$

und daher, wenn:

$$(2) \qquad f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \varphi(\varrho, \vartheta) + i \cdot \psi(\varrho, \vartheta)$$

gesetzt wird:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu \cos \nu\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\vartheta) \cdot \varrho^\nu, \\ \psi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty {}^\nu (\beta_\nu \cos \nu\vartheta + \alpha_\nu \sin \nu\vartheta) \cdot \varrho^\nu, \end{aligned} \right. \qquad (\varrho < 1).$$

Für die Randwerthe $e^{\vartheta i}$ ergiebt sich sodann:

$$(4) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta),$$

wenn $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$ definirt werden durch die Beziehungen:

$$(5) \qquad \varphi(\vartheta) = \lim_{\varrho=1} \varphi(\varrho, \vartheta), \quad \psi(\vartheta) = \lim_{\varrho=1} \psi(\varrho, \vartheta).$$

Es werde nun angenommen, dass $f(x)$ diejenigen (in § 2, Nr. 3 näher erörterten) Integrabilitäts-Eigenschaften besitzt, welche das Zusammenfallen von $\sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot e^{\nu \vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ zur Folge haben. Alsdann wird nach Gl. (6), p. 60:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu + \beta_\nu i &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \cos \nu\eta \cdot d\eta \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \sin \nu\eta \cdot d\eta, \end{aligned}$$

also:

$$(6)\quad \begin{cases} a_\nu = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta\,, \\ \beta_\nu = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta\,, \end{cases}$$

und:

$$(7)\qquad \lim_{n=\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0.$$

Wenn die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend eine Stelle $x = e^{\vartheta i}$ convergirt, so müssen die beiden Reihen:

$$(8)\quad \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta), \quad \sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + a_\nu \sin\nu\vartheta)$$

gleichzeitig convergiren — vice versa; und man hat sodann nach dem Abel'schen Satze:[1])

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi(\vartheta) = \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_1^n{}^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta), \\ \psi(\vartheta) = \lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_1^n{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + a_\nu \sin\nu\vartheta). \end{cases}$$

Zur Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz dieser Reihen können dann zunächst die bekannten Kriterien aus der Theorie der Fourier'schen Reihen dienen, wobei also in der Reihe für $\varphi(\vartheta)$ die Coefficienten a_ν, β_ν als Functionen von $\varphi(\vartheta)$ erscheinen, und als Convergenz-Bedingungen gewisse Stetigkeits-Eigenschaften von $\varphi(\vartheta)$ resultiren (entsprechend sodann für $\psi(\vartheta)$). Da sich aber a_ν, β_ν nach Gl. (6) auch als Functionen von $\psi(\vartheta)$ darstellen lassen, so ergiebt sich hier auch noch die folgende, gänzlich ausserhalb der gewöhnlichen Theorie

---

[1]) Der Vollständigkeit halber bemerke ich, dass, wie ein Blick auf die Gleichungen (3) und (5) lehrt, das entsprechende Theilresultat auch erhalten bleibt, wenn nur eine der beiden fraglichen Reihen convergirt. Und man hat nach § 1, Nr. 2 auch: $\varphi(\vartheta) = \pm\infty$ bezw. $\psi(\vartheta) = \pm\infty$, wenn die betreffende Reihe eigentlich divergirt.

der Fourier'schen Reihen liegende Fragestellung: Welche Stetigkeits-Eigenschaften von $\psi(\vartheta)$ sind erforderlich oder hinreichend, damit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ bei einem bestimmten Werthe ϑ überhaupt convergire?[1]) Die hierauf zu erzielende Antwort gilt dann in Folge der zwischen $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität (s. Gl. (9) und (6)) mutatis mutandis auch bezüglich der Convergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$.[2])

2. Setzt man:

$$(10) \qquad \sum_1^n{}^{\nu} (a_\nu \cos \nu \vartheta - \beta_\nu \sin \nu \vartheta) = \varphi_n(\vartheta),$$

so handelt es sich also um die Untersuchung von $\lim_{n=\infty} \varphi_n(\vartheta)$ unter der Voraussetzung, dass für a_ν, β_ν der zweite der in Gl. (6) angegebenen Integral-Ausdrücke eingesetzt wird. Man erhält auf diese Weise zunächst:

$$(11) \qquad \varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sum_1^n{}^{\nu} \sin \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta,$$

und da:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \sin \nu \lambda = \frac{\cos \frac{1}{2}\lambda - \cos(n + \frac{1}{2})\lambda}{2 \sin \frac{1}{2}\lambda}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\cot\frac{\lambda}{2} - \cos n\lambda \cdot \cot\frac{\lambda}{2} + \sin n\lambda\right)$$

so wird:

$$(12) \quad 2\pi \cdot \varphi_n(\vartheta) = \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \cot\frac{\eta - \vartheta}{2} \cdot (1 - \cos n(\eta - \vartheta)) \cdot d\eta + \Delta_n,$$

wo:

---

[1]) Dass ihre Summe alsdann stets den Werth $\varphi(\vartheta)$ hat, folgt wieder unmittelbar aus dem Abel'schen Satze (s. auch die vorige Fussnote).

[2]) Eine ähnliche Untersuchung des Herrn Tauber (Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 2 (1891), p. 79–118) beruht theilweise auf anderen Voraussetzungen und verfolgt im wesentlichen andere Ziele.

$$(13)\quad \begin{cases} \Delta_n = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sin n(\eta - \vartheta) \\ \quad = \pi(\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) \end{cases}$$

also:

$$(14)\quad \lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = a$ substituirt:

$$(15)\quad J_n(\vartheta) = \int\limits_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n\,a) \cdot d\,a,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $a = a' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\int\limits_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n\,a) \cdot d\,a$$

$$= \int\limits_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta + a') \cdot \cot\frac{a'}{2} \cdot (1 - \cos n\,a') \cdot d\,a',$$

so folgt:

$$(16)\quad \begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n\,a) \cdot d\,a \\ &= \int\limits_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot d a. \end{aligned}$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl und zerlegt man $J_n(\vartheta)$ in die beiden Theil-Integrale:

$$(17.)\qquad J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta),$$

wo:

$$(18)\quad J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da,$$

$$(19)\quad J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da,$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon \leqq a \leqq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

$$(20)\qquad \lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

$$(21)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos na \cdot da = 0$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim\limits_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(13)\quad \begin{cases} \Delta_n = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sin n(\eta - \vartheta) \\ \quad = \pi(\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) \end{cases}$$

also:

$$(14)\quad \lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = a$ substituirt:

$$(15)\quad J_n(\vartheta) = \int\limits_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot d a,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $a = a' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\int\limits_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot d a$$

$$= \int\limits_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta + a') \cdot \cot\frac{a'}{2} \cdot (1 - \cos n a') \cdot d a',$$

so folgt:

$$(16)\quad \begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot d a \\ &= \int\limits_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot d a. \end{aligned}$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl und zerlegt man $J_n(\vartheta)$ in die beiden Theil-Integrale:

(17) $$J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta),$$

wo:

(18) $$J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da,$$

(19) $$J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da,$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon \leqq a \leqq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

(20) $$\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

(21) $$\lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos na \cdot da = 0$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\sin n(\eta-\vartheta) \\ &= \pi(\alpha_n\cos n\vartheta - \beta_n\sin n\vartheta) \end{aligned}\right.$$

also:

$$(14)\quad \lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = a$ substituirt:

$$(15)\quad J_n(\vartheta) = \int_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta+a)\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $a = a' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta+a)\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta+a')\cdot\cot\frac{a'}{2}\cdot(1-\cos na')\cdot da',$$

so folgt:

$$(16)\quad \begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta+a)\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da \\ &= \int_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da. \end{aligned}$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl und zerlegt man $J_n(\vartheta)$ in die beiden Theil-Integrale:

$$(17)\qquad J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta),$$

wo:

$$(18)\quad J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da,$$

$$(19)\quad J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos na) \cdot da,$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon \leqq a \leqq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

$$(20)\qquad \lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

$$(21)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{\varepsilon}^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos na \cdot da = 0$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da, \\ \displaystyle\lim_{n=\infty}\int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot\cos n a\cdot da, \end{cases}$$

einzeln genommen die eben angegebene Eigenschaft besitzen. In diesem Falle geht dann Gl. (20) in die folgende über:

$$(23)\quad \lim_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \int_0^{\pi} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da.$$

Dabei lässt sich noch das Integral $J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, wie auch jedes der Theil-Integrale (22), durch ein etwas einfacheres ersetzen. Da nämlich die identische Umformung besteht:

$$(24)\quad J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}(1-\cos n a)\cdot da$$

$$+\int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}(1-\cos n a)\left(\cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\cdot da,$$

und da:

$$(25)\quad \cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a} = \frac{a\cdot\cos\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}}{a\cdot\sin\frac{a}{2}} = -\frac{a}{6}-\ldots.$$

für $a=0$ verschwindet, so wird das letzte Integral in Gl. (24) gleichzeitig mit ε beliebig klein, und zwar unabhängig von n, insbesondere also auch für $\lim n=\infty$. Hiernach wird also $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ allemal dann gleichzeitig mit ε gegen Null convergiren, wenn:

$$(26)\quad \lim_{n=\infty}\int_0^{\varepsilon} \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}(1-\cos n a)\cdot da$$

diese Eigenschaft besitzt, und das analoge gilt für die beiden Theil-Integrale (22).

Bemerkt man schliesslich noch, dass aus Gl. (12) die eigentliche Divergenz von $\sum(\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)$ resultirt, falls $\lim_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \pm\infty$ ist,[1]) so kann man das Ergebniss dieser Untersuchung in folgender Weise zusammenfassen:

Es ist:

$$(27)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da,$$

sobald dieser Grenzwerth *existirt;* d. h. die Reihe

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu \cos\nu\vartheta - \beta \sin\nu\vartheta)$$

ist *convergent* oder *eigentlich divergent,* je nachdem der obige Grenzwerth *endlich* oder *unendlich gross* ausfällt. Als nothwendig und hinreichend für die *Convergenz* ergiebt sich, dass:

$$(\mathrm{A})\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot(1-\cos na)\cdot da$$

gleichzeitig mit ε gegen Null convergirt. Besitzen schon die beiden Bestandtheile dieses Ausdruckes, nämlich:

$$(\mathrm{B})\quad \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot da$$

$$(\mathrm{C})\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot\cos na\cdot da$$

---

[1]) Hierfür ist wiederum hinreichend, wenn der Grenzwerth (26) für irgend ein $\varepsilon > 0$ unendlich gross ausfällt.

diese Eigenschaft, so reducirt sich zugleich die Beziehung (27) auf die folgende:

$$(28)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta+a) - \psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da.$$[1]

3. Vergleicht man die Darstellungs-Formel (27) mit der gewöhnlichen (Dirichlet'schen) Summationsformel:

$$(29)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{\pi}\lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \{\varphi(\vartheta+a)+\varphi(\vartheta-a)\}\frac{\sin n a}{a}\cdot da,$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\varphi(\vartheta+0)+\varphi(\vartheta-0)\} + \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon F(a)\cdot\frac{\sin n a}{a}\cdot da,$$

wo:

$$F(a) = \{\varphi(\vartheta+a)-\varphi(\vartheta+0)\} + \{\varphi(\vartheta-a)-\varphi(\vartheta-0)\},$$

so ergeben sich die folgenden fundamentalen Unterschiede:

1) Der Werth des Grenz-Ausdruckes (29) hängt lediglich von den Functionswerthen $\varphi(\vartheta)$ in unmittelbarer Nähe der betrachteten Stelle ϑ ab, derjenige des Ausdruckes (27) von der Gesammtheit der Werthe, welche $\psi(\vartheta)$ für $-\pi \leq \vartheta < +\pi$ annimmt.

2) Die Convergenz von (29) basirt auf dem Verhalten der Summe $\varphi(\vartheta+a)+\varphi(\vartheta-a)$, diejenige von (27) bezw. (A) auf dem Verhalten der Differenz $\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)$ in unmittelbarer Nähe der fraglichen Stelle ϑ.

3) Von den beiden für die Beschaffenheit der Grenz-Ausdrücke (29) und (27) bezw. (A) charakteristischen Integralen:

---

[1] Herr Tauber beweist die Gültigkeit von Gl. (28) auch unter der Voraussetzung, dass nur das Integral (B) der angegebenen Bedingung genügt und dass an die Stelle der auf (C) bezüglichen Bedingung die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta) = \sum(\beta_\nu \cos\nu\vartheta + \alpha_\nu \sin\nu\vartheta)$ tritt (a. a. O. p. 87).

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin n a}{a} d a, \quad \int_0^\varepsilon \frac{1 - \cos n a}{a} \cdot d a$$

ist das erstere bei $\lim n = \infty$ convergent, das zweite dagegen divergent.

Nach alledem kommt die Convergenz des Ausdruckes (29) zu Stande, wenn $\varphi(\vartheta)$ sowohl rechts, als links von der betrachteten Stelle ϑ gewisse Stetigkeits-Eigenschaften besitzt, während dieselbe durch das Vorhandensein eines Sprunges zwischen $\varphi(\vartheta + 0)$ und $\varphi(\vartheta - 0)$ nicht alterirt wird. Dagegen würde das Auftreten eines Sprunges zwischen $\psi(\vartheta + 0)$ und $\psi(\vartheta - 0)$ die Convergenz des Grenzwerthes (27) bezw. (A) definitiv ausschliessen,[1]) während dieselbe allemal dann zu Stande kommt, wenn $\psi(\vartheta)$ zu beiden Seiten der Stelle ϑ sich symmetrisch oder doch nahezu symmetrisch verhält, mögen dabei die Werthe von $\psi(\vartheta \pm a)$ bei unbegrenzt abnehmendem a auch über alle Grenzen wachsen oder unendlich viele Oscillationen mit beliebig grosser Amplitude aufweisen.

Eine hinreichende Bedingung für die Convergenz des Integrals (C) bildet offenbar diejenige des Integrals:

$$\text{(D)} \qquad \int_0^\varepsilon \left| \frac{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)}{a} \right| \cdot d a,$$

also die absolute Integrabilität von $\frac{1}{a}\{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\}$ in der Umgebung von $a = 0$. Dieselbe zieht dann, wegen $|\cos n a| \leq 1$, sofort auch die Convergenz des Grenzwerthes (C) und somit schliesslich diejenige der Reihe für $\varphi(\vartheta)$, sowie die Gültigkeit der Beziehung (28) nach sich. Setzt man für den gerade betrachteten Werth ϑ:

$$\text{(30)} \qquad \psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a) = \Delta(a),$$

so mag $\Delta(a)$ als das mittlere Stetigkeitsmaass von $\psi(\vartheta)$

---

[1]) Näheres s. Nr. 6 dieses Paragraphen.

für jene Stelle ϑ bezeichnet werden. Die Convergenz des Integrals (D) ist dann gesichert, wenn bei $\lim a = +0$:

$$(31)\qquad |\varDelta(a)| \underset{\infty}{\preceq} \left(\lg_1 \frac{1}{a} \cdot \lg_2 \cdot \frac{1}{a} \cdots \lg_k \frac{1}{a}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_k \frac{1}{a}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0),$$

da in diesem Falle

$$\left| \frac{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)}{a} \right| \underset{\infty}{\preceq} \frac{d}{d\,a}\left(\lg_k \frac{1}{a}\right)^{-\varrho},$$

also in der Umgebung von $a = 0$ integrabel ausfällt. Dabei darf eventuell $\varDelta(a)$ im Intervalle $0 \leqq a \leqq \varepsilon$ noch unendlich oft das Vorzeichen wechseln. Findet dies wirklich statt, so ist die Convergenz des Integrals (D) und somit auch die Bedingung (31) sehr weit davon entfernt, eine für die Convergenz des Integrals (B), (C) und somit für diejenige der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nothwendige Bedingung zu liefern. Setzt man z. B. $\psi(\vartheta) = \sin \frac{1}{\vartheta}$, so nimmt das Integral (B) für $\vartheta = 0$ die Form an:

$$(32)\qquad 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{1}{a} \cdot d\,a \quad \left(= 2\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\sin a}{a} \cdot d\,a\right),$$

ist also convergent, während $\varDelta(a) = 2 \sin \frac{1}{a}$ in diesem Falle überhaupt nicht mit a verschwindet, sondern mit unendlich vielen Zeichenwechseln um Null oscillirt. Ja es convergirt hier sogar auch der Grenzwerth (C), d. h.:

$$(33)\qquad \lim_{n=\infty} 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{a} \cdot \sin \frac{1}{a} \cdot \cos n\,a \cdot d\,a,$$

also schliesslich die Reihe $\varphi(0)$, d. h. die Reihe für $\cos \frac{1}{\vartheta}$ an der Stelle $\vartheta = 0$. Dies kann zwar aus den bereits oben[1]) citirten allgemeinen Untersuchungen Du Bois Reymond's gefolgert werden. Da es indessen bei der complicirten Be-

[1]) p. 70, Fussnote.

schaffenheit derselben ziemlich schwierig und zeitraubend ist, in die betreffenden Entwickelungen genügende Einsicht zu erlangen, so mag es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, den Weg anzugeben, auf welchem das fragliche Resultat direkt abgeleitet werden kann.

4. Man schreibe in dem Integrale (33) m^2 statt n und bringe dasselbe sodann auf die Form:

$$(34)\qquad \begin{aligned} &2\int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a}\cos m^2 a\cdot\frac{da}{a} \\ &= \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a} - \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a}. \end{aligned}$$

Substituirt man in dem ersten der beiden rechts stehenden Integrale:

$$m^2 a+\frac{1}{a}=2\beta,$$

so folgt zunächst:

$$a=\frac{1}{m^2}(\beta\pm\sqrt{\beta^2-m^2}),\quad \frac{da}{d\beta}=\frac{1}{m^2}\left(1\pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\right)=\pm\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}.$$

Da $\beta=+\infty$ für $a=+0$ und β mit wachsendem a zunächst abnimmt, bis es bei $a=\frac{1}{m}$ den Minimalwerth $\beta=m$ erreicht, so hat man zu setzen

$$\text{für } 0<a\leq\frac{1}{m}:\ a=\frac{1}{m^2}(\beta-\sqrt{\beta^2-m^2}),\ da=-\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta,$$

$$\text{für } \frac{1}{m}\leq a\leq\varepsilon:\ a=\frac{1}{m^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-m^2}),\ da=\frac{a}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta,$$

sodass also:

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{a} \\ &= \int_m^\infty \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta + \int_m^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta. \end{aligned}$$

Da für $\beta = m$ der Nenner nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so wird die Convergenz der Integrale hierdurch nicht alterirt. Man hat zunächst:

$$\left| \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{p^2 - m^2}} \cdot d\beta \right| < \int_m^{m+p} \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} = \lg \frac{m + p + \sqrt{2pm + p^2}}{m}$$

also:

$$\lim_{m=\infty} \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta = 0, \tag{36}$$

wenn p eine feste endliche (oder auch schwächer als m in's Unendliche wachsende) Zahl bedeutet. Die restirenden Integrale:

$$\int_{m+p}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta, \quad \int_{m+p}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta \tag{37}$$

können durch Zerlegung des Integrations-Intervalles in Theil-Intervalle von der Form $[k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi]$, $[(k + \frac{1}{2})\pi, (k + 1)\pi]$ in eine unendliche bezw. endliche Reihe von numerisch beständig abnehmenden Termen mit alternirendem Vorzeichen umgeformt werden. Da es freisteht p und ε so zu wählen, dass $m + p$, $\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ ganze Multipla von π sind, so ist die Summe einer jeden dieser Reihen kleiner als das Anfangsglied:

$$\int_{m+p}^{m+p+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \, d\beta \quad (\text{wo } m + p = k\pi), \text{ d. h.} < \frac{1}{\sqrt{2pm + p^2}},$$

sodass die betreffenden Grenzwerthe für $\lim m = \infty$ verschwinden. Durch Zusammenfassung dieses Resultates mit Gl. (36) ergiebt sich also:

$$\lim_{m=\infty} \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2 a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} = 0. \tag{38}$$

Noch etwas einfacher gestaltet sich der entsprechende Beweis für das letzte Integral der Gleichung (34). Die Substitution:

$$m^2 a - \frac{1}{a} = 2\beta$$

liefert zunächst:

$$a = \frac{1}{m^2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + m^2}\right), \quad \frac{da}{d\beta} = \frac{1}{m^2}\left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}\right) = \pm \frac{a}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}.$$

Da aber $\beta = -\infty$ für $a = +0$ und sodann β mit wachsendem a beständig zunimmt, so entfällt hier die Zerlegung des betreffenden Integrations-Intervalles in zwei Theile, und zwar hat man zu setzen:

$$a = \frac{1}{m^2}(\beta + \sqrt{\beta^2 + m^2}), \quad da = \frac{a}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta$$

also:

$$(39) \qquad \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{a}$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \, d\beta = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta$$

(da allgemein: $\int_{-A}^{+A} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta = 0$) und, wenn man schliesslich noch $-\beta$ statt β als Integrations-Variable einführt:

$$(40) \qquad \int_0^\varepsilon \sin\left(m^2 a + \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{da}{a} = -\int_{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta,$$

ein Integral, dessen Verschwinden für $\lim m = \infty$ sich in derselben Weise ergiebt, wie für das erste der Integrale (37). Somit findet man schliesslich, wie behauptet (Gl. (33)):

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\varepsilon} \sin\frac{1}{a} \cdot \cos n a \cdot \frac{d a}{a} = 0.$$

Ich bemerke hierzu noch, dass das Verschwinden von

$$(41) \quad \lim_{n=\infty} \int_0^{\varepsilon} \sin\frac{1}{a} \cdot \sin n a \cdot \frac{d a}{a}, \quad \lim_{n=\infty} \int_0^{\varepsilon} \cos\frac{1}{a} \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n a \cdot \frac{d a}{a}$$

in analoger Weise bewiesen werden kann. Und da die Integrale:

$$(42) \quad \int_0^{\varepsilon} \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right) \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n a \cdot \frac{d a}{a}, \quad \int_0^{\varepsilon} \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right) \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n a \cdot \frac{d a}{a}$$

(wegen: $\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\cot\frac{a}{1} \cong \frac{a}{12}$, s. Gl. (25)) offenbar das analoge Verhalten zeigen, so ergiebt sich (durch jede der beiden Formeln (27) und (29)) die Convergenz der in § 3, Nr. 1 betrachteten Reihe:

$$(43) \qquad f(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) \right\}$$

für $\vartheta = 0$, d. h. der Mac Laurin'schen Entwickelung von $e^{\frac{x}{x-1}}$ an der Stelle $x = 1$.

5. Erleidet $\Delta(a)$ (Gl. (30)) in der Umgebung der betrachteten Stelle ϑ nicht unendlich viele Zeichenwechsel,[1]) so wird bei hinlänglicher Verkleinerung von a durchweg $\Delta(a) = |\Delta(a)|$ oder $= -|\Delta(a)|$, und die Bedingung der absoluten Integrabilität von $\frac{1}{a} \cdot \Delta(a)$ ist dann keine andere als die der einfachen Integrabilität. Auch in diesem Falle ist die Bedingung (31) keine nothwendige für die Convergenz der Integrale (B), (C), aber sie nähert sich bei unbegrenzter Vergrösserung

[1]) Damit ist keineswegs ausgeschlossen, dass $\psi(\vartheta)$ in der fraglichen Umgebung noch unendlich viele Maxima und Minima besitzen kann.

von $\varkappa$ und Verkleinerung von ϱ dem Charakter einer nothwendigen Bedingung in dem Sinne, dass im Falle:

$$(44) \qquad |\Delta(a)| \gtrless \left(\lg_1 \frac{1}{a} \cdot \lg_2 \frac{1}{a} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{a}\right)^{-1} = \lambda_\varkappa(a),$$

nicht nur jedes der Integrale (B) und (C), sondern auch der Grenzwerth (A) und somit schliesslich die Reihe $\varphi(\vartheta)$ eigentlich divergirt.

Um dies nachzuweisen, werde also angenommen, dass für $0 < a \leqq \varepsilon$:

$$(45) \qquad \Delta(a) > g \cdot \lambda_\varkappa(a) \quad \text{bezw.} \quad < -g \cdot \lambda_\varkappa(a)$$

(wobei ε von vornherein so klein anzunehmen ist, dass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}$ und somit auch $\lambda_\varkappa(a)$ positiv ausfällt). Alsdann hat man behufs Abschätzung des Grenzwerthes (A) zunächst:

$$(46) \qquad \left|\int_0^\varepsilon \frac{\Delta(a)}{a} \cdot (1 - \cos na) \cdot da\right| > g \cdot \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} (1 - \cos na) \cdot da,$$

und, wenn n von vornherein so gross angenommen wird, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$:

$$(47) \qquad \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot (1 - \cos na) \cdot da = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot (1 - \cos na) \cdot da + \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot da - \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(a)}{a} \cdot \cos na \cdot da$$
$$= N_1 + N_2 - N_3.$$

Dabei ergiebt sich unmittelbar:

$$(48) \qquad N_2 = \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{da}{a \cdot \lg_1 \frac{1}{a} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{a}} = -\left[\lg_{\varkappa+1} \frac{1}{a}\right]_{\frac{1}{n}}^\varepsilon = \lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Die Integrale N_1 und N_3 nehmen durch Einführung von $\frac{a}{n}$ an Stelle von a die folgende Form an:

$$(49)\quad N_1 = \int_0^1 \lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)\cdot\frac{1-\cos a}{a}\,da,\quad N_3 = \int_1^{n\varepsilon} \frac{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}{a}\cdot\cos a\cdot da.$$

Da $\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ für $a = 0$ verschwindet und gleichzeitig mit a monoton zunimmt, so hat man:

$$N_1 < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^1 \frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\cdot da < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right)$$

d. h.

$$(50)\quad N_1 = \frac{\vartheta}{\lg_1 n \ldots \lg_\varkappa n},\quad \text{wo } 0 < \vartheta < 1,$$

sodass also N_1 für $\lim n = \infty$ verschwindet.

Um zur Abschätzung von N_3 den zweiten Mittelwerthsatz anzuwenden, soll zunächst gezeigt werden, dass $\frac{1}{a}\cdot\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ für $1 \leqq a \leqq n\varepsilon$ monoton, nämlich beständig abnehmend, verläuft. Man hat:

$$\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)} = a\cdot\lg_1\left(\frac{n}{a}\right)\cdot\lg_2\left(\frac{n}{a}\right)\cdot\,\cdot\lg_\varkappa\left(\frac{n}{a}\right),$$

und daher:

$$(51)\quad \begin{aligned} D_a\left(\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}\right) &= \lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\left\{1 - \frac{a\cdot D_a\left(\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\right)}{\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}}\right\} \\ &= \lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}\left\{1 - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}} - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}\cdot\lg_2\frac{n}{a}} - \ldots - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{a}\ldots\lg_\varkappa\frac{n}{a}}\right\}. \end{aligned}$$

Da im Integrale N_3 (Gl. (49)):

$$1 \leq a \leq n\varepsilon, \quad \text{also: } \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{n}{a} \leq n,$$

so ist $\frac{1}{\varepsilon}$ der kleinste Werth, den das Argument $\frac{n}{a}$ bei der Integration annimmt. Man kann nun ε von vornherein klein genug fixiren, sodass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon} > 1$, also um so mehr für jedes in Betracht kommende a: $\lg_\varkappa \frac{n}{a} > 1$. Alsdann wird aber:

$$\lg_{\varkappa-1} \frac{n}{a} > e, \quad \lg_{\varkappa-2} \frac{n}{a} > e^e, \text{ u. s. f.},$$

sodass als Summe der in (51) auftretenden k negativen Glieder ein durch Wahl von ε beliebig klein zu machender ächter Bruch resultirt. Hiernach hat man aber für das fragliche Integrations-Intervall:

$$(52) \qquad D_a \left(\frac{a}{\lambda_\varkappa \left(\frac{a}{n} \right)} \right) > 0,$$

d. h. $\frac{a}{\lambda_\varkappa \left(\frac{a}{n} \right)}$ nimmt daselbst beständig zu, also $\frac{1}{a} \cdot \lambda_\varkappa \left(\frac{a}{n} \right)$ beständig ab. Und man findet somit auf Grund des zweiten Mittelwerth-Satzes:

$$(53) \quad \begin{aligned} N_3 &= \lambda_\varkappa \left(\frac{1}{n} \right) \int_1^\xi \cos a \cdot da + \frac{1}{n\varepsilon} \lambda_\varkappa(\varepsilon) \int_\xi^{n\varepsilon} \cos a \cdot da \\ &= 2 \left(\pm \vartheta' \cdot \lambda_\varkappa \left(\frac{1}{n} \right) \pm \frac{\vartheta''}{n\varepsilon} \cdot \lambda_\varkappa(\varepsilon) \right), \quad \text{wo: } 0 < \begin{Bmatrix} \vartheta' \\ \vartheta'' \end{Bmatrix} < 1, \end{aligned}$$

d. h. auch N_3 verschwindet für $\lim n = \infty$.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (48), (50), (53) geht dann schliesslich Gl. (47) in die folgende über:

$$
(54)\quad \int_0^{\varepsilon} \frac{\lambda_{\varkappa}(a)}{a} \cdot (1 - \cos n\,a) \cdot d\,a = \lg \frac{\lg_{\varkappa} n}{\lg_{\varkappa} \frac{1}{\varepsilon}} + (\vartheta \mp 2\,\vartheta')\,\lambda_{\varkappa}\left(\frac{1}{n}\right) \mp 2\,\vartheta'' \cdot \frac{\lambda_{\varkappa}(\varepsilon)}{n\,\varepsilon},
$$

sodass also dieses Integral für $\lim n = \infty$ so unendlich wird, wie $\lg \frac{\lg_{\varkappa} n}{\lg_{\varkappa} \frac{1}{\varepsilon}}$. Aus Ungl. (46) folgt sodann, dass der absolute Werth des zu untersuchenden Integrals d. h. des Grenzwerthes (26) bezw. (A), also auch[1]) derjenige des Grenzwerthes (27) mindestens in derselben Weise unendlich wird und somit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle eigentlich divergirt. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

Die Reihe

$$
\varphi(\vartheta) = \sum_1^{\infty} {}^{\nu} (a_{\nu} \cos \nu\,\vartheta - \beta_{\nu} \sin \nu\,\vartheta)
$$

ist *eigentlich divergent*, wenn $\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)$ für $a < \varepsilon$ constantes Vorzeichen besitzt und für $\lim a = 0$ nicht stärker gegen Null convergirt, als $\left(\lg_1 \frac{1}{a} \cdot \lg_2 \frac{1}{a} \ldots \lg_{\varkappa} \frac{1}{a}\right)^{-1}$ bei beliebig grossem k.

6. Hieraus ergiebt sich aber insbesondere, dass die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an jeder Stelle ϑ eigentlich divergiren muss, in deren Umgebung die Differenz $\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)$ über einer positiven oder unter einer negativen Zahl bleibt. Dies wird allemal dann der Fall sein, wenn $\psi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle einen gewöhnlichen Sprung[2]) erleidet, d. h. wenn $\psi(\vartheta + 0)$ und $\psi(\vartheta - 0)$ beide existiren und von

---

[1]) s. p. 80, Fussnote.

[2]) Nach Dini's Bezeichnung eine Unstetigkeit erster Art. Vgl. Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, p. 29.

einander verschieden sind; aber auch dann, wenn nur $\underline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta + a) > \overline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta - a)$ oder $\overline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta + a) < \underline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta - a)$.[1]) Bezeichnet man jede derartige Unstetigkeit als einen Sprung schlechthin, so kann man also sagen, dass $\varphi(\vartheta)$ allemal eigentlich divergirt, wenn $\psi(\vartheta)$ einen Sprung erleidet. Und da offenbar analog das Auftreten eines Sprunges bei $\varphi(\vartheta)$ die eigentliche Divergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$ nach sich zieht, so ergiebt sich der folgende Satz:

> Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit absolut und beim Uebergange zur Convergenzkreis-Peripherie im allgemeinen gleichmässig integrabler Randfunction $f(e^{\vartheta i})$ ist *eigentlich divergent* an allen Sprungstellen von $f(e^{\vartheta i})$.

Bezeichnet man andererseits als sprunglose Unstetigkeiten solche, bei denen

$$\underline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta + a) < \overline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta - a), \quad \overline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta + a) > \underline{\lim}_{a=0}\, \psi(\vartheta - a)$$

und $\psi(\vartheta)$ in der Nähe der betreffenden Stelle alle zwischen jenen Limites enthaltenen Werthe durchläuft, (wie $\sin \frac{1}{\vartheta}$ bei $\vartheta = 0$), so zeigt das Beispiel der Potenzreihe für $e^{\frac{x}{x-1}}$ (s. den Schluss von Nr. 4 dieses Paragraphen), dass deren Vorkommen die Convergenz der Potenzreihe an der betreffenden Stelle nicht ausschliesst.

Man gelangt also auf Grund dieser Betrachtungen zu dem folgenden, wie mir scheint, neuen und nicht unwichtigen End-Ergebnisse:

> Eine für irgend ein zusammenhängendes Bogenstück ihres Convergenzkreises *convergirende* Potenzreihe unterscheidet sich, als eine aus *zwei*

---

[1]) Beispiel:

$$\psi(\vartheta) = \lim_{n=\infty} \frac{1 - \vartheta^n}{1 + \vartheta^n} \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{1}{\vartheta - 1}\right)$$

für $\vartheta = 1$.

von einander *abhängigen Fourier*'schen Reihen zusammengesetzte Reihe, in sofern wesentlich von einer *gewöhnlichen Fourier'schen* Reihe, als ihre Summe *niemals Sprünge* erleiden kann. Dagegen ist das Auftreten sprungloser Unstetigkeiten keineswegs ausgeschlossen.

In Folge dieses letzteren Umstandes, muss also jeder Versuch,[1] aus der blossen Convergenz von $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Convergenzkreise die Gleichmässigkeit dieser Convergenz oder auch nur die Stetigkeit der Reihensumme erschliessen zu wollen, von vornherein aussichtslos erscheinen.

In wieweit dagegen umgekehrt aus der Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ geschlossen werden könne (NB. allemal unter Voraussetzung der Identität von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$) — diese Frage erscheint vorläufig noch als eine offene. Denn wenn auch aus den Untersuchungen Du Bois Reymond's[2]) hervorgeht, dass es Functionen $\psi(\vartheta)$ giebt, deren Fourier'sche Entwickelung $\sum(b_\nu \cos \nu\vartheta + a_\nu \sin \nu\vartheta)$ an einer Stetigkeitsstelle $\vartheta = \vartheta'$ divergirt, so bleibt doch immerhin fraglich, ob nun auch das zugehörige $\varphi(\vartheta) = \sum(a_\nu \cos \nu\vartheta - b_\nu \sin \nu\vartheta)$ für $\vartheta = \vartheta'$ ebenfalls stetig ausfällt. Hiernach erscheint es zum mindesten nicht ausgeschlossen, dass die Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$, d. h. die gleichzeitige Stetigkeit von $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$, stets die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ zur Folge habe. Eine hinreichende Bedingung für diese letztere ergiebt sich im Anschlusse an die Bedingung (31), p. 88, wenn man beachtet, dass:

$$(55)\quad \Delta(\alpha) = \{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta)\} - \{\psi(\vartheta - \alpha) - \psi(\vartheta)\},$$

und dass im Falle der Stetigkeit von $\psi(\vartheta)$, wegen: $\psi(\vartheta \pm 0) = \psi(\vartheta)$, die Bedingung:

$$(56)\quad |\psi(\vartheta \pm \alpha) - \psi(\vartheta)| \lesssim \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0)$$

---

[1]) Vgl. Zeitschr. f. Math. 20 (1875), p. 370; desgl. 29 (1884), p. 128.

[2]) Vgl. p. 70, Fussnote.

einerseits die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta)$, andererseits mit Rücksicht auf Gl. (55) die Existenz der Beziehung (31) und somit auch die Convergenz der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nach sich zieht. In Folge der zwischen $\psi(\vartheta)$ und $\varphi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität gewinnt man also noch den folgenden Satz:

> Die Reihe $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ *convergirt* an jeder Stelle ϑ, für welche der reelle *oder* imaginäre Theil von $f(e^{\vartheta i})$ *stetig* ist und ein der Bedingung (56) genügendes (rechtes und linkes) *Stetigkeitsmaass* besitzt.

7. Die Relation (28), p. 86, nämlich:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da$$

kann zuweilen mit Vortheil sowohl als Summationsformel, als auch zur Auswerthung gewisser bestimmter Integrale angewendet werden. Dabei ist aber zu beachten, dass sie in der obigen Form nur dann gilt, wenn $\psi(\vartheta)$ über das Intervall $(-\pi, +\pi)$ hinaus periodisch fortgesetzt wird (vgl. p. 86 den Uebergang von Gl. (15) zu Gl. (16)). Wird dagegen $\psi(\vartheta)$ durch einen arithmetischen Ausdruck dargestellt, welcher an sich eine nicht-periodische Fortsetzung besitzt, so hat man die obige Formel durch die folgende, aus Gl. (12), (14), (15) hervorgehende, ohne die betreffende Verschiebung des Integrations-Intervalls zu ersetzen:

$$(57) \qquad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + a) \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da\,.$$

Um ein einfaches Beispiel zu geben, werde etwa gesetzt:

$$\psi(\vartheta) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu}\, (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\sin\nu\vartheta}{\nu} \quad \text{d. h.} = \frac{\vartheta}{2} \quad \text{für} \quad -\pi < \vartheta < +\pi\,.$$

Alsdann wird:

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^{\infty}{}^{\nu}\, (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos\nu\vartheta}{\nu},$$

und daher mit Benützung von Gl. (57):

$$\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} (\vartheta + a) \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da,$$

(da: $\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \vartheta \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da = \vartheta \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{a}{2} \cdot da = 0$). Ferner hat man:

$$\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da = \int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} (a - 2\pi) \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da$$

$$= -4\pi \cdot \left[\lg \sin \frac{a}{2}\right]_{\pi-\vartheta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da,$$

also:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \lg \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da.$$

Daraus ergiebt sich für $\vartheta = 0$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot da = \sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = \lg 2$$

(wie Legendre[1]) auf anderem Wege gefunden hat) und somit schliesslich:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \lg \left(2 \cos \frac{\vartheta}{2}\right).$$

---

1) Exercices sur le calcul intégral, T. II, p. 200.

Sitzung vom 3. März 1900.

1. Herr J. Ranke hält einen Vortrag: „Ueber deformirte Schädel aus den Gräberfeldern von Ancon und Pachacamac bei Lima“. Die Schädel sind von Ihrer Königlichen Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern bei ihrer Reise in Peru gesammelt und der prähistorischen Sammlung zum Geschenk gemacht worden. Die Mittheilung ist für die Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe bestimmt.

2. Herr W. Koenigs bespricht eine von ihm mit Herrn Dr. Eduard Knorr ausgeführte Untersuchung: „Ueber einige Derivate des Traubenzuckers“.

3. Herr Seb. Finsterwalder legt das von Herrn Dr. Adolf Blümcke und Herrn Dr. Hans Hess in Nürnberg herausgegebene und der Akademie zum Geschenk gemachte Werk: „Untersuchungen am Hintereisferner“ vor.

4. Herr H. Ebert trägt die Resultate einer mit Herrn B. Hoffmann ausgeführten Arbeit: „Versuche mit flüssiger Luft“ vor.

5. Herr R. Hertwig überreicht zwei Abhandlungen des Herrn Dr. Franz Doflein, Assistenten an der zoologisch-zootomischen Sammlung:

a) „über eine neue Süsswasserkrabbe aus Columbien, gesammelt von Ihrer Königlichen Hoheit der Prinzessin Therese von Bayern“;

b) „weitere Mittheilungen über dekapode Crustaceen der k. bayerischen Staatssammlungen“.



Ueber einige Derivate des Traubenzuckers.

Von **Wilhelm Koenigs** und **Eduard Knorr.**

(*Eingelaufen 18. März.*)

Bekanntlich hat Colley[1]) durch Behandlung von Traubenzucker mit Acetylchlorid eine Verbindung $C_6H_7Cl(OC_2H_3O)_4O$ dargestellt, in welcher vier Hydroxyle durch Oxacetylgruppen und das fünfte Hydroxyl durch Chlor vertreten ist. Er nannte dieselbe Acetochlorhydrose. Der Entdecker gibt an, dass es ihm nur zwei Mal gelungen sei, diese Verbindung in krystallisirtem Zustande zu erhalten. In der Regel bildet dieselbe einen farblosen zähen Syrup. Michael[2]) und nach ihm Drouin[3]) sowie Hugh Ryan[4]) haben die grosse Reaktionsfähigkeit der Acetochlorhydrose, welche sie ebenfalls in Form eines Syrups gewannen, zu schönen Synthesen verschiedener Phenol-Glucoside verwerthet. Der letztgenannte Chemiker hat auch aus der Galactose durch Behandlung mit Acetylchlorid ein entsprechendes Derivat dargestellt, welches übrigens auch wieder amorph war. Hugh Ryan bezeichnet die Acetochlorhydrosen aus Traubenzucker und aus Galactose als Acetochlorglucose und Acetochlorgalactose.

Bei Versuchen über das Verhalten der Acetochlorglucose empfanden wir es als einen grossen Uebelstand, dass man bei der syrupförmigen Beschaffenheit dieser Verbindung keine ge-

---

[1]) Colley, Annales de chimie et de physique [IV] 21, 363.
[2]) Michael, American Journal 1, 305 und 6, 336.
[3]) Drouin, Bulletin de la société chimique [III], 13, 5.
[4]) Hugh Ryan, Journal of the Chemical Society 75, 1054.

nügende Garantie für deren Reinheit besitzt. Indem wir den Traubenzucker der Einwirkung von Acetylbromid unterwarfen, gelang es uns das entsprechende Bromderivat des Traubenzuckers, die Acetobromglucose $C_6H_7Br(OC_2H_3O)_4O$ zu gewinnen, welche eine ähnlich leichte Vertretbarkeit des Halogens zeigt, wie die Acetochlorglucose. Vor dieser hat sie den Vorzug, dass sie sehr leicht krystallisirt, und dass ihre Reinheit durch die Bestimmung des Schmelzpunkts, der bei 88—89° liegt, rasch controlirt werden kann.

Die Acetobromglucose krystallisirt aus absolutem Aether in glänzenden weissen Nadeln. Auch aus hochsiedendem Ligroïn lässt sie sich umkrystallisiren. Sie löst sich kaum in Wasser, von welchem sie bei längerem Stehen — rascher beim Kochen — zersetzt wird. Sie ist rechtsdrehend und reducirt kochende Fehling'sche Lösung.

Wir haben zunächst das Verhalten der Acetobromglucose gegen Methyl- und Aethylalkohol und gegen Silberverbindungen etwas eingehender untersucht und haben dabei Folgendes beobachtet.

Bei längerem Stehen einer Lösung von Acetobromglucose in absolutem Methylalkohol bildet sich das β-Methylglucosid. Aus der Acetochlorglucose hat E. Fischer[1]) durch Einleiten von gasförmiger Salzsäure in die methylalkoholische Lösung das α-Methylglucosid erhalten.

Schüttelt man die methylalkoholische Lösung der Acetobromglucose mit trockenem, fein gepulvertem Silbercarbonat, so bildet sich die bisher noch nicht bekannte, prächtig krystallisirte Tetraacetylverbindung des β-Methylglucosids. Dieselbe schmilzt bei 104—105°, ist linksdrehend, reducirt nicht die Fehling'sche Lösung und wird bei längerem Stehen mit Normalnatronlauge zu β-Methylglucosid verseift. Durch Umsetzung mit Silbernitrat hofften wir aus der Acetobromglucose die von Colley entdeckte Acetonitrose zu erhalten. Als wir die methyl-

---

[1]) E. Fischer, Berichte der Deutschen chemischen Gesellschaft 26, 2407.

alkoholische Lösung des Bromderivats mit einer methylalkoholisch-wässerigen Höllensteinlösung schüttelten, fiel zwar sofort quantitativ das Bromsilber aus, aber statt des erwarteten Salpetersäureäthers erhielten wir wiederum das Tetraacetyl-β-Methylglucosid. Dieselbe Verbindung entstand auch bei einem Versuch, die in Methylalkohol gelöste Acetobromglucose mit Traubenzucker, der in wenig Wasser gelöst war, bei Gegenwart von Silbercarbonat zum Derivat einer Diglucose zu combiniren.

Schüttelt man die aethylalkoholische Lösung der Acetobromglucose mit Silbercarbonat oder mit einer concentrirten wässerigen Lösung von salpetersaurem Silber, so entsteht das gut krystallisirende Tetraacetyl-Aethylglucosid. Dasselbe schmilzt bei 105—106°, ist linksdrehend und reducirt nicht Fehling'sche Lösung. Durch längeres Stehen mit Normalnatronlauge wird es verseift zu einer in Wasser und in Alkohol sehr leicht löslichen, linksdrehenden Verbindung, welche wahrscheinlich das bisher noch nicht bekannte β-Aethylglucosid darstellt. Bisher wollte dieses Produkt nicht krystallisiren; es reducirt Fehling erst nach längerem Erwärmen mit Normalsalzsäure, wobei Aethylalkohol abgespalten wird.

Durch Schütteln der in Eisessig gelösten Acetobromglucose mit Silberacetat erhielten wir die bei 130—131° schmelzende Pentacetylglucose. Diese letztere Verbindung gehört also zusammen mit der Acetobromglucose und dem β-Methylglucosid in dieselbe stereochemische (β-) Reihe.

Mit trockenem Chlorsilber scheint sich die Acetobromglucose bei längerem Schütteln in absolut ätherischer Lösung umzusetzen zu Acetochlorglucose, welche aus hochsiedendem Ligroïn krystallisirt. Mit Versuchen über die Einwirkung von trockenem Silberoxyd, Silbercarbonat, Cyansilber, Silbernitrat auf die Lösungen der Acetobromglucose in reinem trockenem Aether, Aceton oder Benzol sind wir zur Zeit noch beschäftigt.



Versuche mit flüssiger Luft.

Von **Hermann Ebert** und **Berthold Hoffmann.**

(Eingelaufen 26. März 1900.)

A. Elektricitätserregung mit Hilfe von flüssiger Luft.

1. Füllt man flüssige Luft[1]) in ein Becherglas und hängt in dieselbe ein an einem Coconfaden befestigtes Metallstück, so erweist sich dieses, wenn man es nach einiger Zeit aus der flüssigen Luft herauszieht und an ein Elektroskop anlegt, stark negativ geladen. Wir haben diesen Versuch, welcher nie versagt, wenn die Luft in dem Glase schon einige Zeit gesiedet hat, und das isoliert aufgehängte Metallstück genügend lange in dieselbe eingetaucht war, mit Stücken von Aluminium, Eisen, Zink, Blei, Kupfer, Silber, Gold, Platin, Palladium, Zinn und Messing angestellt.

Aber auch Nichtleiter der Elektricität nehmen solche Ladungen an, so: Siegellack, Glas, Holz, Gummi.

Auch wenn die genannten Substanzen an einem Seidenfaden direkt in die Dewar'sche Vacuumflasche, in der die Luft nur schwach siedet, hineingehängt werden, nehmen sie nach einiger Zeit die genannte negative Ladung an.

2. Ein einfacher Voltaeffect in Folge des Contaktes der heterogenen Substanzen kann nicht die Ursache dieser Ladungen

---

[1]) Die bei den Versuchen benutzte flüssige Luft wurde uns in grösseren Mengen von der hiesigen Gesellschaft für Linde'sche Eismaschinen, speciell von der Abteilung für Luftverflüssigungs-Maschinen freundlichst zur Verfügung gestellt, wofür wir auch an dieser Stelle unseren besten Dank aussprechen.

sein; denn derselbe würde nur ein oder zwei Volt Spannung erzeugen können, während wir Hunderte von Volt Spannung an den eingetauchten Körpern maassen.[1]) Auch die niedrige Temperatur (—193° bis —183° C.) an sich kann nicht die Ursache der Elektrisierung sein. Eher könnte man an eine Elektricitätserregung in Folge der heftigen Verdampfung der flüssigen Luft denken. Die Aenderung des Aggregatzustandes an sich kann aber schon nach den Untersuchungen Faraday's nicht die Ursache der beobachteten Spannungserscheinungen sein; denn in der berühmten 18. Reihe seiner Experimental-Untersuchungen[2]) zeigt er an dem Beispiele des Wassers, dass die Elektricitätserregung unabhängig von der Verdampfung oder der Aenderung des Aggregatzustandes ist (2083). Ferner weist er nach, dass trockene Luft in allen Fällen gänzlich unvermögend ist, durch Reibung Elektricität zu erregen (2132). Die flüssige Luft sowie das aus ihr verdampfende gasförmige

[1]) Bei diesen Spannungsmessungen ist nicht ausser Acht zu lassen, dass die Capacität c der eingetauchten Metallstücke meist sehr klein gegenüber der Capacität c' der anzuwendenden Messinstrumente ist ($c' > c$). Ist also der eingetauchte Körper durch Aufnahme der Elektricitätsmenge E zu dem Potentiale $V = \frac{E}{c}$ geladen, so verteilt sich beim Anlegen desselben an das Elektrometer diese Ladung E auf einen Leiter von der Capacität $C = c + c'$, so dass die an dem nach Volt graduierten Elektrometer abgelesene Spannung $v = \frac{E}{C}$ zu klein ist, und die in dem Luftbad wirklich auftretende Spannung in dem Verhältnisse $\frac{V}{v} = \frac{C}{c} = 1 + \frac{c'}{c}$ grösser als die beobachtete ist. Da sich so kleine Capacitäten c, wie sie die hier verwendeten Versuchskörper haben, nur sehr schwer messen lassen, so verfährt man bei diesen Spannungsmessungen besser so, dass man das Elektrometer durch eine Trockensäule oder vielzellige Accumulatorenbatterie bis auf ein bestimmtes negatives Potential ladet und zusieht, ob sich der Ausschlag beim Anlegen des aus der Luft kommenden Körpers vergrössert oder vermindert; im ersteren Falle hat der Körper höheres (negatives) Potential, im zweiten niedrigeres, und so kann man die wirkliche Spannung in immer engere Grenzen einschliessen.

[2]) Experimental-Untersuchungen über Elektricität von Michael Faraday, deutsche Uebersetzung von S. Kalischer, 2. Bd. S. 96. 1890.

Produkt muss aber als überaus trocken angesehen werden, da das Wasser bei so niederen Temperaturen weder als Dampf, noch als Flüssigkeit bestehen kann, sondern der verdampfenden Flüssigkeit als Eis von äusserst niedriger Dampfspannung beigemengt ist.

Wenn also auch tropfbar flüssiges Wasser dem Wasserdampfe oder der Luft beigemengt und durch seine gasförmigen Träger gegen feste Substanzen geblasen vermöge der Reibung an diesen nach Faraday zu einem starken Elektricitätserreger wird, so kann dies hier dennoch nicht als Ursache der beobachteten Erscheinung herangezogen werden.

Dagegen könnte man vielleicht noch an eine Elektrisierung bei der Bereifung denken. Wird der Versuch, wie in § 1 angegeben ist, angestellt, so schlägt sich auf dem in der flüssigen Luft stark abgekühlten Körper, wenn man ihn herauszieht, um ihn dem Elektroskop zu nähern, sofort der Wasserdampf der umgebenden Luft als Reif nieder; dichte Nebel von condensiertem Wasserdampfe sinken dann von dieser Reifschicht herab. Dass auch hierin nicht die Ursache der Erregung liegen kann, wird schon durch die Bemerkung Faraday's wahrscheinlich gemacht, dass auch die Condensation von Wasser keine Elektrisierung hervorrufen kann (a. a. O. 2083). Um hierüber ganz sicher zu werden, haben wir Controlversuche mit fester Kohlensäure als Kühlmittel angestellt. Wenn dieselbe mit Aether vermischt auch nur Abkühlungen bis zu -80^0 C. zu erreichen gestattet, so erfuhren doch die gekühlten Präparate auch hier eine sehr starke Bereifung, und Nebelwolken senkten sich auf den seitlich von dem Elektroskopknopf herausragenden Metallarm, aber nicht die mindeste Elektrisierung war hierbei selbst an den empfindlichsten Instrumenten wahrzunehmen.

3. War nach den im Vorigen beschriebenen Controlversuchen eine direkte Wirkung der Bereifung bei der beobachteten Elektrisierungserscheinung ausgeschlossen, so konnte dieselbe doch möglicherweise indirekt mitgewirkt haben. Denn wenn der stark abgekühlte Körper sich mit einer Reif- oder

Eisschicht bedeckt, sowie er aus der flüssigen Luft herausgezogen wird, so könnte man zu der Vermutung neigen, dass die thatsächlich gefundene Divergenz der Elektroskopblättchen vielleicht einfach daher rühre, dass diese Eisschicht am Knopfe des Elektroskopes reibe und diesen negativ elektrisch mache, dass also die Vorgänge in der flüssigen Luft gar nichts mit der Elektrisierung selbst zu thun haben und diese nur als Kältemittel wirke. Dem gegenüber ist zu erwähnen, dass die eingetauchten Körper meist so stark elektrisiert aus dem Luftbade hervorgingen, dass sie schon durch Influenz, noch ehe sie das Elektroskop berührten, die Blättchen desselben zur Divergenz brachten.

Wiederholt man den Versuch oft mit demselben Körper, so bedeckt er sich allerdings schliesslich mit einer so dicken Schicht von Reif, dass nun andererseits die Vermutung ausgesprochen werden konnte, die eingetauchte Substanz spiele gar keine individuelle Rolle mehr, sondern die beobachtete Erscheinung brächte direkt eine negative Elektrisierung des Eises selbst zum Ausdruck. Es war daher geboten den Grundversuch bei völligem Ausschluss der Luftfeuchtigkeit und unabhängig von jeder Bereifung zu wiederholen. Wir haben daher eine Reihe von Versuchen in einem grossen Vacuum-Exsiccator angestellt, in den das Elektrometer sowie das Gefäss mit der flüssigen Luft selbst eingebaut waren; in ihm konnten die nötigen Hantierungen von aussen her mittels eines Glashebels verrichtet werden, der durch eine im Stopfen des Exsiccators sitzende Glasröhre hindurchging. Auf der Grundplatte der Exsiccatorglocke war ein grosses Gefäss mit concentrierter Schwefelsäure aufgestellt; auf diesem stand ein kleiner poröser Thonteller, auf dem Phosphorsäureanhydrid ausgestreut lag. Dieser Teller trug das für die flüssige Luft bestimmte Becherglas, das aussen mit einem Stanniolmantel umkleidet war, welcher durch einen durch den Stopfen isoliert hindurchgehenden Draht dauernd zur Erde abgeleitet war. Neben dem Schwefelsäuregefäss stand das Exner'sche Elektroskop, dessen Gehäuse an die genannte Erdleitung ebenfalls angeschlossen

war. Das Vorzeichen aller Ladungen konnte durch eine von aussen genäherte, geriebene Siegellackstange in jedem Falle leicht festgestellt werden. Der Gummi-Stopfen in dem 3,4 cm weiten Tubulus der Glasglocke war fünffach durchbohrt; durch die mittelste weiteste Durchbohrung ging ein Trichterrohr aus dünnem Messingblech in das Innere des Becherglases; hier wurde die flüssige Luft eingegossen. Eine zweite Durchbohrung trug eine Glasröhre, durch welche der oben genannte Glashebel geführt war. Dieser war im Innern der Glocke knieförmig umgebogen und trug an seinem zu einem Haken zusammengebogenen Ende an einem Bündel von Coconfäden den in die flüssige Luft einzusenkenden Körper. Da sich beim Verdampfen der Luft allmählich eine immer sauerstoffreichere Atmosphäre entwickelt, so wählten wir ein möglichst schwer oxydierbares Metall und hängten an den Glashebel ein dünnes Palladiumblech. Durch den Hebel konnte dieses in das Gefäss getaucht oder aus ihm herausgezogen werden; durch Drehen an dem Glashebel konnte es dann gegen einen Palladiumring geführt werden, der an einem Seitenarm des Elektroskopes befestigt war. So waren durch die Anwendung desselben Metalles Voltaeffecte möglichst ausgeschlossen; Thermoeffecte bei der Berührung des gekühlten Bleches und des Ringes von Zimmertemperatur waren natürlich nicht zu vermeiden; ihr Einfluss ist aber jedenfalls verschwindend klein.

In einer dritten Stopfendurchbohrung war ein Rohr befestigt, welches sich zu einem Chlorcalciumrohr erweiterte, das durch einen Hahn abschliessbar war. Ein anderes Rohr diente zum Abzug des aus der flüssigen Luft verdampfenden Gasgemisches, durch die letzte der fünf Stopfenöffnungen war ein Glasrohr gezogen, in welches die von dem Innern herausführende Erdleitung eingekittet war.

Zunächst wurde das Trichterrohr und alle anderen Oeffnungen durch Gummiverschlüsse luftdicht abgeschlossen, und die ganze Glocke durch das Chlorcalciumrohr hindurch vermittelst der Wasserluftpumpe evacuiert und dann abgeschlossen.

Vor jeder Versuchsreihe stand der Exsiccator längere Zeit

(bis zu acht Tagen) evacuiert, sodass die in ihm aufgestellten Trockenmittel alle Feuchtigkeit absorbiert hatten. Dann wurde durch das Trichterrohr aus der Dewar'schen Flasche Luft in das Gefäss gegossen und gleichzeitig das Abzugsrohr geöffnet. Da die Luft, sowie sie in das in dem Exsiccator stehende Sammelgefäss hinabgelangt, sofort sehr heftig aufsiedet, so entweicht vom ersten Momente an nur trockene Luft von innen nach aussen, aber es vermag nicht Feuchtigkeit enthaltende Luft von aussen nach innen zu dringen.

Wiewohl also bei allen in diesem Raume angestellten Versuchen Reif- und Nebelbildung vollkommen ausgeschlossen war, gelang doch der in § 1 beschriebene Versuch jederzeit, diese Nebenerscheinungen waren demnach nicht die Ursache der beobachteten Elektrisierung.

4. Nachdem gezeigt war, dass die Elektricitätserregung in der flüssigen Luft selbst ihren Sitz habe, war es nötig näher zu prüfen, welchem Bestandteile derselben diese Wirkung zuzuschreiben sei. Neben den schon bei niedriger Temperatur allmählich verdampfenden Bestandteilen der reinen atmosphärischen Luft: Stickstoff, Argon und Sauerstoff enthält die flüssige Luft, wie sie von der Maschine geliefert wird, als Verunreinigungen noch Kohlensäure und Reste von Maschinenöl in festem Zustand. Im Laufe der Zeit gesellt sich aber auch Eis in reichlichem Maasse hinzu, da z. B. bei offen stehender Dewar-Flasche die Feuchtigkeit der Luft fortwährend als Schnee niedergeschlagen wird. Alle diese Beimengungen kann man aber durch Filtrieren der Luft leicht entfernen. Wir haben zunächst mehrere Versuche mit völlig reiner Luft angestellt, die ein in den Trichter der Exsiccatorglocke eingesetztes Papierfilter passiert hatte, ehe sie in das Versuchsgefäss im Inneren eintrat.

Diese Luft, die eine wundervoll bläuliche klare Färbung und das von K. Olszewski beschriebene Absorptionsspectrum mit den vier eigentümlichen Banden zeigt,[1]) giebt, selbst wenn

[1]) K. Olszewski, Wied. Ann. 33. p. 570. 1888.

sie z. B. am Anfange unmittelbar nach dem Eingiessen sehr heftig an den Gefässwänden und dem eingetauchten Körper emporschäumt, keine Spur einer Elektrisierung. Die Reibung der reinen flüssigen Luft vermag also weder Glas noch ein Metall durch Reiben elektrisch zu machen. Hierdurch wird das Faraday'sche Ergebnis (vgl. S. 108) bis zu Temperaturen von —193° hinab erweitert.

Um zu erkennen, welcher Bestandteil es nun ist, der bei nicht gereinigter, gewöhnlicher flüssiger Luft die beobachtete sehr starke Elektrisierung hervorruft, haben wir der reinen flüssigen Luft zunächst Kohlensäureschnee in reichlicher Menge beigesetzt. Hierbei war Vorsicht geboten; denn die feste Kohlensäure, wie sie der Bombe entnommen wird, zeigt immer eigene elektrische Ladung, meist eine positive. Wir haben daher grössere Stücke fester Kohlensäure zunächst zwischen zwei zur Erde abgeleiteten ebenen, dicken Zinkplatten zerkleinert, dann den fein zerriebenen Schnee am Elektroskop geprüft und erst wenn er sich gänzlich entladen zeigte in den Exsiccator geworfen. Alsdann zeigte sich keine Elektrisierung des eingetauchten Palladiumbleches, also auch die Spuren fester Kohlensäure, die immer der flüssigen Luft beigemengt sind und ihr das bekannte milchige Aussehen verleihen, sind nicht die Ursache der in § 1 geschilderten Erregungen.

Nun gingen wir dazu über der filtrierten flüssigen Luft Eis in möglichst fein verteiltem Zustande zuzusetzen. Dies war ausserordentlich schwierig, wenn dasselbe elektrisch völlig neutral in das Siedegefäss gelangen sollte. Denn jegliches Zerkleinern eines stark unterkühlten festen Eisstückes mit irgend einem Körper, Metall oder Nichtmetall würde dieses sehr stark positiv, das zerkleinernde Instrument negativ erregt haben (vgl. w. u. § 5 S. 115). Ja selbst als wir mittels eines Glaszerstäubers einen feinen Sprühregen von destilliertem Wasser gegen die filtrierte flüssige Luft richteten, wobei sich in derselben kleine Eiskügelchen ansammelten, erwies sich das in ihr gebildete Eis als überaus stark positiv elektrisch geladen. Wir haben hier den Effect der Dampfelektrisiermaschine, von dem

Faraday nachgewiesen hat, dass er auf der Elektrisierung der Wassertröpfchen beruht, wenn diese durch einen Dampf- oder Luftstrahl gegen irgend einen Körper geschleudert werden. Das Wasser nimmt immer (von wenigen Ausnahmen abgesehen vgl. w. u.) positive Ladung an. Beim Reiben am Zerstäuber oder beim Auftreffen auf die flüssige Luft werden die Tröpfchen elektrisiert und bleiben es, wenn sie zu Eis erstarren.

Wir haben schliesslich fein verteiltes Eis von nicht zu starker positiver Ladung in der flüssigen Luft dadurch angereichert, dass wir einen langsamen Luftstrom, der mit dampfförmigen Wasser beladen war, z. B. den Athem (da ja bereits nachgewiesen war, dass die Kohlensäure das Phänomen nicht hervorbringt) gegen die flüssige Luft richteten; dann erschien die negative Ladung des eingetauchten Körpers und wuchs in dem Maasse, wie das die flüssige Luft mehr und mehr trübende Eis sich anreicherte. Es ist also die Reibung des in der flüssigen Luft enthaltenen Eises, welche den eingetauchten Körper negativ elektrisiert, das Eis selbst aber positiv.

5. Dass das in der flüssigen Luft schwimmende, stark unterkühlte Eis, wenn es durch die Strömungen und Wallungen in der Luft gegen feste Körper gerieben wird, die Ursache der oben beschriebenen Elektricitätserregungen ist, wird noch durch einige andere Versuche bekräftigt. Die festen Reste, welche in den Siedegefässen zurückbleiben, wenn alle flüssige Luft verdampft ist, zeigen sich stets sehr stark positiv geladen und zwar unabhängig davon, ob das Abdampfen der Luft in einem Glasgefäss, in einem Gummibecher, der bei der Siedetemperatur der Luft steinhart wird, oder in einem Schälchen stattfindet, das aus Siegellack gepresst ist. Beim Auftauen der festen Rückstände erkennt man, dass sie zum grössten Teil aus Wasser bestehen (ein nie ganz fehlender Oelgeruch zeigt, dass ihm Spuren von Maschinenöl beigemengt sind). Schon Faraday wies auf die hohe Positivität des Wassers (2131), speciell des Eises hin, welches sogar durch Reiben mit flüssigem (condensiertem) Wasser positiv elektrisch wird, während alle anderen

Körper bei dieser Reibung negative Ladungen annehmen. L. Sohncke[1]) bestätigte dieses und fügte ausserdem einige wichtige Versuche hinzu, aus denen hervorging, dass vollkommen trockenes, sehr kaltes Eis beim Reiben mit festen Körpern: Messing, Stahl und Glas positiv elektrisch wird, während die reibenden Körper selbst negativ werden müssen. Durch unsere Versuche werden die Sohncke'schen Resultate bestätigt, ihr Gültigkeitsbereich bis zu Eistemperaturen von — 193° C. erweitert und die Versuchsergebnisse auf alle die in § 1 genannten Substanzen ausgedehnt.

Hat man nur wenig flüssige Luft zur Verfügung, so kann man den Eisreibungsversuch wie folgt anstellen: Man filtriert flüssige Luft aus der Flasche durch einen dünnwandigen Metalltrichter in ein Becherglas. Ein an einem isolierenden Faden hängendes Metallstück erweist sich selbst nach längerem Hängen in der filtrierten flüssigen Luft als unelektrisch, selbst wenn der sphäroidale Zustand lange überwunden ist, ein inniges Reiben der flüssigen siedenden Luft am Körper also stattgefunden hat. Mit der Zeit setzt sich oberhalb des Flüssigkeitsspiegels im Innern des Glases eine dichte Reifschicht an. Reibt man das stark gekühlte Metallstück an dieser, indem man es einige Male mittels des Fadens an der Gefässwand auf- und abgleiten lässt, so ist es so stark negativ geladen, dass schon ein unempfindliches Elektroskop diese Ladung anzeigt, und der Versuch in dieser Form sogar ein bequemer Vorlesungsversuch wird. Die grosse Trockenheit der flüssigen Luft scheint die Erregung sehr zu begünstigen.

Bezüglich des Grades, in welchen die verschiedenen Körper durch die Eisreibung bei völligem Ausschluss der Mitbeteiligung von tropfbar flüssigem Wasser negativ erregt werden, haben wir keine wesentlichen Unterschiede constatieren können; Faraday fand bei der Wasserreibung Ausnahmen von der allgemeinen negativen Elektrisierung, die alle Körper auch bei

[1]) L. Sohncke, Wied. Ann. 28. p. 550. 1886 und: Ursprung der Gewitterelektricität und der gewöhnlichen Elektricität der Atmosphäre p. 36 ff. 1885.

dieser annehmen, nur bei drei Substanzen: Elfenbein, Federkiel und Bärenhaare (2099); diese Präparate wurden nur unmerklich erregt, Federkiel- oder noch besser Elfenbeinröhren ergaben an seiner Dampfelektrisiermaschine einen elektrisch neutralen Dampfstrahl (2102). Auch bei der Eisreibung scheinen diese Substanzen (wir konnten freilich nur die beiden erstgenannten prüfen) eine Ausnahmestellung einzunehmen, indem sie aus dem Luftbade positiv elektrisch oder neutral oder doch nur schwach negativ elektrisch geladen hervorgingen; jedenfalls war der Unterschied z. B. gegenüber einem Platinstück, welches abwechselnd in dasselbe Bad eingetaucht wurde, auffallend.

Nach Faraday setzen schon äusserst geringe Beimengungen öliger Substanzen die Wassertropfenreibungselektricität stark herab. Wir haben auch bezüglich der Eisreibung nach einem analogen Einflusse gesucht; durch direktes Zusetzen von flüssigen Oelen ist derselbe freilich schwer nachzuweisen, da die Oeltröpfchen in der flüssigen Luft sofort zu harten Kugeln erstarren. Indessen ist es nicht unwahrscheinlich, dass die S. 112 und 114 erwähnten geringen Beimengungen von Maschinenöl den hier studierten Effect beeinträchtigen, so dass man gut thut die Luft erst zu filtrieren und ihr dann durch Stehenlassen oder durch Anhauchen oder Einblasen gewöhnlicher Luft den nötigen Eisgehalt zu erteilen.

6. Dadurch, dass das reibende Eis positiv, jeder geriebene Körper aber ebenso stark negativ elektrisch wird, erklären sich einige Nebenerscheinungen, die sonst unverständlich wären. Verbindet man mit dem Elektrometer oder einem empfindlichen Galvanometer unter Erdung des anderen Poles einen Draht, den man in die flüssige Luft eintaucht, so erhält man keinen Ausschlag; reibender, + geladener und geriebener, — geladener Körper liegen nebeneinander, die Kraftlinien sind in sich geschlossen, freie Spannung kann nicht angezeigt werden. Erst wenn man beide trennt, den Draht heraushebt, oder das Gefäss senkt, zeigt das Elektrometer freie — Spannung auf dem Drahte an. Ebenso wird kein Ausschlag erhalten, wenn man

an das Elektroskop ein Platinschälchen befestigt, in das man flüssige Luft hineingiesst; trotz des heftigsten Siedens zeigt das Instrument keine freie Spannung an. Ordnet man dagegen den Versuch so an, dass man das Schälchen an einem nach unten gebogenen Draht und diesen an das Elektrometer befestigt, dann von unten her ein Glas mit flüssiger Luft nähert, so dass das Schälchen eintaucht, so erhält man nach Aufhören des Leidenfrost'schen Phänomens einen Ausschlag, sobald man die Schale mit dem Reibzeug, in diesem Falle den in der Luft schwimmenden Eispartikelchen, senkt.

7. Dieses haben wir dazu benutzt, mit Hilfe der flüssigen Luft gewissermaassen eine Eiselektrisiermaschine zu construieren: In eine Glasröhre von 1 cm lichter Weite und 10 cm Länge war ein zusammengerolltes amalgamiertes Kupferdrahtnetz von 5 cm Länge eingeschoben. Die Röhre hatte in der Mitte einen seitlichen Ansatz, durch den ein mit dem Netz in leitender Verbindung stehender Draht nach aussen führte. Oben war die Röhre mit einem Gummistopfen verschlossen, durch welchen ein Trichterrohr in's Innere führte; am unteren Ende war sie zu einem engeren Ausflussrohre von 12 cm Länge ausgezogen. Diese Röhre war in einem 4 cm weiten, 14 cm langen Glasrohre derselben Gestalt so befestigt, dass der seitliche Ansatz des kleinen Rohres in den des grossen genau hineinpasste, wodurch es möglich wurde den Ableitungsdraht völlig isoliert auch durch den so entstehenden Mantel nach aussen zu führen. Der Mantelraum war oben durch einen dreifach durchbohrten Stopfen verschlossen. Durch die erste, centrale Bohrung ging das erwähnte Trichterrohr zur inneren Röhre; die zweite nahm ein Trichterrohr für die äussere Röhre auf und die dritte Bohrung diente als Abzugscanal für verdampfte Luft. Unten war das Mantelrohr ebenfalls ausgezogen und von solcher Weite, dass das Ausflussrohr der kleineren Röhre eben hindurchging. Ein Stück übergezogenen Gummischlauches dichtete die ineinander sitzenden Röhren ab. Der Mantelraum war mit Chlorcalciumstücken angefüllt, um alle Feuchtigkeit vom Innenrohr abzuhalten; in ihn wurde vor

dem Versuche flüssige Luft gegossen, um den ganzen Apparat auf niedrige Temperatur zu bringen. Wurde nun auch durch das innere Rohr flüssige Luft gegossen, so machte das in ihr mitgeführte Eis beim Passieren des Drahtnetzes dieses negativ elektrisch; die durchgeflossene Luft konnte unten wieder aufgefangen werden. Hier wurde eine dauernde elektrische Erregung erhalten, solange flüssige Luft durch den Apparat floss. Bei dieser Elektrisiermaschine bewegt sich also das Reibzeug, der geriebene Körper bleibt in Ruhe. Jede Mitbeteiligung von flüssigem Wasser war hierbei durch den Trocken- und Kühlmantel ausgeschlossen.

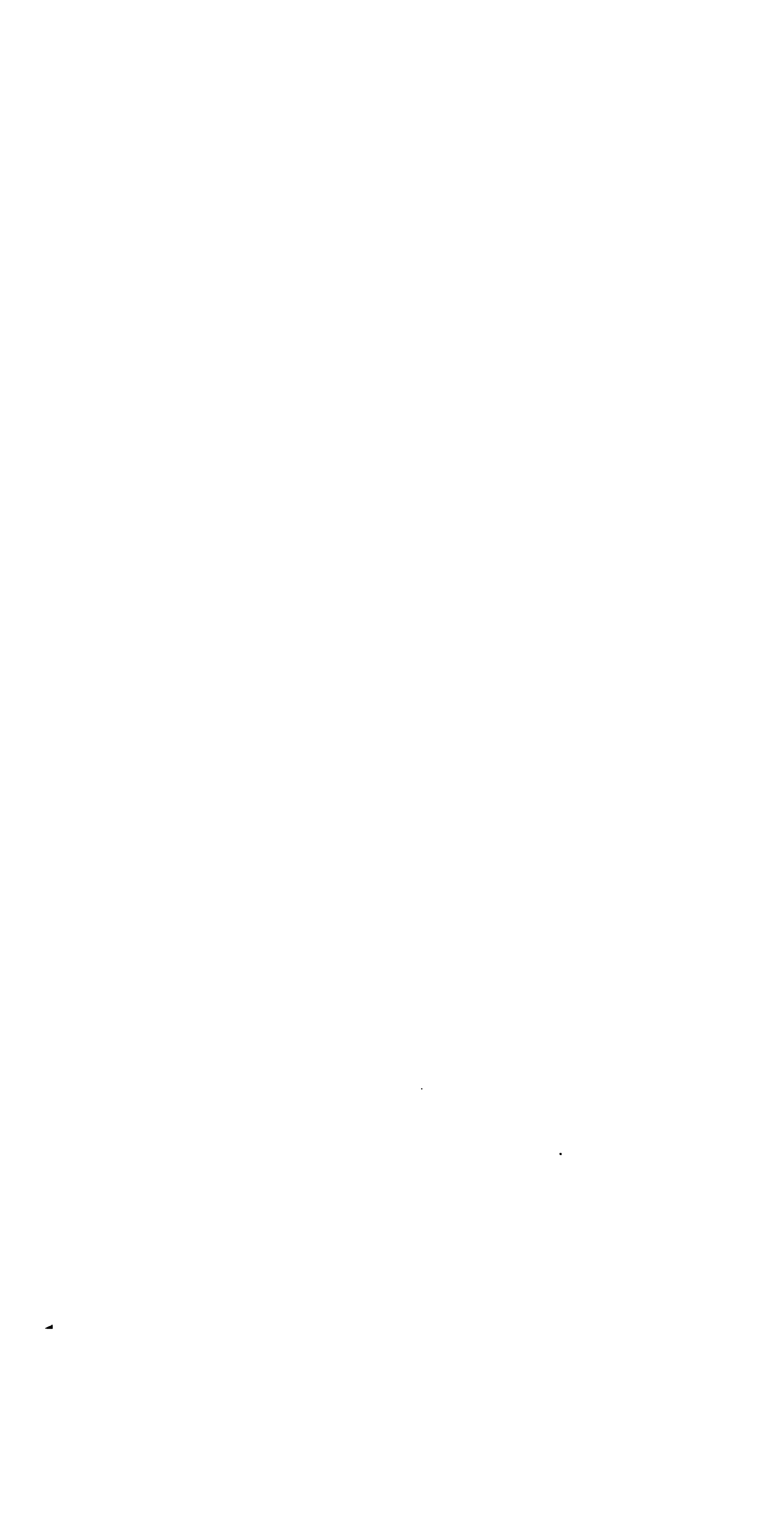
8. Nicht unerwähnt darf bleiben, dass die genannten Versuche gelegentlich Störungen namentlich bezüglich des Vorzeichens der Ladungen erfahren können und zwar aus einem leicht ersichtlichen Grunde. Verbleiben die durch Reiben positiv gewordenen Eisstückchen in dem Gefässe, so reichern sie sich immer mehr an. Es kann dann geschehen, dass die negative Elektrisierung eines eingetauchten Körpers zurücktritt und dieser bei der Berührung mit vielen stark positiv geladenen Eisstücken von diesen durch Berührung Ladung annimmt und beim Herausziehen daher positiv und nicht negativ geladen erscheint. Dies ist besonders dann der Fall, wenn zerkleinertes Eis in das Luftbad geworfen wird (vgl. § 4). Diese Eisstückchen sind dann beim Zerbrechen durch die Reibung mit dem dazu benutzten Gegenstande so stark positiv elektrisch geworden, dass ihre Ladungen vollkommen den hier in Rede stehenden Effect überdecken.

9. Durch die im Vorigen beschriebenen Versuche dürfte gezeigt sein, dass beim Reiben mit vollkommen trockenem, sehr kaltem Eise fast alle Körper, insbesondere die Metalle, stark negativ elektrisch werden, wogegen das Eis selbst sich allen diesen Körpern gegenüber positiv erregt erweist. Die Untersuchungsmethode mit Hilfe der flüssigen Luft bietet hierbei augenscheinliche Vorteile gegenüber den gewöhnlichen Methoden, die äusserst difficil sind und auch nicht immer übereinstimmende Resultate gewinnen lassen. Vor

allem ist wichtig, dass man bei diesem sehr kräftigen Kältemittel den Wasserdampf in einfachster Weise von der Beteiligung auszuschliessen vermag, da der aus der Atmosphäre condensirte Dampf sogleich als Reif auf das Kühlmittel sowohl wie das gekühlte Präparat niederfällt.

Die Erscheinung, dass ein in flüssiger Luft gekühlter Körper stark elektrisch geladen wird, ist bei allen elektrischen Versuchen, bei denen flüssige Luft als Kühlmittel dient, wohl zu beachten!

Für die Meteorologie scheint uns gleichfalls das gefundene Ergebnis von Bedeutung zu sein. Für die sog. „Wärmegewitter“ dürfte freilich die L. Sohncke'sche Theorie wohl ihr Recht behaupten, der zu Folge die Reibung des in der aufsteigenden Cumuluswolke emporgehobenen condensierten flüssigen Wassers gegen die Eisnädelchen der Cirrusschicht, in welche diese eindringt, die Ursache der Gewitterelektricität ist. Es giebt aber auf der Erde grosse Gebiete, in denen die Wirksamkeit von tropfbarem Wasser unwahrscheinlich ist: die höchsten, sehr kalten Regionen des Luftmeeres und die Polarzonen. Woher kommen jene wenn auch vielleicht nur schwachen elektrischen Erregungen, welche sich in den Polargebieten unseres Planeten vorwiegend längs der Magnetkraftlinien in Form der Polarlichterscheinungen ausgleichen? Diese Frage vermag die Lehre von der Elektrisierung beim Reiben von Wasser und Eis nicht zu lösen. Durch unsere Versuche wird aber wahrscheinlich gemacht, dass kosmischer Staub, kleinste Stein- oder Eisen-Meteorite, wenn sie sich mit den bis zu sehr hohen Schichten emporreichenden Eisnadeln (Cirrusschichten, leuchtende Nachtwolken?) bei ihrem Fall zur Erde reiben, genügend stark elektrisch werden, um in den gasverdünnten Regionen der Erde bei irgend einer Auslösung ein schwaches Elektroluminescenzlicht zu unterhalten (Himmelsphosphorescenz, Polarlicht u. s. w.). Die Versuche mit der flüssigen Luft zeigen ja, dass jene Erregungen selbst bei sehr niedrigen Temperaturen und in einer vollkommen wasserdampffreien Atmosphäre wirklich eintreten können.



Ueber eine neue Süsswasserkrabbe aus Columbien,

gesammelt von I. K. H. Prinzessin Therese.

Von Dr. **F. Doflein.**

(Eingelaufen 3. März.)

In meiner früheren Mitteilung über die von I. K. H. Prinzessin Therese gesammelten Dekapoden-Krebse[1]) habe ich unter dem Namen Potamocarcinus aequatorialis Ortmann einige Landkrabben erwähnt, welche auf dem Markte von S. Fé de Bogotá gekauft waren. Ich hatte damals schon Abweichungen von der Ortmann'schen Beschreibung konstatiert, aber erwähnt, dass auf Grund meines ungenügenden Materiales eine Entscheidung, ob es sich um eine neue Art handle, nicht möglich sei. Mittlerweile sind mir durch die Güte meines verehrten Freundes und ehemaligen Lehrers, Prof. Doederlein in Strassburg i/E., Exemplare zur Verfügung gestellt worden, welche jener Sammlung des Dr. Reiss entstammen, auf Grund deren Ortmann seinerzeit die neue Art aufgestellt hatte. Ich konnte also mit Exemplaren vergleichen, welche wohl noch mit Recht als Typen bezeichnet werden dürfen. Ich konnte feststellen, dass es sich nicht um die Ortmann'sche Art handelt, sondern um eine davon abweichende Form, welche dem ebenfalls bei Bogotá gefundenen Potomocarcinus (Pseudothelphusa) lindigianus (Rathbun) sehr nahe steht. Da aber gerade diejenigen Merkmale, welche zur Artdiagnose nach Miss Rathbun dienen sollen, entweder nicht deutlich aus-

[1]) S. diese Berichte 1899, p. 188.

geprägt sind oder deutlich abweichen, so glaube ich mich zur Aufstellung einer neuen Art berechtigt, welche ich der hohen Sammlerin zu Ehren benenne:

Potamocarcinus principessae n. sp.

Stirn mittelmässig mit einem aus deutlichen Granulationen bestehenden oberen Rand (Fig. 3). Der Merus des zweiten Gnathopoden hat einen geraden Aussenrand (Fig. 1). Die vorderen Abdominalhänge des Männchens sind merkwürdig gestaltet und sehr breit (Fig. 2).

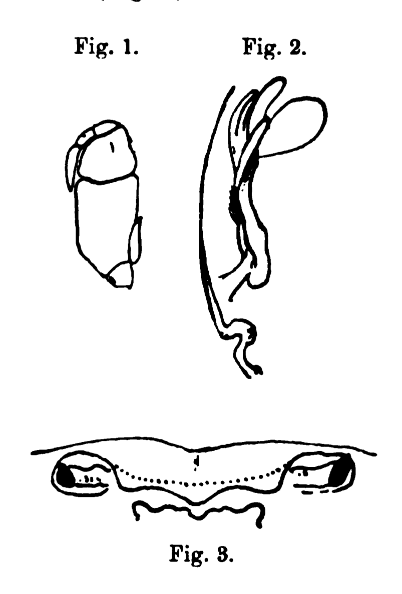


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 3.

In der letzteren Beziehung stimmt die neue Art mit lindigianus (Rathbun) überein. Dagegen ist der Carapax in transversaler wie longitudinaler Richtung fast flach; die Oberfläche ist punktiert, sehr fein granuliert. Die Granulationen werden gegen die Hinterseitenränder hin etwas gröber. Die Cervikalfurche ist nicht sehr tief, aber deutlich ausgeprägt. Vorderseitenrand mit sehr feinen Sägezähnen. Die Stirnbreite geht fast 5 mal in die Breite des Carapax. Stirn von oben zweilappig, Unterrand in 3 Zipfel ausgezogen, scharf gerandet

(Fig. 3). Das Ischium ist vorn am breitesten, ziemlich gleichmässig und mit parallelen Seiten ausgebildet. Merus 5 eckig mit geradem Aussenrand.

Fig. 2 gibt die beiden Abdominalanhänge der linken Seite eines ♂ von unten gesehen wieder. Sie stimmen mit der Beschreibung von Miss Rathbun für lindigianus überein, doch erwähnt die Autorin nur ein Paar Anhänge. Das zweite schlanke Paar hinter dem blattartig erweiterten ersten gelegen, erinnert sehr an den entsprechenden von P. aequatorialis, während das erste erheblich abweicht.



Von aequatorialis unterscheidet auch die Bildung der Scheeren, indem bei principessae die Hand etwas geschwollen, die Finger dagegen sehr schlank sind. Der Carpalzahn ist konisch und sehr scharf. Die Scheerenfüsse sind genau gleich gross. Ober- und Unterrand der Hand gleichmässig abgerundet, ebenso die Aussenseiten der Finger, welche mit scharfen dunkelgefärbten Spitzen endigen. Die ersten Zähne auf den Fingern sind ziemlich gross und nehmen gegen die Spitze zu continuirlich an Grösse ab. Durch die Bildung der Scheerenfüsse ist also die Art auch von aequatorialis deutlich zu unterscheiden.

Die Länge des kleineren ♂ ist 25 mm, die Breite 38 mm. Sonstige Masse sind aus der Abbildung zu entnehmen.

Die Art steht in vielen Beziehungen somit lindigianus sehr nahe, weicht aber hinreichend ab, um bei Anwendung der zur Zeit üblichen Merkmale eine neue Species zu rechtfertigen, wenn die Beschreibung von Miss Rathbun (Bull. Mus. d'Hist. nat. Paris T. III 1897) sich als genau erweist. Auch der Fundort ist nahezu derselbe.

S. Fé de Bogotá auf dem Markt gekauft; stammt aus dem Rio grande bei Soacha.

2 ♂, 2 ♀.

Weitere Mitteilungen über dekapode Crustaceen der k. bayerischen Staatssammlungen.[1])

Von Dr. F. Doflein.

(Eingelaufen 3. März.)

In den nachfolgenden Zeilen gedenke ich einige Resultate meiner Bearbeitung der Münchener Dekapoden-Sammlung niederzulegen, welche sich vorwiegend auf Systematik und geographische Verbreitung beziehen. Die ganze Liste unserer Sammlung zu publizieren, würde keinen Wert haben; ich begnüge mich damit, diejenigen Arten zu erwähnen, bei denen etwas von unseren bisherigen Kenntnissen Abweichendes zu bemerken ist. Einige allgemeine Bemerkungen werde ich erst am Schluss anfügen. Notizen zur Systematik werde ich jedoch jedesmal bei der betreffenden Gruppe vorbringen.

I. Penaeidea.

Um die Brauchbarkeit der Verschiedenheiten an Thelycum und Petasma, den Begattungsorganen, der Gattung Penaeus zur Unterscheidung von Arten zu prüfen, habe ich sämtliche mir zugänglichen Arten genau untersucht, und finde, dass diese Merkmale ausserordentlich scharfe Speziesunterscheidungen ergeben. Bei denjenigen Formen, bei welchen diese Organe noch nicht genauer beschrieben waren, füge ich eine genaue Beschreibung bei. Diese Charaktere waren zuerst von Spence Bate

[1]) Vgl. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse 1899, pag. 177.

(Ann. nat. hist. vol. VIII 8881) hervorgehoben und dann von Ortmann (Zool. Jahrb. Abt. Syst. vol. V 1891) systematisch angewendet worden.

1) Penaeus caramote Risso.

Exemplare von Cadix und Villa franca.

Das Petasma ist symmetrisch, zwei Doppelrinnen bildend; Spitzen nicht hakenförmig, abgerundet.

Spangen convergieren nach vorn; schwach vierlappig. Thelycum eine nach vorn offene Tasche; hinterste Spange des Sternums hinter dem 5. Pereiopodenpaar gelegen, nach vorn und schwach auch nach hinten concav. Telson mit seitlichen Dornen, Rostralzähne $\frac{10-11}{1}$. Zwei tiefe Gruben zu beiden Seiten der Rostralleiste des Cephalothorax, ebenso eine Furche auf der hinteren Hälfte dieser selbst.

Die Art würde also in der Ortmann'schen Tabelle eine neue Unterrubrik für sich beanspruchen. Sie würde fallen unter . A . — BBBB.

2) Penaeus setifer L.

Petasma symmetrisch, vorn rund abgestutzt. Hakenspitzen der inneren Rinne vorhanden, aber nicht von aussen sichtbar. An der Unterseite des Petasma verläuft auf beiden Seiten von vorne aussen nach hinten und innen eine mit feinen Härchen besetzte Leiste (Fig. 1). Die Abbildung bei Sp. Bate ist nach meinen Exemplaren zu schliessen nicht ganz genau. Thelycum: Nach hinten und vorne concave Spange hinter dem letzten Pereiopodenpaar. Bei den ♀ meiner Sammlung finde ich keine typische Thelycumbildung; statt dessen sind die Coxen des 5., 4. und 3. Thorakalfusspaares mit starr über das Sternum hinausragenden Borsten bedeckt; so dass nur durch dieselben die Tasche des Thelycums anderer Arten ersetzt erscheint.

Fig. 1.

Meine Exemplare stammen aus:

1) Florida 2 ♂ 2 ♁. Packard leg. 1876.
2) Mittelamerika (Atl. Ocean).
3) Santos. Salmin leg.
4) Charleston. Jos. Dingle leg.
5) 1 ♂ angebl. Indischer Ocean, jedenfalls eine Verwechslung

3) Penaeus brevicornis M-Edw.

1 ♀ Calcutta. Schlagintweit leg.

4) Penaeus brasiliensis Latr.

2 ♀ Rio Janeiro. Selenka 77.
2 ♀ 1 ♂ Rio Janeiro. Essendorfer 76.

II. Eucyphidea.

5) Atya scabra Leach.

Panama. Atlantische Seite. M. Wagner.

6) Atya (Evatya) crassa Smith.

Panama. Atlantische Seite. M. Wagner.

Bisher bekannt von Nicaragua, Mexiko. s. Ortmann, Proceed. Acad. nat. sci. Philadelphia 1899.

7) Caridina typus M-Edw.

Cap York. Salmin leg. Im Süsswasser.

Bisher war Amboina der östlichste bekannte Fundort; die Art hat also eine ähnlich weite Verbreitung wie C. wycki Hicks., indem sie von Mauritius bis Australien vorkommt.

8) Alpheus spinifrons M-Edw.

Steht dem laevimanus sehr nahe; meine Exemplare zeigen auf der Hand zwischen dem Dorn und der Basis des beweglichen Fingers noch einige (2—3) kleine Höcker oder Zähnchen.

Chile.

9) Alpheus neptunus Dana.

Atlantischer Ocean, Westafrikanische Küste. Salmin.

Bisher nur aus der Sulusee, Arafurasee.

10) Alpheus edwardsii Aud.

Bai von Rio Janeiro. Selenka 77.

Bisher von Nord-Carolina und den Bermudas bekannt. (s. Ortmann, Jen. Denkschriften VIII.)

11) Palaemon jamaïcensis Herbst.

Panama, atlantische Seite. M. Wagner.

12) Palaemon olfersii Wiegm.

1) Rio Chagres bei Panama. M. Wagner.
2) Puerto Cabello. Salmin.
3) Victoria (Kamerun). Preuss.

Das Kameruner Exemplar besitzt viel stärkere schwarze Stacheln auf der Hand, die auch regelmässiger gestellt sind, als bei den Amerikanern, wo die Behaarung überwiegt.

13) Palaemon acanthurus Wiegm.

1) Panama, atlantische Seite. M. Wagner.
2) Brasilien. Salmin.
3) Martinique. Dr. Doflein.[1]

14) Palaemon aztecus de Sauss.

Rio Chagres bei Panama. M. Wagner.

Da mir de Saussures Arbeit im Original unzugänglich war, so ist die Bestimmung vielleicht ungenau.

15) Palaemon carcinus Fabr.

1) Ceylon
2) Orissa, Centralindien
3) Mándi (Kúlu, Himalaya)

} Schlagintweit.

Von den Fundorten ist besonders derjenige hoch im Himalaya von Interesse.

[1]) Meine in der vorigen Mittheilung (loc. cit.) erwähnten Exemplare von P. lamarrei (von Martinique) gehören zu acanthurus Wiegm.

III. Loricata.

16) Palinurus vulgaris Latr.

Ein sehr grosses trockenes Exemplar unserer Sammlung zeigte die Augendornen viel weiter nach aussen gebogen, als die typischen Exemplare aus dem Mittelmeer. Es war bezeichnet als

Palinurus frontalis M-Edw.

Chile ? ?

Diese Art soll aber nach Ortmann (l. c.) zu Jasus gehören, welche Gattung durch die Stirnbildung deutlich unterschieden ist.

17) Panulirus argus Latr.

Wir besitzen Exemplare von

Martinique. leg. Doflein.
Surinam. Salmin.
St. Thomas. Essendorfer.
Rio Janeiro. Essendorfer.

Die beiden Exemplare von Surinam und St. Thomas zeigen keine Unterbrechung der Abdomenfurchen, ausserdem neben den 4 Haupthöckern des Antennensegmentes eine Anzahl kleiner Dörnchen. Beide sind grösser als die Exemplare von Martinique und Rio.

18) Panulirus bürgeri de Haan.

Japan. Salmin.

Bei unserem Exemplare (♀) dieser seltenen Art finde ich alle Angaben Ortmanns bestätigt.

19) Panulirus japonicus v. Siebold
stimmt überein mit den Ortmann'schen Angaben.

Das Exemplar nähert sich der Var. femoristriga in der Bedornung des Antennensegmentes, indem 2 kleine Dörnchen hinter dem Hauptdorn stehen, einige davor. Diese Nebendörnchen sind aber alle schwach ausgebildet. — Der Cephalo-

thorax ist mit Schuppen bedeckt, deren Rand mit einem Cilienkranz versehen ist. Ebenso besitze ich ein Exemplar von P. guttatus Latr., welches am ganzen Cephalothorax die gleiche Erscheinung zeigt. Nachdem ich ausserdem noch bei mehreren Arten sehr verschiedener Gattungen dieselbe Erscheinung habe konstatieren können, bin ich zu der Ansicht gelangt, dass die betreffenden Exemplare kurz vorher eine Häutung durchgemacht hatten. Die meisten der in Betracht kommenden Stücke zeichneten sich auch durch eine brilliante, wohlerhaltene Färbung aus. Ehe ich bei mehreren Arten diese Eigenschaft bemerkt hatte, bat ich den erfahrenen Crustaceenkenner Ortmann um seine Ansicht in dieser Sache; derselbe vertritt durchaus die Auffassung, dass es sich um eine Begleiterscheinung des Panzerwechsels handelt.

Ich fasse diese Schuppen also als eine Form der Häutungshaare auf, wie sie bei Arthropoden und bei schuppentragenden Wirbeltieren vorkommen. Wenn wir aber diese Gebilde physiologisch nehmen, als vorübergehende Erscheinungen zu einem gewissen Zweck, so wird dadurch ihre Bedeutung als Artmerkmal sehr beeinträchtigt; die mit diesem Merkmal unterschiedenen Arten z. B. der Gattungen Eriphia, Plagusia bedürfen also einer gewissenhaften Nachprüfung. Es erheischen übrigens noch viele der Höcker-, Schuppen- und Stachelbildungen auf dem Panzer der Crustaceen eine biologische Erklärung, und viele derjenigen Skulpturen, welche man als charakteristisch für eine Art beschrieben hat, erweisen sich als wechselnd nach Alter und Zustand des Individuums.

20) Panulirus orientalis n. sp.

Steht dem dasypus M.-Edw. sehr nahe, unterscheidet sich von ihm aber durch folgende Merkmale:

Während am 2. Gnathopoden die Ekphyse fehlt, besitzt diejenige des 1. Gnathopoden eine ganz kurze Geissel. Die Beine sind marmoriert, Abdomensegmente glatt. In den meisten anderen Merkmalen ist keine auffallende Abweichung vorhan-

den. Es sind 2 Dornen auf dem Antennensegment, am Hinterrand der Abdomensegmente findet sich je ein blaues und ein weisses Band. Auf den 4 ersten Abdomensegmenten finden sich Spuren einer nicht unterbrochenen Behaarung, ohne dass aber eine Furche auch nur angedeutet wäre.

Japan. Salmin.

21) Panulirus dasypus M.-Edw.

1 mittleres Exemplar, Färbung ganz abgeblasst. Die Abdomenfurchen sind deutlich und unterbrochen.

2 grosse, trockene Exemplare (♀) mit 4 Hauptdornen des Antennensegmentes, glatten Abdomensegmenten (aber Spuren gewesener Behaarung), keiner Ekphyse des 2. Gnathopoden und mit Ortmanns Beschreibung übereinstimmender Färbung.

Diese drei Exemplare scheinen mir sehr für de Mans Ansicht zu sprechen, dass die Arten polyphagus und fasciatus nur verschiedenen Altersstufen einer und derselben Species entsprechen. Vgl. Ortmann, Zool. Jahrb. Abt. Syst. Bd. X. S. 263.

Japan. Salmin.

22) Scyllarus aequinoctialis Fabr.

Obwohl bei meinen Exemplaren die Höcker deutlich behaart sind, scheint mir die Art doch von latus Latr. wohl unterscheidbar.

Surinam. Salmin. Antillen.

23) Scyllarides latus Latr.

Madeira. Herzog von Leuchtenberg.

War von den Canarischen Inseln schon bekannt.

24) Scyllarus arctus L.

1 juv. Rio Janeiro. Selenka 77.

Die Art von Miers schon für Senegambien angegeben scheint nach diesem Fund tropisch atlantisch zu sein; besonders häufig ist sie allerdings in der mediterranen Region.

25) Arctus tuberculatus Sp. Bate.

s. Challenger Report, Macrura S. 70.

Ein junges Exemplar liegt mir vor, welches dadurch auffallend ist, dass alle Höcker und Dornen in Form von Schuppen mit Cilien vorhanden sind. Vgl. hiezu das weiter oben unter Panulirus japonicus v. Sieb. gesagte.

Die Challenger Exemplare wurden zwischen Neu Guinea und Australien gedredgt. Mein Exemplar stammt aus Japan ohne genauere Angabe leg. Salmin.

IV. Nephropsidea.

26) Astacus fluviatilis Rond.

In unserer ziemlich grossen und von zahlreichen Fundorten stammenden Sammlung von Exemplaren dieser Art fielen mir besonders diejenigen

von Hof (Bayern) v. Siebold und aus dem Plötzensee bei Berlin auf.

Dieselben haben zumteil den Rand des Rostrums als Leiste fortgesetzt, so weit als der zweite postorbitale Höcker reicht; derselbe ist auch an einzelnen Exemplaren dornartig ausgebildet, würde also zu colchicus gehören. Da solche Variationen vorkommen, halte ich die letztere Art für nicht ganz sicher.

27) Astacus pallipes Penn.

Mailand (Fischmarkt). v. Siebold.

Diese Exemplare zeigen die Leiste auf dem Rostrum lange nicht so ausgesprochen, wie alle anderen von sehr zahlreichen verschiedenen Fundorten stammenden Stücke unserer Sammlung. Es ist also wohl anzunehmen, dass es sich um eine Zwischenform, vielleicht einen Bastard mit torrentium handelt.

28) Cambarus putnami Faxon.

Erie, Kreuzpointner.

29) Parastacus agassizii Faxon.

Lag. Llanquihué (Puerto Montt) Süd-Chile (leg. Heppke).

Meine Exemplare 12 ♂ und ♀ stimmen in allen äusseren Merkmalen durchaus mit der genauen Definition von Faxon (Proc. U. S. N. Mus. XX. 1898) überein. Nur die Kiemenformel weicht etwas ab. Vielleicht waren Kiemen an den schon so lange aufbewahrten Exemplaren der Hassler Expedition (1872), welche Faxon vorlagen, schon etwas maceriert und wurden von ihm daher nicht ganz richtig gesehen.

Ich finde:

	Podobranchien	Arthrobranchien		Pleurobranchien	Im Ganzen
VII.	ep.	0	0	0	= ep.
VIII.	1	1	0	0	= 2
IX.	1	1	1	0	= 3
X.	1	1	1	0	= 3
XI.	1	1	1	1	= 4
XII.	1	1	1	1	= 4
XIII.	1	1	1 (r)	1	= 4
XIV.	0	0	0	1	= 1
Summe	6 + ep	6	4 + r	4	

ep = Epipod r = rudimentär.

Die Gesammtzahl stimmt also, nur finde ich bei X keine Pleurobranchie, dagegen bei XIV eine.

Die Zähne am Merus des grossen Scheerenfusses sind undeutlich; die Mittelleiste auf dem innersten Blatt der letzten Abdominalanhänge endet ohne Spitze oder Dorn.

V. Paguridea.

30) Coenobita diogenes Latr.

1) Antillen. Salmin.
2) Savanilla. Essendorfer 2 ♂ 2 ♀.

Die Augenstiele sind durchaus nicht ausgesprochen rund, sondern nach der Medianebene abgeflacht, allerdings sind sie nicht so abgeplattet, wie diejenigen der indo-pazifischen Arten. Sonst stimmen die Exemplare gut mit Beschreibungen und Abbildungen überein.

31) Coenobita clypeatus Herbst.

1) Ceylon. Schlagintweit.
2) Celebes. Ludeking.

32) Coenobita rugosus.

var. wagneri nov. var.

Aehnelt sehr der var. pulchra Dana. Das dritte linke Schreitbein ist auf der Aussenseite bei weitem nicht so sehr abgeflacht, wie bei rugosus typ. Die schrägen Leisten auf der grossen Hand sind nur schwach ausgebildet, fehlen beim ♀. Beim ♂ linke coxa des 5. Pereiopoden schwächer vorgezogen als bei rugosus.

Scaphocerit der äusseren Antennen verwachsen, an beiden Scheeren Haarpolster. Augenstiele comprimiert. Am 5. linken Pereiopoden Aussenseite der Kralle glatt mit scharfer Kante, bei den übrigen Gliedern abgerundet, sehr schwach behaart.

Rio Bayano, bei Panama.
Pacifischer Ocean. M. Wagner.

Die Art ist also mit ihren verschiedenen Varietäten durch die ganze indopazifische Region bis in die westamerikanische verbreitet.

33) Coenobita spinosus M-Edw.

var. olivieri Owen.

Ostafrika. Engelhardt 1895.

Die Augenstiele sind oben mit sehr deutlichen Dörnchen bedeckt.

War bisher nur aus dem östlichen Indopacific bekannt.

34) Clibanarius speciosus Miers.

1) Campeche Bai. Salmin.
2) Kamerun. Gouverneur v. Zimmerer.

Stimmen beide genau mit der Beschreibung des Typus überein.

3) Savonilla. Essendorfer 76.

(Viele ♂ und ♀ jung und alt.)

Bei diesen sind zwar die Krallen viel länger als der Propodus, aber bei Exemplaren vom selben Fundort sind bald die hellen, bald die dunklen Streifen auf den Beinen breiter. Folglich gehört dies letztere Merkmal nicht in die Speziesdiagnose.

35) Clibanarius padavensis de Man.

Ceylon. Schlagintweit.

36) Clibanarius aequabilis Dana.

Tenerife. Rothpletz 87.

37) Clibanarius infraspinatus Hgdf.

Ceylon. Schlagintweit.

38) Pagurus striatus Latr.

var. pectinata Ortm.

St. Thomas. Essendorfer 76.

Bestätigt vollkommen die von Ortmann aufgestellte Varietät; auch der von ihm als nicht sicher angegebene Fundort (Brasilien) wird durch meine Exemplare wahrscheinlich gemacht. Sollte sich die var. pectinata in der Folge als auf die westlichen Litoralgebiete des atlantischen Ozeans beschränkt herausstellen, so dürfte es sich empfehlen, sie als gute Art abzutrennen.

39) Pagurus deformis M-Edw.

Ceylon. Schlagintweit.

Zwitter, wie die Exemplare von Ortmann und Hilgendorf.

40) Paguristes hians Hend.

4 ♀ Ceylon. Schlagintweit.
(Manila Challenger-Henderson).

VI. Galatteidea.

41) Aeglea laevis Latr.

See Llanquihué bei Puerto Montt, Heppke.

VII. Hippidea.

42) Lepidopa myops Stm.

Mazatlan. Salmin.

Stimpson beschrieb die Art vom Cap St. Lucas.

43) Albunea symmysta L.

Indischer Ocean.

44) Albunea pareti Guérin.

Campêchebai. Salmin.

Auch mir scheinen A. pareti, Gibbesi und lucasia zu einer Art zu gehören, vielleicht ist nur die letztere abzutrennen.

45) Remipes adactylus denticulatifrons Miers.

Caïro. Billharz.

(Wird wohl vom rothen Meer stammen.)

VIII. Oxystomata.

46) Mursia cristimanus Desm.

St. Helena. Salmin.

Bisher bekannt von der Cap-Küste.

47) Calappa convexa de Sauss.

" xanthusiana Stm.

Die Art steht in der Mitte zwischen japonica Ortm. und granulata L. Der Cephalothorax ist sehr stark gewölbt, also wie bei japonica, vielleicht sogar mehr. Die Höcker des Cephalothorax sind sehr stark, wie bei japonica.

Grösste Breite ungefähr beim 4. Hinterseitendorn, Dornen mit gekörnten Kielen wie bei granulata.

Der dritte Dorn ist der grösste am Hinterrand, aber der 4. ist überhaupt der grösste.

Wo bei granulata die innersten Dornen stehen, finden sich hier nur stumpfe Höcker. Vor dem grössten Dorn (4.) noch 3 deutliche, dann 2 undeutliche, dann Körner: was alles

von granulata abweicht. Spitze des äusseren Lappens des 3. Siagnopoden abgestutzt und stumpf ausgerandet (wie japonica).

Der Vergleich mit der Diagnose von C. xanthusiana Stimpson zeigt vollkommene Uebereinstimmung.

Wenn es sich nachweisen liesse, dass in den verschiedenen Altersstufen die Dornverhältnisse des Seiten- und Hinterrandes varriiren, so würde es sich höchstens um eine Varietät von japonica Ortm. handeln, welche dann über den nördlichen Pacific eine weitere Verbreitung besässe.

Mazatlan. Salmin.

48) Calappa gallus Hbst.

Kantavu, Viti Inseln. Dr. Buchner 1876.

49) Cryptosoma granulosum de Haan.

Chinesisches Meer. Salmin.

Das Exemplar hat auffallend weit vorstreckbare Augenstiele.

IX. Brachyura s. s.

50) Euphylax dovii Stm.

Pontarenas (Niederkalifornien). Salmin.

51) Portunus puber L.

Altata (Westküste von Mexiko). Salmin.

Bisher ist die Art nur aus dem atlantischen Ozean und dem Mittelmeer bekannt; daher halte ich die Zuverlässigkeit der Fundortsangabe vorläufig für anfechtbar.

52) Neptunus marginatus M-Edw.

Bucht von Rio Janeiro. Essendorfer 76.

Die Art ist von Milne-Edwards für Gaboon angegeben. Meine Exemplare befanden sich in einem Glas beisammen mit Callinectes sapidus Rathb., von dem sie sich aber durch die Form des Hinterleibs deutlich unterscheiden.

53) Neptunus hastatoïdes Fabr.

Sansibar. Salmin.

Bisher nur von östlicheren Fundorten bekannt.

54) Thalamita sima M-Edw.

juv. Rotes Meer. Fischer.

Dies junge Exemplar hat nur 4 Seitenrandzähne, während die erwachsenen deren 5 haben sollen; es wäre interessant festzustellen, ob dies eine regelmässige Erscheinung ist.

55) Myomenippe legoullii A. M-Edw.

Meine Exemplare, welche sonst in jeder Beziehung mit Abbildungen und Beschreibung der granulosa von Milne-Edwards übereinstimmen, besitzen eine, wenn auch schwache, so doch deutliche Gaumenliste, was nicht zu der Ortmann'schen Diagnose der Familie stimmen würde.

Cap York. Salmin.

56) Lophozozymus cristatus M-Edw.

Das Exemplar unterscheidet sich durch feineres Netz der Thorakalfärbung und mangelnde Behaarung der Scheeren vom Typ des Milne-Edwards. (Letzteres auch Ortmann, Z. J., Abt. Syst. VII, p. 457.)

57) Actaea granulata Aud.

Die 3 ♀ zeigen die typischen Granula, doch Annäherung der Fingerspitzen zur Löffelform, nähern sich damit den Actaeodes.

Auch ist die Art sehr ähnlich hystrix Miers, dessen Challenger-Exemplar ebenfalls vom Cap York herrührte; nur sind die Thoraxgranula verschieden.

Cap York. Salmin leg.

58) Actaea setigera M-Edw. (?)

Die Pereiopoden sind oben scharf gekantet, das Abdomen des ♂ ist 7 gliedrig. Bemerkenswert der Schutz des Auges durch ein Schüppchen mit Behaarung.

Südsee (?). Salmin.

59) Actaea granulosa Ad. und Wh.

Mein Exemplar stimmt vollkommen mit der Beschreibung von Adams und White überein. Ich glaube aber nicht, dass die Art thatsächlich zur Gattung Actaea gehört; es bestehen Beziehungen zu Xantho und zu Zogymus.

Siam. Salmin.

60) Actaea polyacantha Heller.

Ich vermute, dass die Art sich als identisch erweisen wird mit Actaea hystrix Miers (Challenger). Die 2 Exemplare von Ortmann (l. c.) aus dem Museum Godeffroy (jetzt im Strassburger Museum) unbekannten Fundorts stammen jedenfalls auch aus dem Indopacific; Miers Exemplar vom Cap York.

Rotes Meer. Pruner leg.

61) Xantho bidentatus M-Edw.

Unterscheidet sich durch die Zähne am Vorderseitenrand gut von punctatus; meine Exemplare sind jung; beim ♂ ist das Abdomen 7 gliedrig, die Furchen auf der Oberfläche ziemlich ausgesprochen.

Cap York. Salmin leg.

62) Xantho melanodactylus M-Edw.

Surinam. Salmin leg.

Bisher nur von der atlantischen Küste Afrikas bekannt.

63) Panopeus hartii S. Smith.

Diese Art ist offenbar in den Sammlungen selten vertreten. — Bisher: Abrolhos, M.-Edwards, Mission au Mexique.

Surinam. Salmin leg.

Familie Potamonidae Ortmann.

(Thelphusidae aut.)

64) Potamon fluviatile (Belon.)

Ein ziemlich grosses Material von verschiedenen Fundorten, welches mir vorliegt, scheint mir für lokale Variationen der Art zu sprechen. Doch kann ich mich über eine Auf-

stellung von geographischen Varietäten noch nicht entscheiden, dazu reicht mein Material nicht aus. Um aber die Untersuchung durch Jemand, dem vielleicht grösseres Material vorliegt, anzuregen, gebe ich folgende Beobachtungen:

Der Postfrontalrand zeigt bei den Exemplaren aus Aegypten und vom roten Meer meist glatte Linien; bei den Italienern sind die Ränder meist mehr oder weniger grob gekörnelt, während bei den palästinischen der ganze Rand mehr verwischt ist.

65) Potamon aurantium (Herbst).

2 ♂ aus Ceylon.
1 grösseres. Schlagintweit leg.
1 kleineres. Fruhstorfer leg.

Bei beiden ist der Hinterleib gleichartig ausgebildet; sonst sind kleine Verschiedenheiten vorhanden, welche ich auf das verschiedene Alter zurückführe.

66) Potamon larnaudi (M-Edw.).

Gehört in die Reihe des P. fluviatile in seiner ost-südlichen Ausbreitung. War bisher nur aus Hinterindien bekannt.

Calcutta. Schlagintweit leg.

67) Potamon vic. larnaudi.

Viele Exemplare aus Simla, Himalaya. Schlagintweit leg.

Ein Sammeltypus mit Charakteren von ibericum, denticulatum, larnaudi. Ist daher von grossem Interesse für die Frage der Abstammung und geographischen Verbreitung der Gruppe des P. fluviatile. P. larnaudi scheint überhaupt sehr zu variiren; ein weiteres Exemplar:

68) Potamon vic. larnaudi

weist durch seinen stark geschweiften Stirnrand auf Sinuatifrons hin.

Sumatra. Hofrat Martin leg.

69) Potamon (Potamonautes) indicum Latr.

1) 1 ♂ aus Jablpur (Malwa), Centralindien. Schlagintweit leg.
2) 1 ♂ Ceylon. Fruhstorfer 89.

Ist vielleicht ein juv. einer anderen Art, da indicum nach Wood-Mason im südlichen und östlichen Indien nicht vorkommen soll. Er ist auch durch die Form des Hinterleibes

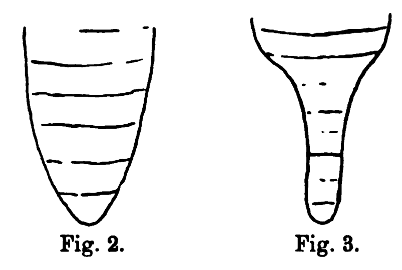


Fig. 2. Fig. 3.

ausgezeichnet. Fig. 2 stellt das Abdomen des typischen, Fig. 3 dasjenige des ceylonischen Exemplars dar. Ueberhaupt ist die Form des Abdomens zur Unterscheidung mancher Formen von grosser Wichtigkeit.

70) Potamon (Potamonautes) guerini M-Edw.

Ceylon. Schlagintweit leg.

Bisher von Ceylon nicht bekannt. Die Exemplare stimmen in einigen Punkten mehr mit der Diagnose von guerini, in anderen mehr mit planata überein, welche Arten sicher mit Recht von Ortmann zusammengezogen sind.

71) Potamon (Potamonautes) inflatum M-Edw.

stimmt am meisten mit inflatum überein, ähnelt jedoch sehr den afrikanischen Arten der perlatum-Gruppe. Daher wohl auch die Verwechslung durch Milne-Edwards. s. Ortmann t. J. Abt. syst. X. p. 308).

Nord-Ceylon, Reisfelder bei Candelay, Juni 1887. Fruhstorfer leg.

72) Potamon (Geothelphusa) obtusipes Stm.

Calcutta. Schlagintweit leg.

Bisher bekannt von Manila und den Liu Kiu Inseln. Die Spitzen der Finger sind mit feinen hornartigen Häckchen versehen, welche stark umgebogen sind, dadurch erscheinen die Finger obtusi. Das gleiche gilt für die stumpfen Endglieder der Schreitbeine.

73) Potamon (Geothelphusa) augustifrons M-Edw.

Cap York. Salmin.

♀ und ♂; gehört sicher zur Untergattung Geothelphusa.

74) Parathelphusa tridentata M-Edw.

1) ♂ ♀ Borneo. Rupert.
2) ♂ ♀ Boemi Ajoë (Borneo). Selenka und Scharfenberg.
3) ♂ ♀ Sumatra. Martin.

Die Granulationen, welche den hintersten Zahn mit der Postfrontalleiste verbinden, sind sehr deutlich, die Verhältnisse bei sinensis lassen darauf schliessen, dass eigentlich der hinterste Zahn als Epigastricalzahn aufzufassen ist. — Die Leiste erinnert sehr an Potamonautes, so dass die Gattung (wohl eher Untergattung) sich vielleicht von diesen ableiten lässt.

Familie Grapsidae.

75) Grapsus grapsus L.

Die sehr variable Form liegt von mehreren Fundorten beider Hemisphären vor; einige Merkmale scheinen aber konstant zu variiren. Es sind verschieden:

1) Der Anterolateralzahn,
2) die lateralen Stirnhöcker,
3) die 2 Stacheln auf der Stirnfläche.

	Oestliche Fundorte	Westliche Fundorte
1) Zahn	stumpfer Winkel	spitzer Winkel
2) Höcker	schmal	breit
3) Stachel	undeutlich	sehr deutlich
Fundorte:	Ras Muhammed Sinaihalbinsel Ostafrikanische Küste	Surinam Madeira

76) Goniopsis cruentatus Latr.

1) Atlantische Küste von Amerika. Essendorfer 76.
2) Kamerun. Gouverneur v. Zimmerer.

Die Suborbitallappen erreichen bei den meisten Exemplaren die Stirn nicht gänzlich, sind also durchaus nicht mit derselben

verwachsen; aber sie schliessen dennoch die Antennen so ziemlich von der Orbita aus. Nur bei dem ältesten Exemplar von Kamerun erreicht der Suborbitallappen die Stirn vollständig.

Von Kamerun war die Art noch nicht bekannt.

77) Metopograpsus latifrons White.

Meine Exemplare stimmen sehr genau mit der Diagnose von de Man überein, sodass ich gegenüber Ortmann dennoch geneigt bin, den viel schlankeren M. pictus M-Edw. für spezifisch verschieden zu halten. Besonders genau stimmen die Massverhältnisse des Carapax mit de Man (30 : 23).

Cap York. Salmin leg.

78) Pachygrapsus gracilis de Sauss.

Campeche Bai. Salmin leg.

79) Pachygrapsus transversus Gibbes.

Canarische Inseln. Minutoli leg.

80) Heterograpsus nudus Dana.

1) S. Francisco. Buchner 78 } leg.
2) Pacific Grove. Doflein 98 }

scheint mir identisch zu sein mit oregonensis Dana.

81) Sarmatium curvatum M-Edw.

Kamerun. v. Zimmerer leg.

82) Plagusia depressa Fabr.

Surinam. Salmin leg.

83) Plagusia immaculata Lam.

Rockhampton, Queensland. Salmin leg.

84) Plagusia tuberculata Lam.

1) Madeira. Herzog von Leuchtenberg.
2) Tenerife. Rothpletz 1887.

Durch diese beiden Fundorte wird die Art, welche bisher aus dem ganzen Indo-Pacific vom Rothen Meer bis zur Westamerikanischen Küste angegeben worden war, auch aus dem atlantischen Ozean nachgewiesen. Sie erweist sich damit als circumtropisch.

—

Ob dabei continuirliche Uebergänge zu depressa existieren oder ob dies selbst eine unsichere Art ist, vermag ich nicht zu entscheiden.

85) Sesarma cinerea Bosc.

Neue Fundorte: Martinique. Doflein leg.
Campêche Bai. Salmin leg.
Columbien. Prinzessin Therese v. Bayern leg.

86) Cardisoma guanhumi Latr.

Lagos und Gabon. Salmin leg.

Diese Exemplare beweisen mir die von Ortmann angenommene Identität von armatum mit guanhumi.

87) Ocypoda gaudichandii M-Edw. et Luc.

Panama, atlant. Seite. M. Wagner leg.

Auf der Etikette ausdrücklich als vom atlantischen Ocean stammend bezeichnet, während die Art bisher nur von der pazifischen Küste bekannt ist.

88) Ocypoda ceratophthalma Pallas.

Cap York. Salmin leg.

Sehr kurze Augenfortsätze!

Von grösserem Interesse dürften diejenigen der angeführten Verbreitungsdaten sein, welche sich auf die atlantische, die indopazifische Provinz und die Gegend des Isthmus von Panama beziehen. Während die letzteren manches Zweifelhafte enthalten und die Notwendigkeit einer Untersuchung der mittelamerikanischen Meeresfauna vor dem Bau eines interoceanischen Kanals sehr wünschenswert erscheinen lassen, bringen die ersteren eine Anzahl von Belegen für unsere tiergeographische Auffassung der grossen Oceangebiete.

Für das atlantische Gebiet ergab sich für eine Reihe von Arten, welche bisher erst von der einen Küste bekannt waren, dass sie auch an der gegenüberliegenden vorkommen, so für bisher nur in Brasilien gefundene ein westafrikanischer Fundort und umgekehrt. Wahrscheinlich werden diese Fälle immer

häufiger werden, je mehr insbesondere die westafrikanische Meeresfauna erforscht wird; diese bietet dem Sammeln dadurch gewisse Schwierigkeiten, dass selten solche Anhäufungen von Individuen und Arten zu finden sind, wie an den Küsten mit Korallenriffen.

Für die indo-pazifische Provinz hatte ich einige Resultate der gleichen Art zu verzeichnen. Auffallend ist die Ausbreitung mancher Arten bis in die westamerikanische Provinz, so von Coenobita rugosus mit der nov. var. Wagneri. Genauere Untersuchungen über die Ausdehnung der letzteren Provinz fehlen ja noch; das Vorkommen indopazifischer Arten im Golf von Panama lässt es möglich erscheinen, dass die Provinz nur eine schmale Zone umfasst, welche bedingt ist durch die kalten Strömungen und das kalte Auftriebwasser längs der Westküste von Nord- und Südamerika.

---

b) von Herrn Privatdozenten Dr. Ernst Weinschenk: „Chemisch-geologische Studien; zur Kenntniss der Graphitlagerstätten

II. Alpine Graphitlagerstätten.

III. Die Graphitlagerstätten der Insel Ceylon."

Beide Abhandlungen sind für die Abhandlungen der Akademie bestimmt.

Ueber die Konstruktion von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen.

Von **S. Finsterwalder.**

(Eingelaufen 5. Mai.)

(Mit Taf. I.)

Hat man von einem Objekt zwei Photographieen E' und E'' mit innerer Orientierung, das heisst solche, zu welchen die relative Lage des zugehörigen perspektivischen Centrums bekannt ist, so reichen dieselben theoretisch ohne weiteres hin, um das dargestellte Objekt sowie die Lage der beiden Aufnahmepunkte gegenüber demselben bis auf den Massstab zu bestimmen.[1]) Die Kenntnis irgend einer Länge des Objekts genügt dann zur Festlegung des Massstabes. Bis jetzt ist ein in allen Fällen praktisch gangbarer Weg zur Lösung dieser Aufgabe nicht bekannt. Man bedarf dazu der von Herrn Guido Hauck so benannten gegnerischen Kernpunkte,[2]) d. i. der gegenseitigen Perspektiven des einen Standpunktes vom andern aus, deren Auffindung beträchtlichen rechnerischen oder konstruktiven Schwierigkeiten begegnet. Indessen, selbst wenn

[1]) Vergl. z. B. das Referat des Verfassers über die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd., S. 15.

[2]) Ebenda S. 9, sowie die Abhandlungen des Herrn Hauck über die Theorie der trilinear-projektivischen Systeme, Crelle's Journal, Bd. 96 und 97.

wir einen Weg zur Lösung der genannten Aufgabe hätten, wäre damit für die photogrammetrische Terrainaufnahme vom Ballon aus wenig gedient, denn bei einer solchen handelt es sich nicht blos um die Ermittelung der Terrainformen an sich, sondern speziell um ihre Beziehung zur Lotrichtung. Eine Kurvenaufnahme des Terrains z. B., bei welcher die Ebenen der Kurven nicht horizontal sind, würde, obwohl sie die Terrainformen vollständig darstellt, wenig nützen. Zwar würde bereits die Kenntnis des Fluchtpunktes der Lotlinien auf einer der beiden photographischen Perspektiven zur Herstellung der richtigen Horizontalkurven ausreichen, allein die oben gekennzeichneten Schwierigkeiten lassen es geraten erscheinen, sich bei der Lösung der Aufgabe nicht auf das theoretisch zulässige Minimum an Kenntnis des darzustellenden Objektes und der zugehörigen Lotrichtung zu beschränken. Nur so erzielt man nämlich nicht nur eine ausführbare Lösung, sondern auch Kontrollen, welche die Richtigkeit derselben sicher stellen.

Zunächst sei vorausgesetzt, man kenne Grundriss und Höhe von vier auf zwei photographischen Bildern E' und E'' dargestellten Punkten des Terrains A, B, C, D, sowie von den beiden photogrammetrischen Standpunkten O_1 und O_2 (Ballonörter); man soll Grundriss und Höhe irgend eines weiteren auf beiden Bildern dargestellten Terrainpunktes P finden. Später soll auseinandergesetzt werden, auf welche Weise man in den verschiedenen Fällen die Ballonörter bestimmt, bezw. wie man auf die Kenntnis eines oder zweier Terrainpunkte verzichten kann.

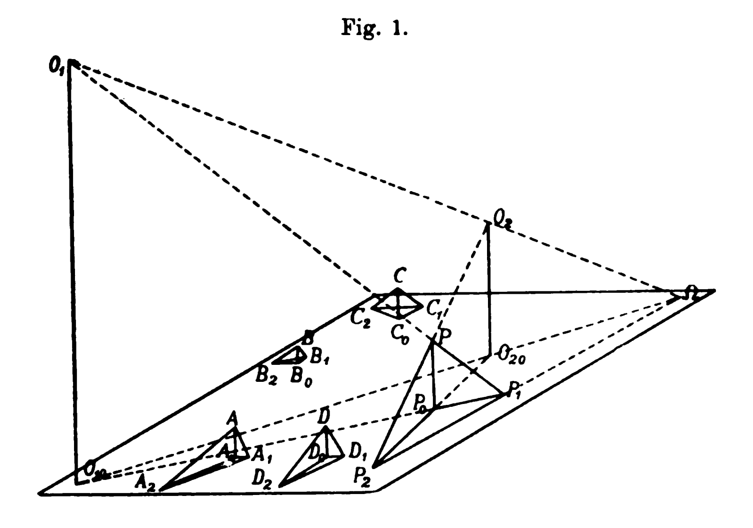
Zur Lösung der erstgenannten Aufgabe bedient man sich am besten der Vermittelung der beiden Perspektiven des Terrains von den jeweiligen Standpunkten auf die Grundrissebene E_0. Es seien O_1 und O_2 (vergl. Fig. 1) die Standpunkte (Ballonörter), O_{10} und O_{20} ihre Grundrisse, P ein Punkt des Terrains, P_1 und P_2 dessen Perspektiven von den beiden Standpunkten aus auf die Grundrissebene und P_0 dessen Grundriss. Kennt man P_1 und P_2, so erhält man P_0 als Schnitt von $O_{10} P_1$ und $O_{20} P_2$. Die Höhe $P_0 P$ des Punktes P über dem Grundriss ergibt sich zweifach aus folgenden Proportionen:

$$\begin{aligned} P_0 P : O_{10} O_1 &= h : H_1 = P_1 P_0 : P_1 O_{10} \\ P_0 P : O_{20} O_2 &= h : H_2 = P_2 P_0 : P_2 O_{20}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei H_1 und H_2 die Ballonhöhen sind.

Ausserdem muss die Verbindungslinie $P_1 P_2$ durch den Punkt Ω gehen, in welchem $O_1 O_2$ die Grundrissebene schneidet. Nur in diesem Fall schneiden sich nämlich die beiden Strahlen $P_1 O_1$ und $P_2 O_2$ in einem Punkt des Raums. Diese Probe ist äquivalent mit der Höhenprobe, welche sich bei der doppelten Ausrechnung von h aus den beiden Proportionen ergibt.

Fig. 1.



Somit ist die Konstruktion von Grundriss und Höhe des Terrainpunktes auf die Bestimmung von P_1 und P_2 zurückgeführt. Diese aber kann einfach auf folgende Weise geschehen (vergl. Fig. 1): Es seien A_1, B_1, C_1, D_1 die 4 Punkte, welche durch Centralprojektion von O_1 aus auf die Grundrissebene aus den 4 bekannten Terrainpunkten A, B, C, D entstehen und sich aus deren Grundrissen A_0, B_0, C_0, D_0 und den zugehörigen Höhen ohne weiteres konstruieren lassen (vergl. Fig. 1). Es ist nun das Punktfeld A_1, B_1, C_1, D_1, P_1 der Ebene E_0 perspektiv zum photographischen Bild A', B', C', D', P' der

Ebene E' von O_1 aus, daher kann P_1 aus P' linear ermittelt werden. Dies geschieht am sichersten rechnerisch, wobei man von der Bemerkung ausgeht, dass die (rechtwinkeligen, schiefwinkeligen oder projektiven) Koordinaten von P_1 in der Grundrissebene E_0 mit den Koordinaten von P' in der Bildebene E' durch linear gebrochene Relationen[1]) zusammenhängen, deren Koeffizienten sich dann besonders einfach bestimmen lassen, wenn in den beiden projektiven Ebenen jene Parallel-Koordinaten x_1, y_1 bezw. x', y' eingeführt werden, welche zu den Verbindungslinien $A_1\,C_1$ und $B_1\,D_1$ resp. $A'\,B'$ und $C'\,D'$ als Axen gehören (vergl. Fig. 2). Die Relationen können dann so geschrieben werden:[2])

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} &= \alpha + \beta \frac{y'}{x'} + \gamma \frac{1}{x'}, \\ \frac{\varkappa}{y_1} &= \alpha \frac{x'}{y'} + \beta + \gamma \frac{1}{y'}. \end{aligned} \tag{2}$$

Zur Bestimmung von α, β, γ, $\varkappa$ hat man nun folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} &= \alpha + \gamma \frac{1}{a'} \\ -\frac{1}{c_1} &= \alpha - \gamma \frac{1}{c'} \\ \frac{\varkappa}{b_1} &= \beta + \gamma \frac{1}{b'} \\ -\frac{\varkappa}{d_1} &= \beta - \gamma \frac{1}{d'} \end{aligned} \tag{3}$$

---

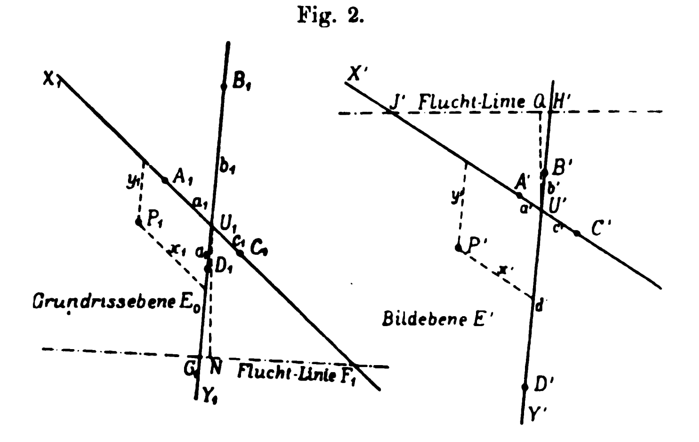
[1]) Siehe etwa: Clebsch-Lindemann's Vorlesungen über Geometrie, Bd. 1, S. 250 u. ff.

[2]) Ebenso einfach werden übrigens die Relationen, wenn man an Stelle der schiefwinkeligen Koordinaten der Punkte ihre normalen Abstände von den oben genannten schiefwinkeligen Koordinatenaxen nimmt. Diese normalen Abstände haben vor den schiefwinkeligen den Vorteil voraus, dass sie in den Bildern ohne weitere Konstruktion direkt mit dem Zirkel abgegriffen werden können.

Die Buchstaben a_1, b_1, c_1, d_1 bezw. a', b', c', d' bezeichnen dabei die absoluten Werte der Koordinaten der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 bezw. A', B', C', D' im genannten System (vergl. Fig. 2). Aus den Gleichungen (3) lassen sich die Konstanten der Formeln (2) folgendermassen successive berechnen:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{c_1}}{\frac{1}{a'} + \frac{1}{c'}} \\ \alpha &= \frac{1}{a_1} - \frac{\gamma}{a'} = \frac{\gamma}{c'} - \frac{1}{c_1} \\ \varkappa &= \gamma_1 \frac{\frac{1}{b'} + \frac{1}{d'}}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{d_1}} \\ \beta &= \frac{\varkappa}{b_1} - \frac{\gamma}{b'} = \frac{\gamma}{d'} - \frac{\varkappa}{d_1} \end{aligned} \tag{4}$$

Fig. 2.



Entnimmt man dem Bilde E' die Koordinaten x', y' von P', so kann man nun mittels der Formeln (2) die Koordinaten x_1, y_1 des Punktes P_1 der Grundrissebene finden. Die Formeln

(2) sind bereits in jene Gestalt gebracht, welche für den Gebrauch des Rechenschiebers am vorteilhaftesten erscheint. In analoger Weise findet man die Koordinaten x_2, y_2 von P_2, wobei man vorher die Koeffizienten jener neuen Formeln zu berechnen hat, durch welche der Zusammenhang zwischen den x_2, y_2 des Punktes P_2 der Ebene E_0 und x_2', y_2' des Punktes P_2' der zweiten Photographie E'' dargestellt ist. Die Koordinaten x_2, y_2 sind auf ein von dem früheren etwas verschiedenes Koordinatensystem bezogen, da A_2, B_2, C_2, D_2 im allgemeinen nicht mit A_1, B_1, C_1, D_1 zusammenfallen werden. Hat man so die Punkte P_1 und P_2 nach ihren Koordinaten aufgetragen, so ergibt sich P_0, wie erwähnt, als Schnitt von $P_1\,O_{10}$ und $P_2\,O_{20}$ und die Höhe h auf doppelte Weise aus den Proportionen (1).

Will man die Rechnung vermeiden, so kann man sich zur Bestimmung der Punkte P_1 und P_2 auch der durch 4 Punktepaare gegebenen projektiven Beziehung des Möbius'schen Netzes bedienen, wie ich bei einer andern Gelegenheit auseinandergesetzt habe. (Vergl. das S. 149 citierte Referat S. 6.) Um längeren Konstruktionen in den Ebenen der Photographieen E' und E'' aus dem Wege zu gehen, wird man ein in die Bilder mechanisch einkopiertes Quadratnetz in die Grundrissebene E_0 übertragen, wo es dann als Möbius'sches Netz erscheint.[1]) Es ist dies auf rein graphischem Wege allerdings nur sehr schwierig mit der nötigen Genauigkeit zu erreichen. Sollen die Vorteile, welche das Möbius'sche Netz bei der Bestimmung einer grossen Zahl von Punkten bietet, nicht durch Ungenauigkeit der zeichnerischen Ausführung beeinträchtigt werden, so ist es das Empfehlenswerteste, die Randpunkte des Quadratnetzes der Bildebene auf dem rechnerischen Wege mittels der Formeln (2) in die Ebene E_0 zu übertragen und durch Ziehen der Verbindungslinien das Netz zu vervollständigen. Die weitere Ausführung der Netzmaschen, bezw. die Eintragung der Punkte P_1 und P_2 geschieht dann auf dem

---

[1]) In der beifolgenden Tafel I ist ein solches Möbius'sches Netz eingetragen.

Wege der Proportionalteilung, indem man die projektive Beziehung der Ebenen E' bezw. E'' und E_0 innerhalb einer Masche näherungsweise durch eine affine Beziehung ersetzt.

Aus den Formeln (2) kann man übrigens sehr einfach die Lage der Fluchtlinien in den Ebenen E' bezw. E'' und E_0 berechnen (vergl. Fig. 2). Sind p_1 und q_1 die Abschnitte der Fluchtlinie auf den Koordinatenaxen in E_0, p' und q' die analogen Grössen in E', so ergeben sich aus (2) die einfachen Beziehungen

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\alpha}; \quad & q_1 &= \frac{\varkappa}{\beta} \\ p' &= -\frac{\gamma}{\alpha}; \quad & q' &= -\frac{\gamma}{\beta} \end{aligned} \tag{5}$$

Kann man nun über das dem Möbius'schen Netz zu Grunde gelegte Quadratnetz in E' noch verfügen, so legt man dasselbe am besten parallel zur Fluchtlinie und erreicht dadurch, dass eine Schar von Linien des Möbius'schen Netzes ebenfalls parallel zur Fluchtlinie wird. Man erspart dann die Umrechnung eines Teiles der Randpunkte.

Neben der oben auseinandergesetzten Methode, die beiden Punktfelder P_1 und P_2 in der Ebene E_0 auf projektivem Wege aus den photographischen Bildern zu entwickeln, ist noch eine mehr elementare denkbar, die auf den Regeln der darstellenden Geometrie beruht und bei welcher man den Grundriss und Aufriss der projizierenden Strahlbüschel von O_1 und O_2 aus zu Hilfe nimmt. In der Praxis versagt die direkte Anwendung dieser Methode wegen ihrer Ungenauigkeit und Unbequemlichkeit. Die Genauigkeit der Methode hängt nämlich in erster Linie davon ab, wie scharf die Ermittelung der äusseren Orientierung der beiden Strahlbündel O_1 und O_2 gelingt und jeder Fehler in den Ballonörtern oder in der Stellung der Bilder geht in vollem Betrag auf die zu konstruierenden Terrainpunkte über. Hingegen ist die projektive Methode von der Genauigkeit der Ballonörter fast unabhängig, solange nämlich die Ballonhöhen sehr gross gegen die Terrainhöhenunterschiede sind. Wären letztere Null, so brauchte man die

Ballonörter überhaupt nicht, die beiden Punktfelder P_1 und P_2 in E_0 würden sich decken und direkt die Horizontalprojektion liefern. Aber noch ein weiterer sehr wesentlicher Vorteil spricht zu gunsten der projektiven Methode. Während man bei der Methode der darstellenden Geometrie auf die Richtigkeit der metrischen Verhältnisse angewiesen ist und daher immer auf das Originalnegativ oder auf ein davon abgenommenes Glasdiapositiv zurückgehen muss, kann man bei der projektiven Methode ohne weiteres mit fixierten Papierbildern oder Vergrösserungen arbeiten, da ja die Veränderungen, die diese gegenüber dem Originalnegativ zeigen, sehr genau durch eine affine oder projektive Transformation ersetzt werden können, und daher die Werte der Doppelverhältnisse, auf die es bei der projektiven Methode allein ankommt, nicht beeinträchtigen. Durch die Benützung von Vergrösserungen lässt sich aber die Genauigkeit und Bequemlichkeit erheblich steigern. Wenn es sich wie in der Regel bei den Terrainaufnahmen um die Eintragung des Konstruierten in die vorhandenen Karten handelt, so hat man bei der Methode der darstellenden Geometrie noch mit dem Papiereingang der Karte, der in der Regel nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, zu kämpfen, was bei der projektiven Methode wegfällt, sobald man die Ausgangsmasse derselben Karte entnommen hat.

Es sollen nun die Methoden erwähnt werden, die zur Ermittelung der Ballonörter Verwendung finden können.

a) Sind zwei Ebenen wie E' und E_0 projektiv aufeinander bezogen (vergl. Fig. 3), so ist ein geometrischer Ort des Centrums O, in bezug auf welches sie perspektiv gelegt werden können, gegenüber einer der beiden Ebenen, z. B. E_0, ein Kreis, dessen Ebene normal auf E_0 steht und dessen Mittelpunkt in der Fluchtlinie dieser Ebene liegt. Seine Elemente lassen sich aus den Formeln (2) und (4) leicht berechnen. Für den Radius r gilt:

$$r = \frac{U' Q}{H' J'} \cdot F_1 G_1$$

für den Kreismittelpunkt M gilt:

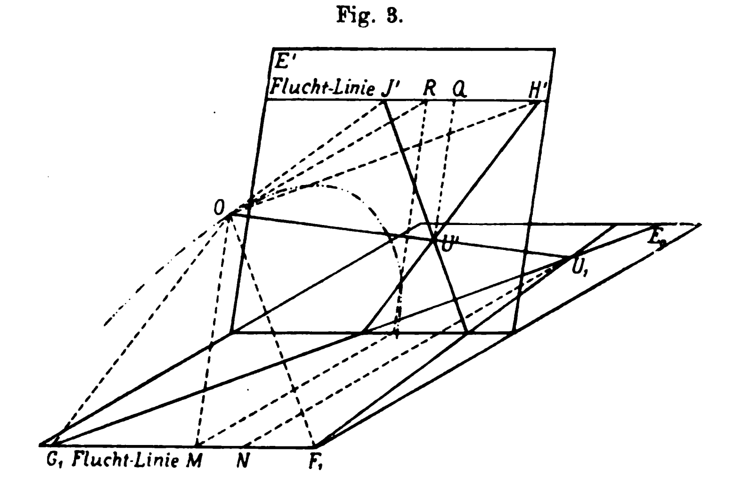
$$G_1 M = \frac{H' Q}{H' J'} \cdot F_1 G_1 .$$

Diese Relationen folgen aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

$$U_1 G_1 F_1 \sim O H' J' \text{ und}$$
$$O \; G_1 F_1 \sim U' H' J'.$$

Kennt man die Bildweite des photographischen Bildes E', d. h. den Normalabstand des Centrums O von der Ebene E', so ist die Lage von O auf dem Kreise bestimmt. Ein Versuch auf diesem Wege die Lage des Ballonortes zu bestimmen, scheitert zumeist an der Ungenauigkeit des Verfahrens. Es

Fig. 3.



setzt dasselbe nicht nur voraus, dass die metrischen Verhältnisse in Bild und Karte durch keine Papierkontraktion oder Vergrösserung geändert wurden, sondern wenn diese Verhältnisse auch zutreffen, ist doch der geometrische Ort (Kreis) von O so wenig bestimmt, dass ein befriedigendes Resultat nicht leicht erzielt wird. Es wird dies plausibel, wenn man bedenkt, dass die perspektive Abbildung von E' auf E_0 wegen des meist kleinen Bildfeldes annähernd zur affinen wird und bei einer solchen der gesuchte geometrische Ort in die ganze unendlich ferne Ebene ausartet.

b) Bessere Resultate erzielt man, wenn man die ganze innere Orientierung jeder der Photographieen und drei Punkte des Terrains als gegeben ansieht. Aus der inneren Orientierung ergibt sich das Dreikant der Projektionsstrahlen nach den bekannten Terrainpunkten, das man dann so in den Raum zu stellen hat, dass seine drei Kanten durch die vorgegebenen Terrainpunkte gehen. Diese Aufgabe ist zwar nicht mit Zirkel und Lineal lösbar, lässt aber rasche und praktisch ausreichende Näherungskonstruktionen zu.[1])

c) Besonders einfach wird die Konstruktion des Ballonortes, wenn der Fluchtpunkt der Vertikalen aus der Photographie entnommen werden kann. Um letzteres zu ermöglichen, lässt man eine Reihe von langen Lotleinen vom Aequator des Ballons herabhängen, welche dann bei der Aufnahme mitphotographiert werden. Der Schnittpunkt der Bilder derselben gibt den gesuchten Fluchtpunkt. In diesem Fall genügt ausser der Kenntnis der inneren Orientierung die von nur zwei Terrainpunkten.[2])

Gelingt in den Fällen b) und c) die Orientierung mit der nötigen Schärfe, so kann man versuchen, für die weitere Konstruktion ohne Kenntnis eines vierten bezw. dritten und vierten Terrainpunktes auszukommen, indem man auf dem Wege der darstellenden Geometrie aus einem oder zwei Paaren von Bildern identischer Terrainpunkte Grundriss und Höhe derselben rekonstruiert und dann nach der projektiven Methode weiter verfährt. Freilich ist das erzielte Resultat in hohem Masse von der Richtigkeit der Positionen der Terrainpunkte und der Lotrichtung abhängig.[3])

---

[1]) Vergl. das S. 149 citierte Referat S. 26.

[2]) Ebenda S. 29. Ueber die praktische Anwendung dieser Ballonortsbestimmung siehe des Verfassers Aufsatz in den Illustrierten äronautischen Mitteilungen 1899, S. 31, auch im Jahresbericht des Münchener Vereins für Luftschiffahrt für das Jahr 1898, S. 33.

[3]) Wiederholte Erfahrungen haben gezeigt, dass die vom Aequator des Ballons herabhängenden Lote, deren Bilder bei c) zur Verwendung kommen, doch nicht selten ziemlich weit von der Lotrichtung abweichen, namentlich dann, wenn sich der Ballon in der Nähe des Gebirges bewegt.

Die oben auseinandergesetzten Methoden wurden an der Hand eines ziemlich umfangreichen Materials an Ballonbildern des Münchener Vereins für Luftschiffahrt geprüft. Speziell für Höhenaufnahmen wurden zwei Bilder verwendet, welche bei einer Vereinsfahrt am 18. November 1899 aufgenommen wurden und die Ortschaft Waal bei Kaufbeuern aus einer relativen Höhe von ca. 900 m darstellen. Die eine von ihnen wurde von Herrn Baron v. Bassus mit einem dem Verein gehörigen Apparat mit konstanter Bildweite auf eine Platte vom Format 12 × 16 cm aufgenommen. Die Bildweite des Objektivs, ein Orthostigmat von Steinheil, beträgt 152 mm. Die zweite Aufnahme, von Herrn Privatdozent Dr. Heinke herrührend, wurde mit einer sogenannten Bruns-Kamera im Format 9 × 12 cm gemacht. Das zugehörige Objektiv ist ein Goerz'scher Doppel-Anastigmat mit 149 mm Bildweite. Die Ballonörter wurden nach der Methode b) aus 3 Terrainpunkten bestimmt. Es war zwar der Ballon bei der Abfahrt mit Lotleinen ausgerüstet, allein infolge eines Versehens hatten sich dieselben verwirrt, so dass nicht die genügende Zahl (mindestens zwei) von Lotleinen auf einer Photographie zur Abbildung kam. Die innere Orientierung der erst genannten Aufnahme wurde auf folgendem Wege bewerkstelligt. Im Inneren des Apparates befindet sich ein rechteckiger Rahmen, dessen Umrisse auf dem Negativ zur Abbildung gelangen. Infolge der Einrichtung zum Wechseln der Glasplatten ist ein absolut genaues Anliegen derselben an den Rahmen nicht zu erreichen, man kann aber, wenn die inneren Orientierungselemente (Hauptpunkt und Bildweite) für die Ebene des Rahmens vorher bestimmt waren, aus dem Vergleich der Dimensionen des Rahmenbildes und jener des wirklichen Rahmens die zur Lage der Glasplatte im Moment der Aufnahme gehörigen Orientierungselemente bestimmen. Es verhält sich nämlich unter der Voraus-

---

Allerdings sind dann die relativen Luftbewegungen gegenüber dem Ballon so stark, dass sie bereits fühlbar werden. Es ist ein Missstand der angegebenen Methode, dass man kein sicheres Kriterium für das normale Herabhängen der Lotleinen besitzt.

setzung, dass die Unterschiede der beiden in Betracht kommenden Ebenen (der Rahmenebene und der Ebene der Platte) sehr klein sind, die zur Platte gehörige Bildweite zu der zum Rahmen gehörigen wie der Umfang des Rahmenbildes zum wirklichen Rahmenumfang. Der Hauptpunkt erleidet in Richtung der Rahmenseiten Verschiebungen, die sich mittels Formeln folgender Art berechnen lassen:

$$\alpha = \frac{d^2}{a\,b}(b_2 - b_1), \quad \beta = \frac{d^2}{a\,b}(a_2 - a_1),$$

wobei d die genannte Bildweite, a und b die Seiten des Rahmens bedeuten, b_2 und b_1 resp. a_1 und a_2 die Verkürzungen der beiden Rahmenseiten b resp. a, und α bezw. β die Verrückung des Hauptpunktes in Richtung der Seite a bezw. b und zwar nach der stärker verkürzten Seite hin bedeuten. Für die Dimensionen des benützten Apparats ist der Faktor $\frac{d^2}{a\,b} = 1{,}6$, es können also die Veränderungen des Hauptpunktes infolge der nichtparallelen Stellung der Platte zum Rahmen mit einer allerdings etwas geringeren Genauigkeit ermittelt werden, als die Messungsgenauigkeit auf dem Negativ beträgt. Die zugehörige Ballonhöhe wurde nach der genannten Methode dreimal bestimmt, wobei die Zahlen 957 m, 933 m und 945 m, im Mittel 945 $\pm$ 7 m resultierten. Für die Höhe des zweiten Ballonortes ergab sich in ähnlicher Weise 898 m. Die horizontale Entfernung der beiden Ballonorte betrug 1676 m (vergl. die Tafel I). Als Projektionsebene wurde eine in der mittleren Höhe von 637 m des darzustellenden Terrains gelegene Horizontalebene gewählt. Für die weiteren Ausarbeitungen stellte ich im mathematischen Institut Vergrösserungen der erwähnten Ballonbilder her und zwar wurde die erste Aufnahme dreifach, die zweite doppelt vergrössert. Um zunächst die Genauigkeit der nach der projektiven Methode unter weniger günstigen Verhältnissen zu gewinnenden Horizontalpositionen zu prüfen, wählte ich auf dem zweiten Bild E'' vier in der beigegebenen Tafel I durch Dreiecke markierte Punkte, die ich auf dem

Katasterblatt S. W. VII. 26. im Massstabe 1 : 5000 identifizieren konnte. Ihre Höhen entnahm ich den Horizontalkurven des Positionsblattes Nr. 739 Waal. Es wurden nun 120 Punkte der Photographie in die Grundrissebene mittels der Formeln (2) übertragen. Wurden dieselben mit dem Grundriss des Ballonortes verbunden, so mussten die Verbindungslinien durch entsprechende Punkte der Katastralaufnahme hindurchgehen. Das traf auch im allgemeinen zu, doch stellte sich heraus, dass das im Jahre 1811 aufgenommene Blatt trotz der Korrekturen aus den Jahren 1841, 1849 und 1877 soviele Unterschiede an den Gebäuden, den Strassenzügen, den Wasserläufen und den Flurgrenzen, soweit letztere zu erkennen waren, aufwies, dass eine zweifellose Identifizierung, so wie sie für eine Höhenaufnahme unbedingt nötig wäre, nicht wohl möglich war. Für die bestimmten Punkte wurden zum leichteren Vergleich mit der Katastralaufnahme die Korrekturen wegen der Erhebung der betreffenden Terrainpunkte über das Ausgangsniveau unter Zugrundelegung der dem Positionsblatt entnommenen Höhen gerechnet. Nach den so ermittelten Positionen wurde ein Teil des hydrographischen Netzes rekonstruiert, welches zum Vergleich mit der Katastralaufnahme in der beiliegenden Tafel im verkleinerten Massstabe 1 : 25000 reproduziert wird. Die Verschiedenheiten gegenüber der Katastralaufnahme erklären sich zum grössten Teil durch die Veränderungen, welches das hydrographische Netz sei es durch den natürlichen Verlauf, sei es durch künstlichen Eingriff erfahren hat (Verlegung und teilweise Abschnürung der Serpentinen des Singold-Baches einerseits, dann Trockenlegung des Walker Weihers andrerseits). Die nicht ganz befriedigende Uebereinstimmung mit der Katastralaufnahme wird zum Teil auch auf der nicht vollkommen sicheren Identifizierung der Ausgangspunkte beruhen. Um für die Höhenaufnahme hievon möglichst unabhängig zu sein, orientierte ich das Koordinatensystem, das zum Umrechnen der andern Aufnahme E' diente, nicht nach Punkten der Katastralaufnahme, sondern nach auf beiden Photographieen sicher zu identifizierenden Punkten der

obengenannten Rekonstruktion. Dadurch fallen die etwa vorhandenen systematischen Fehler derselben für die Höhenbestimmung fast vollständig hinaus. Nun wurden für etwa 30 Punkte, welche auf beiden Aufnahmen identifiziert werden konnten,[1]) die Höhen gerechnet und dabei das in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellte Resultat erhalten. Da sich für jeden Punkt zwei Höhen rechnen lassen, so kann man aus der Uebereinstimmung der beiden einen mittleren Fehler einer Höhenbestimmung zu 0,92 m, denjenigen einer Höhe zu 0,65 m berechnen. Dabei stellt sich heraus, dass die vom zweiten Standpunkt aus genommenen Höhen durchschnittlich um 0,49 m grösser sind als die vom ersten Standpunkt aus aufgenommenen. Wird dieser systematische Fehler abgerechnet, so bleibt ein mittlerer zufälliger Fehler von 0,85 bezw. 0,60 m. Das Mass desselben beweist, dass die Rekonstruktion der Positionen bis auf etwa 0,2 mm bis 0,4 mm im Massstab 1 : 5000 gelungen ist. Es unterliegt keinem Zweifel, dass sich bei noch grösserer Sorgfalt eine erhebliche Steigerung der Genauigkeit erzielen liesse. Immerhin ist die bereits gewonnene Genauigkeit schon höher als die eines systematischen Nivellements mit dem Aneroid.

Für die praktische Verwertung ist der Zeitaufwand, welcher für die einzelnen Operationen nötig ist, von grosser Wichtigkeit und es mögen daher einige Angaben darüber gestattet sein. Die Konstruktion eines Ballonortes nach der Methode b) erfordert, sobald man die Dimensionen der Karte direkt entnehmen kann, ca. 30 Minuten Zeit, die Ausrechnung der Konstanten für die Formeln (2) etwa ebensoviel. Die Anwendung der Formeln (2) ist auf je 5 Minuten Zeitaufwand zu veranschlagen. Ebensoviel Zeit bedarf die Herstellung der Horizontalposition und die doppelte Höhenrechnung, sodass sich die für einen kotierten Punkt noch aufzuwendende Zeit auf 15 bis 20 Minuten beläuft. Arbeitet man mit dem Möbius'schen Netz,

[1]) Die Zahl der identifizierbaren Punkte hätte sich auf einige Hundert vermehren lassen.

Tabelle der doppeltgemessenen Höhen der Terrainpunkte.

Nr.	mm $P_1 P_0$	mm $P_1 O_{10}$	m h_1	mm $P_2 P_0$	mm $P_2 O_{20}$	m h_2	m $\Delta = h_2 - h_1$	Δ^2
2	1,7	208	7,7	2,2	224	8,1	0,4	0,16
5	1,7	312	5,2	1,9	314	5,4	0,2	0,04
6	1,2	318	3,6	1,5	251	5,4	1,8	3,24
7	− 1,2	216	− 5,3	− 2,4	350	− 6,1	− 0,8	0,64
11	− 0,4	245	− 1,5	− 0,3	195	− 1,7	− 0,2	0,04
12	0,8	210	3,6	0,6	168	3,2	− 0,4	0,16
31	0,1	195	0,5	0,3	223	1,2	0,7	0,49
32	− 0,2	197	− 1,0	0,0	215	0,0	1,0	1,00
63	0,2	282	0,7	0,2	167	1,1	0,4	0,16
64	0,0	256	0,0	0,0	188	0,0	0,0	0,00
62	0,2	265	0,7	0,0	150	0,0	− 0,7	0,49
65	0,8	275	2,7	1,2	240	4,5	1,8	3,24
66	1,1	276	3,8	1,2	249	4,3	0,5	0,25
70	− 0,5	254	− 1,9	0,0	271	0,0	1,9	3,61
71	− 0,4	234	− 1,6	− 0,5	271	− 1,7	− 0,1	0,01
71a	− 0,2	283	− 0,7	− 0,5	274	− 1,6	− 0,9	0,81
71b	− 1,2	280	− 4,1	− 1,8	272	− 6,0	− 1,9	3,61
72	− 0,6	222	− 2,6	− 0,3	280	− 1,0	1,6	2,56
73a	− 0,9	226	− 3,8	− 1,0	298	− 3,0	0,8	0,64
83	1,1	214	4,9	1,0	232	3,9	− 1,0	1,00
106	− 0,8	174	− 4,3	− 1,3	312	− 3,7	0,6	0,36
108	− 0,8	222	− 3,4	− 1,7	309	− 4,9	− 1,5	2,25
109	− 0,9	199	− 4,3	− 1,9	332	− 5,1	− 0,8	0,64
111	− 0,5	192	− 2,5	− 0,4	312	− 1,2	1,3	1,69
113	0,8	314	2,4	1,1	212	4,6	2,2	4,84
100	1,0	328	2,9	1,1	288	3,4	0,5	0,25
107	0,8	287	2,6	1,5	293	4,6	2,0	4,00
114[1]	13,3	242	52,0	16,0	264	54,5	2,5	6,25
116	− 0,4	158	− 2,4	0,1	219	0,4	2,8	7,84
119	0,2	266	0,6	0,2	358	0,5	− 0,1	0,01
							14,6 $= \Sigma\Delta$	50,28 $= \Sigma\Delta^2$

Hiernach ist der mittlere Fehler einer Bestimmung:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{2n}} = \pm \sqrt{\frac{50,28}{60}} = \pm 0,92 \text{ Meter}$$

und der mittlere Fehler einer Höhe $M = 0,707\, m = 0,65$ Meter.

---

[1]) Der Punkt 114 liegt nicht auf dem Terrain selbst, sondern ist die Spitze des Kirchturms von Waal.

so ist für die Herstellung eines solchen im Massstab 1 : 5000 wohl eine mehrstündige Arbeitszeit anzusetzen. Der für den einzelnen Punkt benötigte Zeitaufwand reduziert sich dann allerdings auf die Hälfte, also auf ca. 10 Minuten. Eine noch weitergehende Abkürzung des Verfahrens liesse sich durch eine rein mechanische Umzeichnung des Ballonbildes E' in die Ebene E_0 mittels eines Perspektographen ermöglichen. Dadurch, dass man nicht das Ballonbild E' selbst, sondern eine Vergrösserung desselben zur Umzeichnung benützt, lassen sich die zufälligen Fehler des Verfahrens jedenfalls auf ein zulässiges Mass reducieren. Ob ein Gleiches mit den systematischen Fehlern auch gelingt, bedarf noch genauer Untersuchung.

Conforme Abbildung der Halbebene auf ein Flächenstück, welches von einer circularen Kurve dritter Ordnung oder einer bicircularen Kurve vierter Ordnung begrenzt wird.

Von **Johann Goettler.**

(*Eingelaufen 11. Mai.*)

(Mit Taf. II u. III.)

Im Jahre 1894 hat Herr Professor Lindemann eine Methode angegeben,[1]) nach der das Problem der conformen Abbildung für eine Kurve

$$f(z, z_1) = 0$$

erledigt werden kann, wenn sich eine rationale Funktion von x und y mit reellen Coeffizienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (Φ eine rationale Funktion)

$$\frac{\Phi(z, z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

eine rationale Funktion von z wird. Dabei ist bemerkt, dass dieser Fall unter andern bei der Ellipse und Parabel (von Schwarz behandelt), bei der Hyperbel (von Lindemann behandelt), ferner bei der circularen Kurve dritter Ordnung und der bicircularen Kurve vierter Ordnung vorliegt. Die beiden letztgenannten Fälle sollen hier behandelt werden.

[1]) Sitzungsberichte der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 7. Juni 1894.

§ 1. Circulare Kurven dritter Ordnung.

I. Die Gleichung einer circularen Kurve dritter Ordnung kann bei bekannter Bezeichnungsweise geschrieben werden:

$$\alpha z^2 z_1 + \alpha_1 z_1^2 z + \beta z z_1 + \gamma z^2 + \gamma_1 z_1^2 + \delta z + \delta_1 z_1 + \varepsilon = 0. \quad (1)$$

Setzt man hierin $\alpha = A - i \cdot A'$, $\beta = 2B$, $\gamma = C - i \cdot C'$, $\delta = D - i \cdot D'$, $\varepsilon = E$, so erhält man die Gleichung der Kurve in gewöhnlichen Coordinaten:

$$2(x^2 + y^2)(Ax + A'y) + 2x^2(B + C) + 2y^2(B - C) + 4xyC' \\ + 2Dx + 2D'y + E = 0.$$

Jede dieser Kurven besitzt zwei konjugiert imaginäre Asymptoten:

$$2(A \pm iA')(x \pm iy) + 2C \pm iC' = 0$$

und eine reelle Asymptote:

$$(A^2 + A'^2)(Ax + A'y) + A' \cdot [A^2(B - C) + A'^2(B + C) - AA'C'] = 0.$$

Figur 1 gibt eine circulare Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt; die X Achse ist die reelle Asymptote. Figur 2 ist eine solche Kurve mit Doppelpunkt; Figur 3 ein spezieller Fall von 2. Figur 4 eine circulare Kurve mit isoliertem Punkt ($x = y = 0$). Die reelle Asymptote ist in Figur 2, 3 und 4 als punktierte Gerade gezeichnet.

II. Aus der Gleichung $f(z, z_1) = 0$ der Kurve (1) folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = - \frac{\partial f}{\partial z_1} \cdot dz_1$$

und hieraus:

$$\frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right] \\ = \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz_1}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right],$$

wenn Z eine reelle Grösse ist.

Die Funktion:

$$\Phi(z, Z) \equiv \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] - \frac{d}{dZ}\left[\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]$$

ist also am Rande der Kurve $f = 0$ überall reell.

Aus Gleichung (1) ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = a^2 \cdot z^4 + z^3 \cdot (2 a \beta - 4 a_1 \gamma) + z^2 \cdot (\beta^2 + 2 a \delta_1 - 4 a_1 \delta - 4 \gamma \gamma_1)$$
$$+ z \cdot (2 \beta \delta_1 - 4 a_1 \varepsilon - 4 \gamma_1 \delta) + (\delta_1^2 - 4 \gamma_1 \varepsilon). \qquad (2)$$

Setzt man $M = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2$ und $z' = \frac{dz}{dZ}$, so ist:

$$\Phi(z, Z) = \frac{d}{dZ}(\log z') - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dZ}(\log M). \qquad (3)$$

Die Pole der Funktion Φ sind erstens die Punkte $M = 0$, d. h. die Brennpunkte der Kurve $f = 0$. Ist $z = a$ ein solcher Punkt und $Z = A$ sein Bild, so ist in seiner Nähe:

$$z - a = (Z - A) \cdot \mathfrak{P}(Z - A).$$

Mithin ist Φ an dieser Stelle dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z - A} + \mathfrak{P}(Z - A). \qquad (4)$$

Liegt ferner ein isolierter Punkt im Innern des abzubildenden Flächenstückes (Fig. 4), so ist an dieser Stelle, wenn $z = b$ der fragliche Punkt und $Z = B$ sein Bild ist:

$$z - b = (Z - B) \cdot \mathfrak{P}(Z - B);$$

Φ ist also in der Nähe dieses Punktes dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = \frac{-1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \qquad (5)$$

Es ist nämlich vermöge $M = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2$ in diesem Falle $(z - b)$ ein quadratischer Faktor von M.

Enthält der Rand des Flächenstückes einen Doppelpunkt der Kurve und ist $\gamma \cdot \pi$ der Winkel der im Doppelpunkt ge-

zogenen Tangenten, so ist in der Nähe dieses Punktes die Kurve durch die Tangenten dargestellt und somit nach dem Schwarz'schen Satz[1]) an dieser Stelle, wenn $z = c$ der Doppelpunkt und $Z = C$ sein Bild ist:

$$z - c = (Z - C)^{\gamma} \cdot \mathfrak{P}(Z - C).$$

Hieraus folgt, da $z - c$ ein quadratischer Faktor von M ist, wiederum:

$$\Phi(z, Z) = \frac{-1}{Z - C} + \mathfrak{P}(Z - C). \tag{6}$$

Liegt ferner der Punkt $z = \infty$ am Rande des Flächenstückes und ist $Z = D$ sein Bild, so hat die Entwicklung statt:

$$z = \frac{1}{Z - D} \cdot \mathfrak{P}(Z - D).$$

Es restiert hieraus:

$$\Phi(z, Z) = \mathfrak{P}(Z - D). \tag{7}$$

Dieser Punkt $z = \infty$ ist also als gewöhnlicher Punkt des Randes zu betrachten.

---

[1]) Unter dem „Schwarz'schen" Satz verstehen wir den von H. A. Schwarz in Crelle Bd. 70, p. 109 aufgestellten Satz: „Die allgemeinste Funktion, durch welche der in der Nähe des Scheitels $z = c$ liegende Teil der Fläche eines Winkels $\gamma \cdot \pi$ $[\gamma > 0]$ in der Ebene

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \quad [0 < \varphi \overline{\overline{<}} \gamma \cdot \pi;\ 0 < r < r_0]$$

auf die Ebene $Z = R \cdot e^{i\Phi}$ $[0 < \Phi \overline{\overline{<}} \pi]$ conform so abgebildet wird, dass in der Nähe dieser Stelle jedem Punkt z ein stetig mit ihm fortrückender Punkt Z entspricht, während die Werte $r = \mathrm{mod}\, c$, $Z = C$; $\varphi = 0$, $\Phi = 0$; $\varphi = \gamma \cdot \pi$, $\Phi = \pi$ einander entsprechen, ist in der Nähe dieses Punktes dargestellt durch:

$$z - c = (Z - C)^{\gamma} \cdot \mathfrak{P}(Z - C)".$$

Hiebei bedeutet C eine reelle Zahl, $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe mit reellen Coeffizienten. Der Satz gilt zunächst für einen geradlinig begrenzten Winkel $\gamma \cdot \pi$ und lässt sich sofort nach Schwarz (l. c. pag. 116) auf einen von Kreisbögen gebildeten Winkel erstrecken.

Die in der genannten Arbeit gemachten Schlüsse reichen aber auch hin, wenn der Winkel $\gamma \cdot \pi$ von beliebigen Kurven begrenzt wird und die Darstellung auf die Umgebung des Punktes $z = c$, $Z = C$ sich beschränkt.

Der Punkt $z = \infty$ kann auch im Innern des Flächenstückes liegen; auch in diesem Fall ist:

$$\Phi(z, Z) = \mathfrak{P}(Z - D). \tag{7a}$$

Es kann (bei Kurven vierter Ordnung) auch der Fall eintreten, dass der Grad von M,[1]) welcher im allgemeinen der vierte ist, sich um ϱ Einheiten reduciert ($\varrho = 1, 2, 3, 4$). In diesem Fall gilt für den Punkt $z = \infty$, mag er nun im Innern oder am Rande des Flächenstückes liegen, die Entwicklung

$$\Phi(z, Z) = -\frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{Z - D} + \mathfrak{P}(Z - D). \tag{8}$$

Hat $M = 0$ eine σ fache Wurzel $z = b$ und liegt dieser Punkt im Innern des Flächenstückes, so ist

$$M = (Z - B)^{\sigma} \cdot \mathfrak{P}(Z - B)$$

und deshalb an dieser Stelle

$$\Phi(z, Z) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \tag{9}$$

Liegt aber der Punkt $z = b$ am Rande des Flächenstückes und ist der Winkel an jener Stelle $\beta \cdot \pi$, so ist $\Phi(z, Z)$ in der Nähe dieser Stelle dargestellt durch:

$$\Phi(z, Z) = \frac{(2 - \sigma) \cdot \beta - 2}{2} \cdot \frac{1}{Z - B} + \mathfrak{P}(Z - B). \tag{10}$$

Ist $R(Z)$ eine rationale Funktion von Z, welche für reelle Z reell ist und in bekannter Weise den Anforderungen der Gleichungen 4 bis 10 entsprechend gewählt ist, so ergibt sich die Abbildung des Flächenstückes auf die Halbebene vermittelt durch eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(z, Z) = R(Z)$$

oder:

$$\int^{z} \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int^{Z} dZ \cdot e^{\int R(Z) \cdot dZ} + D' \tag{11}$$

D und D' sind Konstante, die Integrale als Funktionen der obern Grenzen zu betrachten. Sehr zu bemerken ist, dass beide Seiten der Gleichung (11) elliptische Integrale sind.

---

[1]) Confer Gleichung 25, pag. 176.

III. Wir betrachten die durch die Kurve (Fig. 1)

$$z^2 \cdot z_1 - z \cdot z_1^2 = 2\,a^3\,i$$

oder

$$(x^2 + y^2) \cdot y = a^3$$

zerschnittene Ebene. Die Rechnung ergibt:

$$M = z\,(z^3 - 8\,a^3\,i).$$

$M = 0$ hat also die vier Wurzeln $a_1 = 0$; $a_2 = -2\,a\,i$; $a_3 = a\,(i + \sqrt{3})$; $a_4 = a\,(i - \sqrt{3})$.

Entsprechen die Punkte $z = a_1$ und $Z = A$, $z = a_2$ und $Z = A'$ einander, so wird das unterhalb der Kurve befindliche Flächenstück auf die Halbebene abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^3 - 8a^3 i)}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \quad (12)$$

Durch dieselbe Gleichung wird das oberhalb der Kurve befindliche Flächenstück abgebildet, wenn $Z = A$ das Bild von $z = a_3$ und $Z = A'$ das des Punktes $z = a_4$ ist.

Um $\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}}$ zu reducieren, setzt man

$$z = \frac{-2\,a\,i\,(1 - t)}{(\sqrt{3} + 1) + t\,(\sqrt{3} - 1)}$$

und findet:

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{z\,(z^3 - 8\,a^3\,i)}} = k \cdot \int \frac{d\,t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \varkappa^2\,t^2)}},$$

wobei k eine Konstante und $\varkappa = i \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3}}$ gesetzt ist.

IV. Als Beispiel einer circularen Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt betrachten wir die Kurve (Fig. 2)

$$z^2\,z_1 + z\,z_1^2 + a\,i\,(z^2 - z_1^2) - a\,z\,z_1 = 0$$

oder:

$$2\,x\,(x^2 + y^2) - 4\,a\,x\,y - a\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Derjenige Winkel der im Doppelpunkt gezogenen Tangenten, in welchem die Schleife liegt, sei $\gamma \cdot \pi$. Man findet:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 2\,a\,z\,(1 + 2\,i) - 3\,a^2].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt die Wurzelpunkte $a_1 = a\,i$; $a_2 = 2\,a + 3\,a\,i$.[1])

Bei der in den Gleichungen 4 bis 10 angewendeten Bezeichnungsweise findet man folgende Abbildungen:

a) Das von der Schleife eingeschlossene Flächenstück mit dem Winkel $\gamma \cdot \pi$.

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{Z - C} + D' \tag{13}$$

oder:[2])

$$3a^2 + az(2i+1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2a(2i+1)z - 3a^2} = D \cdot z \cdot (Z - C)^{-\gamma} \tag{13a}$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $(2 - \gamma) \cdot \pi$ — die Punkte a_1 und a_2 liegen im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)(Z - A')(Z - A_1')}} + D', \tag{14}$$

wenn

$$J = \{3a^2 + az(2i+1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2az(2i+1) - 3a^2}\} \cdot z^{-1}$$

gesetzt wird.

c) Der Raum auf der rechten Seite des Kurvenzuges — Winkel $\gamma \cdot \pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A')(Z - A_1')}} + D' \tag{14a}$$

oder:

---

[1]) In den Figuren sind die Wurzelpunkte von $M = 0$ durch numerierte Punkte dargestellt.

[2]) Die Constante D der Gleichung (13a) ist natürlich eine andere als die der Gleichung (13); dasselbe gilt auch für die folgenden Gleichungen.

III. Wir betrachten die durch die Kurve (Fig. 1)

$$z^2 \cdot z_1 - z \cdot z_1^2 = 2\, a^3\, i$$

oder

$$(x^2 + y^2) \cdot y = a^3$$

zerschnittene Ebene. Die Rechnung ergibt:

$$M = z\,(z^3 - 8\, a^3\, i).$$

$M = 0$ hat also die vier Wurzeln $a_1 = 0$; $a_2 = -2\, a\, i$; $a_3 = a\,(i + \sqrt{3})$; $a_4 = a\,(i - \sqrt{3})$.

Entsprechen die Punkte $z = a_1$ und $Z = A$, $z = a_2$ und $Z = A'$ einander, so wird das unterhalb der Kurve befindliche Flächenstück auf die Halbebene abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(z^3 - 8a^3 i)}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \quad (12)$$

Durch dieselbe Gleichung wird das oberhalb der Kurve befindliche Flächenstück abgebildet, wenn $Z = A$ das Bild von $z = a_3$ und $Z = A'$ das des Punktes $z = a_4$ ist.

Um $\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}}$ zu reducieren, setzt man

$$z = \frac{-2\,a\,i\,(1 - t)}{(\sqrt{3} + 1) + t\,(\sqrt{3} - 1)}$$

und findet:

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{z\,(z^3 - 8\,a^3\,i)}} = k \cdot \int \frac{d\,t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \varkappa^2\, t^2)}},$$

wobei k eine Konstante und $\varkappa = i \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3}}$ gesetzt ist.

IV. Als Beispiel einer circularen Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt betrachten wir die Kurve (Fig. 2)

$$z^2\, z_1 + z\, z_1^2 + a\, i\,(z^2 - z_1^2) - a\, z\, z_1 = 0$$

oder:

$$2\, x\,(x^2 + y^2) - 4\, a\, x\, y - a\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Derjenige Winkel der im Doppelpunkt gezogenen Tangenten, in welchem die Schleife liegt, sei $\gamma \cdot \pi$. Man findet:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 2\,a\,z\,(1 + 2\,i) - 3\,a^2].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt die Wurzelpunkte $a_1 = a\,i$; $a_2 = 2\,a + 3\,a\,i$.[1])

Bei der in den Gleichungen 4 bis 10 angewendeten Bezeichnungsweise findet man folgende Abbildungen:

a) Das von der Schleife eingeschlossene Flächenstück mit dem Winkel $\gamma \cdot \pi$.

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{Z - C} + D' \tag{13}$$

oder:[2])

$$3a^2 + az(2i+1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2a(2i+1)z - 3a^2} = D \cdot z \cdot (Z - C)^{-\gamma} \tag{13a}$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $(2 - \gamma) \cdot \pi$ — die Punkte a_1 und a_2 liegen im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)(Z - A')(Z - A_1')}} + D', \tag{14}$$

wenn

$$J = \{3a^2 + az(2i + 1) - ai\sqrt{3} \cdot \sqrt{z^2 - 2az(2i + 1) - 3a^2}\} \cdot z^{-1}$$

gesetzt wird.

c) Der Raum auf der rechten Seite des Kurvenzuges — Winkel $\gamma \cdot \pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern.

$$J = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A')(Z - A_1')}} + D' \tag{14a}$$

oder:

---

[1]) In den Figuren sind die Wurzelpunkte von $M = 0$ durch numerierte Punkte dargestellt.

[2]) Die Constante D der Gleichung (13a) ist natürlich eine andere als die der Gleichung (13); dasselbe gilt auch für die folgenden Gleichungen.

$$J\cdot(Z-C)^{\gamma}=D\cdot\{2(C-A')(C-A_1')+(2C-A'-A_1')(Z-C) \\ +2\cdot\sqrt{(Z-A')(Z-A_1')(C-A')(C-A_1')}\}^{\gamma} \quad (14\text{b})$$

d) Der Raum auf der linken Seite des Kurvenzuges — zwei Winkel $(1-\gamma)\cdot\pi$ — Punkt a_1 liegt im Innern.[1])

$$J=D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}+D' \quad (15)$$

oder:

$$J=D\cdot\left[\frac{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{2c'^2+b'(Z-C')+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}\cdot\frac{Z-C'}{Z-C}\right]^{1-\gamma}, \quad (15\text{a})$$

wenn

$$b=2C-A-A_1, \quad b'=2C'-A-A_1,$$
$$c^2=(C-A)(C-A_1), \quad c'^2=(C'-A)(C'-A_1)$$

gesetzt wird.

e) Der Raum auf der linken Seite des Kurvenzuges, welcher die Schleife mit enthält — Winkel $(2-\gamma)\cdot\pi$.

$$J=D\cdot\int\frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}+D' \quad (16)$$

oder:

$$J\cdot(Z-C)^{2-\gamma}=D\cdot\{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{2-\gamma} \quad (16\text{a})$$

V. Eine andere Verteilung der Wurzelpunkte von $M=0$ gibt die Kurve (Fig. 3)

$$z^2 z_1+z z_1^2+a(z^2+z_1^2)=0$$

oder
$$x(x^2+y^2)+a(x^2-y^2)=0.$$

Der Winkel der Tangenten im Punkt $z=0$ ist $\frac{1}{2}\cdot\pi$.

Es ist hier:

$$M=z^2\cdot(z^2-4az-4a^2).$$

Die Wurzeln von $M=0$ sind ausser dem Doppelpunkt $z=0$ die Punkte $a_1=2a(1-\sqrt{2})$ und $a_2=2a(1+\sqrt{2})$.

$Z=A$ sei das Bild des Punktes $z=a_1$ und $Z=A'$ dasjenige von $z=a_2$.

[1]) $Z=A$ ist das Bild von $z=a_1$ und $Z=A'$ das von $z=a_2$. Dasselbe gilt bei den Gleichungen 14 und 14a.

a) Das Innere der Schleife wird abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \tag{17}$$

Geht man durch die Transformation

$$Z = i\,\frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

von der positiven Halbebene Z auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene über und lässt die Punkte $z = 0$ und $\zeta = -i$, ferner $z = a_1$ und $\zeta = 0$ einander entsprechen, so erhält man die Abbildung:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai\cdot\sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = 2ai\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}} \tag{17a}$$

b) Das Aeussere der Schleife — Winkel $\frac{3}{2}\cdot\pi$ — der Punkt a_2 liegt im Innern des Flächenstückes.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \tag{18}$$

Ordnet man die Punkte $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_2$, $\zeta = 0$ beim Uebergang auf das Innere des Einheitskreises der ζ Ebene einander zu, so ergibt sich:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai\cdot\sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = -2ai\sqrt{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}\right]^3 \tag{18a}$$

c) Der Raum rechts vom Kurvenzug — Winkel $\frac{1}{2}\cdot\pi$ — Punkt a_2 im Innern.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\sqrt{(Z-A')(Z-A_1')}} + D' \tag{19}$$

Geht man wieder auf den Einheitskreis über und ordnet die Punkte $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_2$, $\zeta = 0$ einander zu, so ist die Abbildung gegeben durch:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai\cdot\sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = -2ai\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}} \tag{19a}$$

d) Der Raum links vom Kurvenzug — zwei Winkel $\frac{1}{2} \cdot \pi$.

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z-C)(Z-C')} + D'. \tag{20}$$

oder:

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \sqrt{\frac{Z-C'}{Z-C}}. \tag{20a}$$

Entsprechen die Punkte $z = 0$, $\zeta = +1$ und $z = 0$, $\zeta = -1$ einander, indem $z = 0$ einmal als obere, einmal als untere Ecke des Flächenstückes betrachtet wird, so erhält man:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}. \tag{20b}$$

Die Constante D ist erst bestimmt, wenn ein negativ reelles z einem rein imaginären ζ zugeordnet wird.

e) Der Raum links vom Kurvenzug, welcher die Schleife mit enthält — Winkel $\frac{3}{2} \cdot \pi$ — Punkt a_1 im Innern.

$$\int \frac{d\,z}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{d\,Z}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D'. \tag{21}$$

Unter Zuordnung von $z = 0$, $\zeta = -i$ und $z = a_1$, $\zeta = 0$ erhält man:

$$\frac{4a^2 + 2az - 2ai \cdot \sqrt{z^2 - 4az - 4a^2}}{z} = 2ai\sqrt{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\zeta} + i\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} - i\sqrt{i}}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{21a}$$

Zu bemerken ist, dass diese spezielle soeben betrachtete Kurve durch die Transformation $t = \frac{z^2}{z+a}$ in die reelle Achse der t Ebene übergeführt wird und somit die Abbildungen V auch auf anderem bekannten Weg erhalten werden können. Im allgemeinen aber ist dies nicht der Fall.

VI. Als circulare Kurve dritter Ordnung mit isoliertem Punkt betrachten wir die Kurve (Fig. 4).

$$z^2 z_1 + z z_1^2 + a\,i\,(z^2 - z_1^2) - 4\,a\,z\,z_1 = 0$$

oder:

$$x\,(x^2 + y^2) - 2\,a\,x\,y - 2\,a\,(x^2 + y^2) = 0.$$

Es ist hier:

$$M = z^2 \cdot [z^2 - 4\,a\,z\,(2 + i) + 12\,a^2].$$

Die in Betracht kommenden Brennpunkte sind nebst dem isolierten Punkt

$a_1 = 2a(2+\sqrt{2}) + 2ai(1+\sqrt{2})$ und $a_2 = 2a(2-\sqrt{2}) + 2ai(1-\sqrt{2})$;

beide Punkte liegen rechts der Kurve.

a) Ist $Z = B$ das Bild des Punktes $z = 0$, so wird das Flächenstück links vom Kurvenzug abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B)(Z-B_1)} + D' \tag{22}$$

oder:

$$\frac{6a - (2+i)z + \sqrt{3}\cdot\sqrt{z^2 - 4az(2+i) + 12a^2}}{z} = D \cdot \frac{Z-B_1}{Z-B} \tag{22a}$$

b) Sind $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$, so wird die Abbildung des Flächenstückes rechts vom Kurvenzug vermittelt durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D'. \tag{23}$$

§ 2. Bicirculare Kurven vierter Ordnung.

I. Die Gleichung einer bicircularen Kurve vierter Ordnung ist:

$$kz^2z_1^2 + az^2z_1 + a_1zz_1^2 + \beta zz_1 + \gamma z^2 + \gamma_1 z_1^2 + \delta z + \delta_1 z_1 + \varepsilon = 0, \tag{24}$$

oder, wenn

$$a = A - iA',\ \beta = 2B,\ \gamma = C - iC',\ \delta = D - iD',\ \varepsilon = E$$

gesetzt wird:

$$k(x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)(Ax+A'y) + 2x^2(B+C) + 2y^2(B-C) + 4xyC' + 2Dx + 2D'y + E = 0.$$

Die Kurve hat vier imaginäre Asymptoten, von denen je zwei parallel sind. Ist $R = \pm i$, so sind ihre Gleichungen

$$2k(x+Ry) = -(A+A'R) \pm \sqrt{A^2 - A'^2 + 2AA'R - 2k(2C+RC')}.$$

Die Kurve kann einen Doppelpunkt besitzen. Leitet man aus der Gleichung der Kurve $f = 0$ wieder nach Lindemann

$$\frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right\} - \frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right\} = \frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{dz_1}{dZ}\right)\right\} - \frac{d}{dZ}\left\{\log\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\}$$

her, so findet man wiederum, dass die Funktion

$$\Phi(z, Z) \equiv \frac{d}{dZ}\{\log z'\} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dZ}(\log M)$$

für reelle Z am Rande von $f = 0$ reell ist, wenn $z' = \frac{dz}{dZ}$ und

$$M = z^4(a^2 - 4k\gamma) + z^3(2a\beta - 4k\delta - 4a_1\gamma) + z^2(\beta^2 + 2a\delta_1 - 4a_1\delta - 4k\varepsilon - 4\gamma\gamma_1)$$
$$+ z(2\beta\delta_1 - 4a_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta) + (\delta_1^2 - 4\gamma_1\varepsilon). \qquad (25)$$

Die Funktion Φ wird unendlich erstens in den Punkten $M = 0$, zweitens in dem etwa vorhandenen isolierten Punkt, welcher im Innern liegt, drittens in einem etwa vorhandenen Doppelpunkt, welcher am Rande des betrachteten Flächenstückes liegt. Im ersten Fall gilt die obige Entwicklung der Gleichung (4), im zweiten die der Gleichung (5), im dritten die der Gleichung (6). Ferner sind die Gleichungen 8, 9 und 10 zu beachten.

Ist $z = c$ ein Doppelpunkt von $f = 0$, so ist $z - c$ ein quadratischer Faktor von M.

Die Abbildung von Flächenstücken, welche von einer bicircularen Kurve vierter Ordnung begrenzt werden, wird mithin nach den obigen Erörterungen vermittelt durch eine Gleichung der Form

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int e^{\int R(Z)\,dZ} \cdot dZ + D'. \qquad (26)$$

II. Wir betrachten zunächst die Kurve (Fig. 5)

$$2z^2 z_1^2 - 2azz_1(z + z_1) - a^3(z + z_1) = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^3 x = 0.$$

Man findet leicht:

$$M = 4z^4 + 8az^3 - 4a^2z^2 + a^4.$$

Die Gleichung $M = 0$ ist irreducibl und hat die Wurzeln

$$a_1 = -2{,}4147\, a,\quad a_2 = -0{,}3916\, a,\quad a_3 = (0{,}4032 + i \cdot 0{,}3191)\, a,$$
$$a_4 = (0{,}4032 - i \cdot 0{,}3191)\, a.$$

Die Punkte a_1 und a_2 liegen ausserhalb, die Punkte a_3 und a_4 innerhalb des Ovals.

Sind $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_3$ und $z = a_4$, so ist die Abbildung des Ovals auf die Halbebene vermittelt durch die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A')(Z-A_1)(Z-A_1')}} + D'. \tag{27}$$

Durch dieselbe Gleichung wird die Abbildung des Aeussern des Ovals geleistet, wenn $Z = A$ und $Z = A'$ die Bilder der Punkte $z = a_1$ und $z = a_2$ sind.

III. Als bicirculare Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkt wählen wir die Kurve (Fig. 6)

$$2\, z^2 z_1^2 - 2\, a\, z\, z_1 (z + z_1) - a^2 z\, z_1 + a^2 i\, (z^2 - z_1^2) = 0$$

oder:

$$2\,(x^2 + y^2)^2 - 4\, a\, x\,(x^2 + y^2) - a^2 (x^2 + y^2) - 4\, a^2 x\, y = 0.$$

Es ist:

$$M = z^2 \cdot [20\, z^2 + 4\, a\, z\,(4\, i - 3) - 3\, a^2 (1 + 2\, i)].$$

Die Wurzelpunkte von $M = 0$ sind ausser dem Doppelpunkt $a_1 = \frac{9 - 3i}{10} \cdot a$ und $a_2 = -\frac{i}{2} \cdot a$.

In jeder der beiden Schleifen liegt einer dieser Punkte.

a) Setzt man $\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = \log J$, so ist

$$J = \frac{3a(1+2i) - 2z(4i-3) - i \cdot \sqrt{3(1+2i)} \cdot \sqrt{20z^2 + 4az(4i-3) - 3a^2(1+2i)}}{z}. \tag{28}$$

Ist ferner derjenige Winkel der Tangenten des Doppelpunktes, in welchem die kleinere Schleife liegt, $\gamma \cdot \pi$, so wird das Innere einer Schleife abgebildet durch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D'. \quad (29)$$

oder:

$$J\cdot(Z-C)^\gamma = D\cdot\{2c^2 + b(Z-C) + 2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^\gamma, \quad (29a)$$

wobei $c^2 = (C-A)(C-A_1)$ und $b = 2C - A - A_1$ ist.

b) Das Aeussere einer Schleife — Winkel $(2-\gamma)\cdot\pi$ — ein Wurzelpunkt von $M = 0$ liegt im Innern des abzubildenden Flächenstückes.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \quad (30)$$

oder:

$$J\cdot(Z-C)^{2-\gamma} = D\cdot\{2c^2 + b(Z-C) + 2c\cdot\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}\}^{2-\gamma}. \quad (30a)$$

c) Das Aeussere beider Schleifen — zwei Winkel $(1-\gamma)\cdot\pi$.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \quad (31)$$

oder:

$$J = D\cdot\left\{\frac{Z-C}{Z-C'}\right\}^{1-\gamma}. \quad (31a)$$

IV. Als bicirculare Kurve vierter Ordnung mit isoliertem Punkt betrachten wir die Kurve (Fig. 7)

$$4z^2 z_1^2 - 4a(z+z_1)zz_1 - 4a^2 zz_1 + a^2 i(z^2 - z_1^2) = 0$$

oder:

$$(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) - a^2(x^2+y^2) - a^2 xy = 0.$$

Man findet:

$$M = z^2 \cdot [8z^2 + 4az(1+3i) + 3(1+i)a^2].$$

Die Wurzelpunkte von $M = 0$ sind

$$a_1 = \frac{-1 + i(\sqrt{14} - 3)}{4} a$$

und

$$a_2 = \frac{-1 - i(\sqrt{14} + 3)}{4} a.$$

Beide Punkte a_1 und a_2 liegen ausserhalb des Ovals.

Ist wiederum $\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = \log J$, so findet man leicht:

$$J = \frac{3a(1+i)+2z(1+3i)+\sqrt{3(1+i)}\cdot\sqrt{8z^2+4az(1+3i)+3a^2(1+i)}}{z}. \quad (32)$$

Die Abbildung des Innern des Ovals wird also geleistet durch die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{Z-B} + D' \quad (33)$$

oder:

$$J = D \cdot (Z-B)^{-1}. \quad (33a)$$

Das Aeussere des Ovals, welches die beiden Punkte a_1 und a_2 enthält, wird auf die Halbebene übertragen durch die Transformation:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A'_1)}} + D'. \quad (34)$$

V. Eine spezielle Gattung bicircularer Kurven vierter Ordnung sind die Cassini'schen Kurven.[1]) Die Gleichung derselben ist:

$$z^2 z_1^2 - a^2(z^2 + z_1^2) + a^4 - m^4 = 0;$$

oder

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 - m^4 = 0.$$

Für $m > a$ erhält man Figur 8, für $m < a$ Figur 9, für $m = a$ die Lemniscate von Bernoulli Figur 10.

Die Rechnung ergibt:

$$M = a^2 z^4 - z^2(2a^4 - m^4) + a^2(a^4 - m^4).$$

Die Wurzeln der Gleichung $M = 0$ sind

$$a_1 = +a;\ a_2 = -a;\ a_3 = +\sqrt{\frac{a^4 - m^4}{a^2}};\ a_4 = -\sqrt{\frac{a^4 - m^4}{a^2}}.$$

[1]) Die in V und VI behandelten Kurven sind in anderer Weise bereits behandelt. Cfr. Lindemann in „Sitzungsberichte der math.-phys. Kl. der k. b. A. d. W." Bd. 25, pag. 233 und 234 und des Verfassers Inaug.-Diss. München 1897, pag. 63 und 66. Hier bilden sie den speziellsten Fall eines allgemeineren Ansatzes.

a) In Figur 8 ($m > a$) liegen die Punkte a_1 und a_2 innerhalb des Ovals auf der X-Achse, a_3 und a_4 ausserhalb desselben auf der Y-Achse. Das Innere des Ovals wird deshalb auf die Halbebene übertragen durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D',[1] \quad (35)$$

wenn $Z = A$ und $Z = A'$ die Bildpunkte von $z = a_1$ und $z = a_2$ sind.

Die Abbildung des Aeussern des Ovals erfolgt durch dieselbe Gleichung, wenn $Z = A$ und $Z = A'$ den Punkten $z = a_3$ und $z = a_4$ entsprechen.[2]

b) In Figur 9 ($m < a$) liegen die Punkte a_1 und a_3 innerhalb des linken, a_2 und a_4 innerhalb des rechten Ovals. Die Abbildung des Innern oder des Aeussern eines Ovals wird also vermittelt durch die Transformation:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-A')(Z-A_1')}} + D'. \quad (36)$$

---

[1] Lindemann l. c. Gleichung (32).

[2] Herr Professor Lindemann machte mich darauf aufmerksam, dass die Abbildung der Lemniskate für $m > a$ bereits von Schwarz in der Abhandlung von W. Wien: „Ueber die Gestalt der Meereswellen" angegeben ist. Die Abhandlung befindet sich in den Sitzungsberichten der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrg. 1895, pag. 225. Die dort pag. 229 angegebenen Abbildungen sind in unserer Bezeichnungsweise für $a = 1$:

a) für das Innere: $\frac{1}{m} \cdot \frac{i - Z}{i + Z} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + m^4 - 1}}$;

b) für das Aeussere: $m^2 \cdot \left(\frac{i - Z}{i + Z}\right)^2 = z^2 - 1.$

Hiebei ist das Innere der Lemniskate auf die positive, das Aeussere auf die negative Halbebene abgebildet. Diese Formeln stimmen wesentlich mit obiger Gleichung 35, wenn man setzt:

c) In Figur 10 ($m = a$) liegt in jeder Schleife einer der Punkte a_1 und a_2. Der Winkel der Tangenten im Doppelpunkt ist $\frac{1}{2} \cdot \pi$.

Das Innere einer Schleife wird also abgebildet durch:[1])

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C) \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}} + D' \tag{37}$$

oder:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{Z-C}}, \tag{37a}$$

wenn $c^2 = (C - A)(C - A_1)$ und $b = 2C - A - A_1$ ist.

Die Abbildung des Aeussern einer Schleife ergibt:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \left[\frac{2c^2 + b(Z-C) + 2c \cdot \sqrt{(Z-A)(Z-A_1)}}{Z-C}\right]^{\frac{3}{2}}. \tag{38}$$

Das Aeussere beider Ovale, welches zwei rechtwinklige Ecken enthält, wird abgebildet durch:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \tag{39}$$

oder:

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - z^2}}{z} = D \cdot \sqrt{\frac{Z-C}{Z-C'}}. \tag{39a}$$

VI. Eine weitere spezielle Gattung bicircularer Kurven vierter Ordnung sind die Pascal'schen Schneckenlinien (limaçon). Ihre Gleichung ist:

---

a) in Gleichung (35)

$$a = 1;\ D = \frac{-2i}{m^2 - 1};\ D' = 0;\ A = i \cdot \frac{m+1}{m-1};\ A' = i \cdot \frac{m-1}{m+1};$$

b) in Gleichung (35)

$$a = 1;\ D = \frac{-2i}{m^2 + 1};\ D' = 0;\ A = \frac{2m + i(1 - m^2)}{1 + m^2};$$

$$A' = \frac{-2m + i(1 - m^2)}{1 + m^2}.$$

[1]) Lindemann l. c. Gleichung (33).

$$4 z^2 z_1^2 - 4 a z z_1 (z + z_1) + 2 (a^2 - 2 m^2) z z_1 + a^2 (z^2 + z_1^2) = 0$$

oder:
$$(x^2 + y^2 - a x)^2 - m^2 (x^2 + y^2) = 0.$$

Jenachdem $a > m$ oder $a < m$ erhält man die Figuren 11 oder 12; $a = m$ gibt die Kardioide, Figur 13.

Man findet:

$$M = z^2 \cdot [2 a z + (m^2 - a^2)].$$

$M = 0$ hat ausser dem Doppelpunkt nur die Wurzel $a_1 = \frac{a^2 - m^2}{2a}$; es tritt der Fall der Gleichung (8) ein.

a) Der Punkt $z = a_1$ liegt in Figur 11 $(a > m)$ innerhalb der kleineren Schleife. Der Winkel der Tangenten im Doppelpunkt ist bestimmt durch $\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{m}{a}$, wenn φ der Winkel der Tangente gegen die positive X-Achse ist; er sei $\gamma \cdot \pi$.

Das Innere der kleineren Schleife wird auf die Halbebene abgebildet durch die Gleichung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + D' \qquad (40)$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2az + d^2} + d}{\sqrt{2az + d^2} - d} = D \cdot \left\{ \frac{2c^2 + b(Z - C) + 2c \cdot \sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}}{Z - C} \right\}^{\gamma}, \qquad (40\text{a})$$

wenn $c^2 = (C - A)(C - A_1)$, $b = 2C - A - A_1$, $d^2 = m^2 - a^2$ ist. Durch dieselbe Gleichung wird das Innere des grösseren Ovales auf die Halbebene übertragen, wenn man γ vertauscht mit $(2 - \gamma)$.

Das Aeussere des kleineren oder grösseren Ovales wird abgebildet durch die Gleichung:[1])

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D' \cdot \int \frac{dZ}{(Z - C) \cdot \sqrt{(Z - D)(Z - D_1)}} + D'' \qquad (41)$$

---

[1]) Die Integrationskonstanten sind mit D' und D'' bezeichnet, um eine Verwechslung derselben mit dem Punkt $Z = D$ zu vermeiden.

oder:

$$\frac{\sqrt{2az+d^2}+d}{\sqrt{2az+d^2}-d} = D' \cdot \left\{ \frac{2c^2+b(Z-C)+2c\cdot\sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}}{Z-C} \right\}^\delta, \quad (41\text{a})$$

jenachdem $\delta = 2 - \gamma$ oder $\delta = \gamma$ gesetzt wird und wenn

$c^2 = (C - D)(C - D_1)$ und $b = 2\,C - D - D_1$ ist.

Das von beiden Ovalen eingeschlossene Flächenstück, welches zwei Winkel $(1 - \gamma) \cdot \pi$ enthält, wird abgebildet durch die Transformation:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-C)(Z-C')} + D' \quad (42)$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2\,a\,z + d^2} + d}{\sqrt{2\,a\,z + d^2} - d} = D \cdot \left(\frac{Z - C}{Z - C'}\right)^{1-\gamma}. \quad (42\text{a})$$

b) In Figur 12 liegt der Punkt a_1 ausserhalb des Ovals. Das Innere des Ovals wird auf die Halbebene übertragen durch die Abbildung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B)(Z-B_1)} + D' \quad (43)$$

oder:

$$\frac{\sqrt{2\,a\,z + d^2} + d}{\sqrt{2\,a\,z + d^2} - d} = D \cdot \frac{Z - B_1}{Z - B}; \quad (43\text{a})$$

das Aeussere des Ovals durch die Abbildung:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D' \cdot \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z-A)(Z-A_1)(Z-D)(Z-D_1)}} + D''. \quad (44)$$

c) In Figur 13 (Kardioide) fallen die drei endlichen Wurzeln von $M = 0$ in den Punkt $z = 0$.

Das Innere der Figur hat im Punkt $z = 0$ einen Winkel von $2\,\pi$. Es tritt hier der Fall der Gleichung (10) ein.

Die Abbildung des Innern erfolgt durch die Gleichung:[1])

[1]) Goettler l. c. pag. 68 und Gleich. (126a).

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B)^2} + D' \tag{45}$$

oder:

$$z^{-\frac{1}{2}} = D \cdot (Z-B)^{-1} + D'. \tag{45a}$$

Das Aeussere der Figur 13 wird auf die Halbebene übertragen durch die Gleichung:[1])

$$\int \frac{dz}{\sqrt{M}} = D' \cdot \int \frac{dZ}{(Z-B) \cdot \sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}} + D' \tag{46}$$

oder:

$$z^{-\frac{1}{2}} = D' \cdot \log\left(\frac{2c^2 + b(Z-B) + 2c \cdot \sqrt{(Z-D)(Z-D_1)}}{Z-B}\right) + D'', \tag{46a}$$

wenn $c^2 = (B-D)(B-D_1)$ und $b = 2B - D - D_1$ ist.

Analog den bisherigen Erörterungen sind alle Fälle zu erledigen, in denen die Gleichung der Grenzkurve der z Ebene durch die Transformation $t = \varphi(z)$, wo $\varphi(z)$ eine rationale Funktion von z sein möge, in eine circulare Kurve dritter Ordnung oder eine bicirculare Kurve vierter Ordnung der t Ebene übergeht.[2])

Die Gleichung einer derartigen Kurve ist:

$$k \cdot \varphi^2(z) \cdot \varphi_1^2(z_1) + a \cdot \varphi^2(z) \cdot \varphi_1(z_1) + a_1 \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1^2(z_1) + \beta \cdot \varphi(z) \cdot \varphi_1(z_1)$$
$$+ \gamma \cdot \varphi^2(z) + \gamma_1 \cdot \varphi_1^2(z_1) + \delta \cdot \varphi(z) + \delta_1 \cdot \varphi_1(z_1) + \varepsilon = 0. \tag{47}$$

Die Funktion $\Phi(z, Z)$, welche für reelle Z längs der Grenzkurve reell bleibt, ist

---

[1]) Goettler l. c. pag. 68 und Gleich. (127).

[2]) Es ist dies analog dem Umstande, dass sich die von Herrn Lindemann für die Kurven

$$a z^n z_1^n + \beta z^n + \beta_1 z_1^n + \delta = 0$$

gegebene Methode auf die Kurven

$$a \varphi^n \varphi_1^n + \beta \varphi^n + \beta_1 \varphi_1^n + \delta = 0$$

ausdehnen lässt; vgl. des Verfassers citierte Arbeiten sowie die Dissertation von L. Marc: „Conforme Abbildung eines von irregulären Hyperbeln n. Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis". München 1899.

$$\Phi(z, Z) = \frac{d}{dZ}\left\{\log(\varphi'(z) \cdot z')\right\} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dZ}(\log M), \tag{48}$$

wenn $\varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}$, $z' = \frac{dz}{dZ}$ und

$$M = \varphi^4(z) \cdot (a^2 - 4k\gamma) + \varphi^3(z) \cdot (2a\beta - 4k\delta - 4a_1\gamma) + \varphi^2(z) \cdot (\beta^2 + 2a\delta_1 - 4a_1\delta - 4k\varepsilon - 4\gamma\gamma_1) + \varphi(z) \cdot (2\beta\delta_1 - 4a_1\varepsilon - 4\gamma_1\delta) + (\delta_1^2 - 4\gamma_1\varepsilon) \text{ ist.} \tag{49}$$

Die Abbildung des Flächenstückes wird vermittelt sein durch die Gleichung:

$$\Phi(z, Z) = R(Z),$$

wenn $R(Z)$ eine passend gewählte rationale Funktion von Z ist, welche für reelle Z reell bleibt. Die Integration ergibt:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{T}} = D \cdot \int e^{\int R(Z) \cdot dZ} \cdot dZ + D', \tag{50}$$

wenn $\varphi(z) = t$ und $T(t) = M(z)$ gesetzt wird. Die linke Seite dieser Gleichung ist ein elliptisches, die rechte dagegen im allgemeinen ein hyperelliptisches Integral.

Bemerkung: In Figur 3 ist die Abscisse des Punktes a_2 zu verdreifachen; in Figur 4 ist Abscisse und Ordinate des Punktes a_1 zu verdoppeln.



Ueber Conchit, eine neue Modification des kohlensauren Kalkes.

Von **Agnes Kelly** aus London.

(*Eingelaufen 11. Mai.*)

Im Laufe einer Untersuchung über Kalk-Ausscheidungen im Thierreich und besonders über Molluskenschalen ergab sich das Resultat, dass dieselben nicht aus Aragonit bestehen, wie G. Rose angab, sondern aus einem optisch einaxigen, negativ doppeltbrechenden Mineral, welches sich von Kalkspath durch verschiedene Eigenschaften unterscheidet, und welches ich mit dem Namen Conchit (κόγχη, Schale) bezeichne. Ich habe weiter beobachtet, dass dieselbe Modification auch als Mineral an verschiedenen Orten zu finden war — allerdings immer nur in krystallinischen Aggregaten. Ihre Eigenschaften habe ich sowohl an diesen Krystall-Aggregaten als auch am Conchit der Schalen untersucht.

Verschiedene aus Conchit bestehende Schalen wurden sowohl qualitativ wie quantitativ analysirt. In Cardium edule, der Herzmuschel, waren ausser kohlensaurem Kalk und vielleicht Spuren von Na Cl, keine anorganischen Bestandtheile nachzuweisen. Die folgenden Bestimmungen von CO_2 und CaO wurden an derselben ausgeführt:

$$CO_2 = 42.45\ \%$$
$$CaO = 54.63\ \text{„}$$
$$\overline{97.08\ \%.}$$

Die übrigen 2.92 % waren organische Materie, welche sich nicht direct bestimmen liess.

In Cyrena (sp.?) habe ich nur CaO bestimmt, der daraus berechnete $Ca CO_3$ war 97.2 %.

Von den entsprechenden Krystallaggregaten der anorganischen Natur, vor allem Sinterbildungen und Incrustationen, wurden keine quantitativen Analysen gemacht. Sie bestanden fast ganz aus $Ca CO_3$, nur waren in den Incrustationen aus Gefässen und Wasserbädern immer Spuren von Eisen vorhanden.

Die Umstände, unter welchen Conchit aus Wasser auskrystallisirt, sind noch nicht genau untersucht. Er scheidet sich aus Brunnenwasser und aus Lösungen von doppeltkohlensaurem Kalk bei ca. 30°—100° C. aus; bei 168° C. (7,5 Atm. Druck) habe ich nur Aragonit gefunden.

Conchit (und nicht Aragonit) zusammen mit Kalkspath-Rhomboëdern wird gebildet, wenn man siedende Lösungen von $Ca Cl_2$ und $Na_2 CO_3$ mischt.

Conchit löst sich sehr leicht in Säuren; da aber der Aggregatzustand ein so wichtiges Moment für die Lösungsgeschwindigkeit ist, kann man nicht sicher sagen, ob er sich wirklich leichter löst als Kalkspath. Gegenüber den Atmosphärilien ist Conchit sicher labiler als Kalkspath. Im „Coralline Crag“ kommen fast ohne Ausnahme als wohlerhaltene Fossilien nur solche vor, die nachweisbar ursprünglich aus Kalkspath bestanden, während diejenigen, deren ursprüngliche Substanz Conchit war, nur als Steinkerne erhalten blieben.

Conchit gleicht Aragonit und Ktypeït darin, dass er sich bei erhöhter Temperatur in Kalkspath umwandelt, unterscheidet sich aber von Aragonit dadurch, dass die Umwandlung bei bedeutend niedrigeren Temperaturen stattfindet. Man kann dies am leichtesten durch Parallel-Versuche nachweisen; so wandelt sich, z. B. in Dämpfen von Quecksilber, also bei 360°, oder auch in gerade geschmolzenem Blei, d. h. bei 325°, Conchit um, während Aragonit, ebenso behandelt,

keine Umlagerung erfährt. Aragonit-Krystalle zerfallen zwischen 373° und 380°, aber erst nach einer Erhitzung auf 405° ist es mir sicher gelungen, ein einaxiges Axenbild zu sehen und dadurch die Umwandlung in Kalkspath zu constatiren. Conchit fängt schon zwischen 300° und 310° an sich in Kalkspath umzuwandeln, wie man aus dem Auftreten der für Kalkspath characteristischen Spaltbarkeit und Zwillingslamellirung sicher nachweisen kann. Während der Umwandlung wird die Orientirung der Hauptaxe im Allgemeinen nicht verändert.

Da nur feinfaserige Aggregate zur Verfügung standen, ist es möglich, dass das specifische Gewicht wegen der Porosität etwas zu niedrig bestimmt ist. Der höchste Werth, welchen eine directe Messung ergeben hat, war = 2.865 für eine Incrustation aus einem Kessel. Krystallaggregate aus Karlsbad und andere Incrustationen aus Kesseln, Wasserbädern und Gefässen ergaben zwischen 2.830 und 2.845. Von Cyrena wurde durch Bestimmung des specifischen Gewichtes, des Kalkgehaltes und des specifischen Gewichtes der organischen Materie der Werth zu 2.874 berechnet.

Die Härte ist bedeutend grösser als die von Kalkspath, Spaltbarkeit ist nicht nachzuweisen.

Conchit ist einaxig negativ wie Kalkspath oder wenigstens nahezu einaxig. In Conchitschalen, die aus parallelen Lamellen bestehen, sieht man zuweilen ein zweiaxiges Axenbild mit einem sehr kleinen Winkel der optischen Axen, wie man es sehr häufig auch sonst bei einaxigen Substanzen beobachtet.

Die Brechungsindices wurden für Natriumlicht bestimmt:

a) Nach der Total-Reflexions-Methode von Wollaston (mittelst eines Prismas auf einem Spectrometer). Da nur Krystall-Aggregate mit mehr oder weniger parallelen Krystallaxen und keine einheitlichen Krystalle zur Verfügung standen, war es unmöglich, völlig scharfe Grenzen zu sehen. Die mittleren Werthe von mehreren Beobachtungen an einem

polirten Schliff von Strombus gigas gaben $\varepsilon = 1.527$, $\omega = 1.661$.

b) Mikroskopisch, durch Vergleich mit Lösungen, deren Brechungsindices bestimmt werden konnten. Hier war die Fehlergrenze ziemlich gross, ± 1 bis ± 2 Einheiten der dritten Decimale. Die mittleren Werte waren $\varepsilon = 1.524$ und $\omega = 1.661$[1]).

---

[1]) In letzter Zeit stellte Hr. Dr. Melczer, welcher bereits eine grössere Reihe von Untersuchungen mit dem Abbe-Pulfrich'schen Totalrefractometer ausgeführt hat, auf meine Bitte noch einige Messungen an und theilte mir darüber Folgendes mit: „Zur Bestimmung der Hauptbrechungsexponenten wurden fünf polirte Flächen untersucht, von welchen 1 und 2 ein und derselben Strombus-Platte, die 3. einer Trochus-Platte, die 4. einer Anodonta- und die 5. einer Cyrena-Platte angehörten. Von diesen gab nur die erste Fläche, welche nahezu parallel der Schichtung ging, bei Anwendung des verkleinernden Fernrohres einigermassen gute, bis auf ± 2 Minuten einstellbare Grenzen. Durch Ablesungen von 30 zu 30 Grad, Construiren der Grenzcurven und weitere Ablesungen von 10 zu 10 Grad in der Nähe der Maxima und Minima wurden die den Hauptbrechungsindices entsprechenden Grenzwinkel festgestellt und darnach, um die von Herrn C. Viola vorgeschlagene Differenz-Methode anzuwenden (s. Ztschr. f. Kryst. 1898, **30**, 439, und 1900, **32**, 313), die Grenzwinkel zweier Zeiss'scher Glasprismen gemessen.

Der Verlauf der Grenzcurven war regelmässig und entsprach entschieden einer zweiaxigen Platte und zwar einem in der Nähe der mittleren Hauptschwingungsrichtung gelegenen Schnitte. Die Grenzwinkel an zwei, nahe aneinander liegenden Stellen der Fläche, sodann die Grenzwinkel, brechenden Winkel und min. Ablenkungen der Prismen sind für Na-Licht:

1. Bestimmung	2. Bestimmung	Prisma Nr. 604	Prisma Nr. 2667
→ 61° 31′ 20″	61° 32′ 30″		
61 18 30	61 19 30	62° 11′ 0″	54° 31′ 45″
↑ 53 52 40	53 51 0	49 59 35 (= α)	49 56 20 (= α)
53 44 15	53 38 15	79 52 30 (= 2δ)	62 17 35 (= 2δ)

Da der Conchit als optisch negativ bestimmt ist, muss β näher an γ liegen und somit berechnen sich aus der 2. Bestimmung, welche zuverlässiger ist, die Hauptbrechungsindices:

$$\gamma_{Na} = 1.662$$
$$\beta_{Na} = 1.659$$
$$\alpha_{Na} = 1.523$$

Die Doppelbrechung des Conchits ist also bedeutend niedriger als diejenige des Kalkspaths, etwa 0.134—0.137. Dies kann man auch schon erkennen, wenn man gleich dicke Schliffe von Conchit und Kalkspath im polarisirten Licht vergleicht.

Conchit bildet theils Nädelchen und Prismen, theils basische Plättchen, theils endlich rhomboëder-ähnliche Individuen, deren Flächen ungefähr 45° zur optischen Axe geneigt sind.

Fast alle Molluskenschalen bestehen vollständig aus Conchit. Nur Ostrea, Pecten, Anomia und die äussersten Schichten von Pinna und Mytilus unter den Lamellibranchiaten, sowie Patella und Janthine unter den Gastropoden, bestehen aus Kalkspath. Die meisten Coelenteraten haben gleichfalls Conchit-Skelette, nur viele Alcyonarien bestehen aus Kalkspath, während dagegen alle Hydrocorallinae und Madreporaria, die ich untersuchte, Conchit abscheiden.

In der anorganischen Natur wurde Conchit in den folgenden Vorkommnissen gefunden: In einem sehr grobkörnigen Erbsenstein von Karlsbad an Stelle des Ktypeïts, wie in verschiedenen andern Sprudelsteinen von demselben Orte, sodann in einer blauen Incrustation von Schwaz in Tirol, in blauen und braunen Incrustationen von Schemnitz, in

---

von welchen γ und β bis auf 1/2 Einheit und α bis auf 1 Einheit der letzten Decimale für richtig betrachtet werden kann.

Zur Controle für β konnte die 2. Fläche an derselben Platte dienen, welche ungefähr senkrecht zur Schichtung ging. Die Grenzcurven waren an dieser Fläche zwar ziemlich undeutlich, doch zur Feststellung von β und β_1 genügten sie. Durch Construiren der Grenzcurven ergaben sich nämlich für diese die Grenzwinkel 61° 15′ und 60° 50′.

Aus obigen Brechungsexponenten folgt:

$$2\,V_{a\,Na}\ 15^{0}\ 50'$$
$$2\,E_{a\,Na}\ 26^{0}\ 25'.$$

Dass sich der Conchit u. d. Mikroskope im Allgemeinen als optisch einaxig verhält, lässt sich vielleicht durch die nur theilweise orientirte Aufeinanderlagerung der Schichten in den Schalen erklären.“

einer braunen Incrustation von Alt-Sohl in Ungarn und in Sinter des Yellowstone Parks. Endlich erwiesen sich verschiedene Exemplare von Eisenblüte als Conchit. Als gewöhnliche Neubildung tritt das Mineral auch im Kesselstein auf, zuweilen gemischt mit Kalkspath.

Der Conchit ist somit eine neue Modification von kohlensaurem Kalk, welche in ihrem Verhalten eine sehr geringe Stabilität aufweist und selbst labiler ist als Aragonit, wesshalb seine Vorkommnisse in der anorganischen Natur so selten sind, da er theils einer Lösung, theils einer Umwandlung in Kalkspath unterlag. Die Labilität des Conchits ist weiter erwiesen durch Klement's[1]) Versuche über die künstliche Darstellung von Dolomit. Fein gepulverter kohlensaurer Kalk wurde mit krystallisirter schwefelsaurer Magnesia und einer gesättigten Kochsalzlösung in einem leicht verschlossenen Kölbchen eine bestimmte Zeit lang auf constanter Temperatur erhalten. Hierauf wurde abfiltrirt, ausgewaschen, und der Procentsatz von $MgCO_3$ bestimmt. Kalkspath 10 Stunden bei 100° erwärmt, gab nur Spuren von $MgCO_3$, Aragonit 48 Stunden bei 91° gab 34.6 % und 68 Stunden bei 90° 38 % $MgCO_3$. Korallen aus einer Gruppe, die, wie es scheint, nur Conchit-Skelette hat, lieferten dagegen: Madrepora prolifera in 46 Stunden bei 90° 38.5 % $MgCO_3$, Madrepora humilis 41.4 % und Stylopora (sp.?) 41.9 % $MgCO_3$, woraus Klement den Schluss ableitet, dass die Korallen aus Aragonit bestehen, da ihm eben diese noch labilere Modification des kohlensauren Kalkes unbekannt war; die bedeutende Erhöhung aber, welche die Werthe der Magnesiaaufnahme bei den Korallen erfuhren, weist schon, abgesehen von der directen Beobachtung, auf das Vorhandensein einer noch labileren Modification hin, und dies ist eben der Conchit. Da alle riffbildenden Korallen Conchit-Skelette haben, so ist diese grosse Labilität und die leichte Möglichkeit einer Umwandlung in Dolomit für die Theorie der Entstehung des Dolomits von hoher Wichtigkeit.

---

[1]) Tscherm: Min. Petr. Mitth. 1894, 14. Auszug in Zeitsch. f. Kryst. 27, 330.

Amorphes Calciumcarbonat.

F. Link hat zuerst nachgewiesen, dass kohlensaurer Kalk bei seiner Fällung zunächst in kleinen Kügelchen sich ausscheidet, welche nicht auf das polarisirte Licht einwirken und die erst später krystallinisch werden. Ich fand nun im Verlaufe dieser Untersuchungen, dass das Calciumcarbonat in den beiden hinteren Kalkdrüsen des Regenwurms aus kleinen Kügelchen besteht, die gleichfalls einen solchen amorphen Zustand darstellen. Mit Wasser benetzt werden die Kügelchen rasch krystallinisch, wenn sie nicht bei 100° getrocknet sind und die letzten Spuren von Wasser durch Behandlung mit absolutem Alkohol entfernt worden sind; dann bleiben aber die Kügelchen auf die Dauer amorph.

Eine Erniedrigung der Temperatur hat keine Wirkung auf die Kügelchen; durch eine Behandlung bei der Temperatur der siedenden Luft während mehrerer Stunden war keine Veränderung hervorgerufen worden; aber eine Temperaturerhöhung auf 160°—170° genügt, um sie krystallinisch werden zu lassen.

Eine genaue Bestimmung des specifischen Gewichtes war nicht möglich, aber durch Bestimmungen des specifischen Gewichtes der getrockneten Kalkdrüsen und der organischen Materie in den Kalkdrüsen und aus dem Kalkgehalt der Drüsen selbst liess sich herausrechnen, dass das specifische Gewicht ungefähr 2,1 sein dürfte. Aehnliche Bestimmungen über den Panzer von Astacus oder Julus gaben Werthe von 2,2, aber diese sind noch ungenauer, da nicht nur $CaCO_3$, sondern auch ungefähr 6 Procent $Ca_3(PO_4)_2$ vorhanden ist.

Der Brechungsindex wurde durch mikroskopische Methoden gemessen und zu 1·538 bestimmt. Selbst mit der stärksten Vergrösserung und den empfindlichsten Methoden war gar keine Einwirkung auf das polarisirte Licht zu erkennen.

Solcher amorpher Kalk kommt sehr oft im Thierreich vor, z. B. im Schneckenschleim und (nicht als Kügelchen) in dem Panzer von Astacus, Squilla und Julus und in der Eierschale einer Natter. Durch Behandeln mit Wasser oder durch Erwärmen wird er immer krystallinisch, und dadurch wird wohl auch zu erklären sein, dass er im Mineralreich nicht beobachtet wurde.

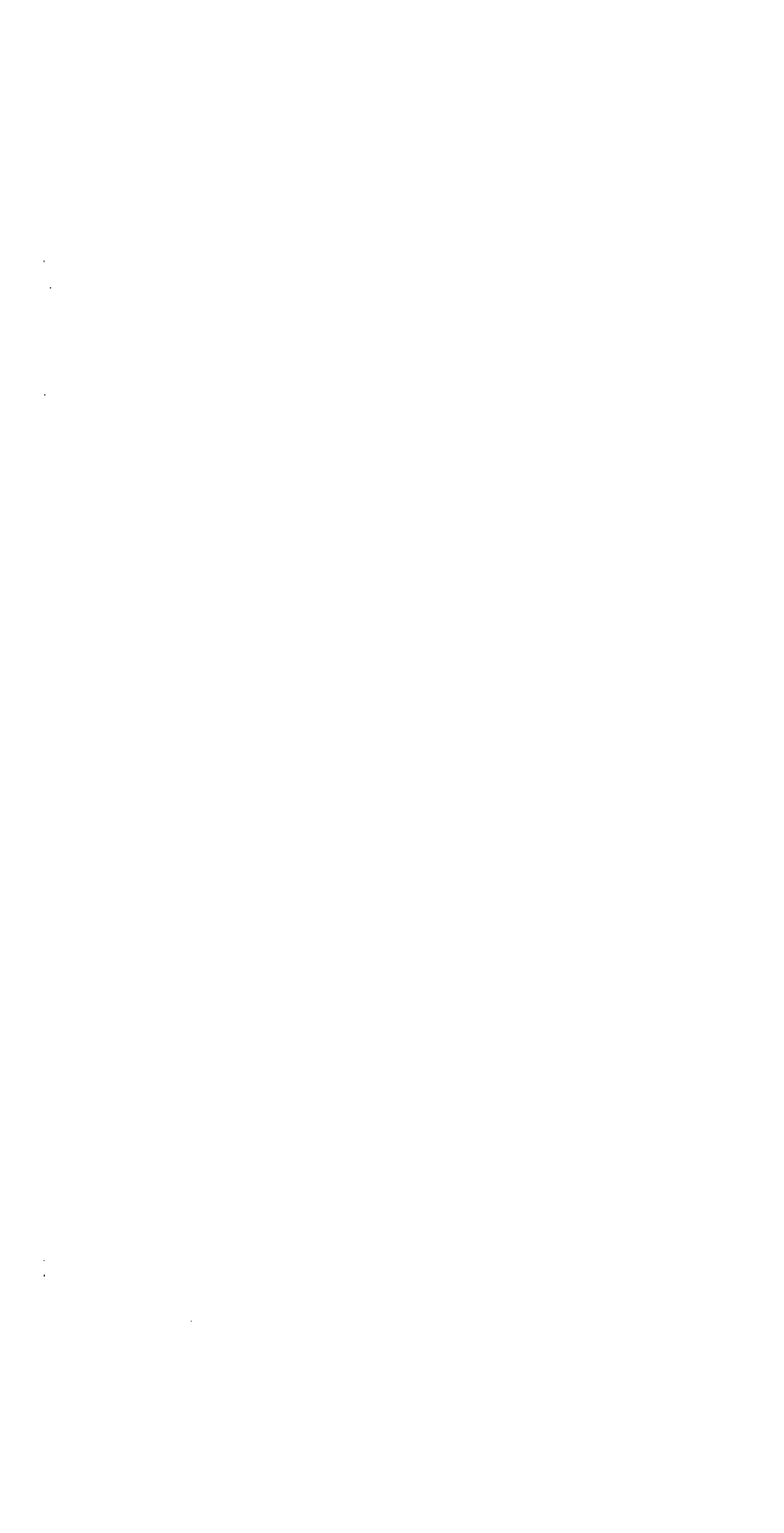
Sitzung vom 13. Juni 1900.

1. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Professor Max Wolf in Heidelberg: „Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiakallichtes und den Gegenschein" vor.

2. Herr Alfred Pringsheim spricht „Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und bestimmte Integrale".

3. Herr Alfred Pringsheim legt ferner eine Abhandlung des Privatdozenten an der Universität Dr. Arthur Korn: „Ueber den sogenannten semidefinitiven Fall in der Theorie der Maxima und Minima" vor.

4. Herr Adolf v. Baeyer hält einen Vortrag: „Ueber Aut-Oxydation". Derselbe wird anderweit veröffentlicht werden.



Ueber die Bestimmung der Lage des Zodiakallichtes und den Gegenschein.

Von **Max Wolf.**

(*Eingelaufen 18. Juni.*)

(Mit Taf. IV.)

Während in dem früheren Observatorium in der Stadt Heidelberg das Zodiakallicht eigentlich niemals mit Sicherheit gesehen werden konnte, erscheint es von der Höhe des neuen Observatoriums auf dem Königstuhl fast stets recht hell und es konnte oft in so grosser Intensität gesehen werden, dass es heller als die Milchstrasse erschien. Seit dem Bestehen des neuen Observatoriums haben wir deshalb häufig Aufzeichnungen des Zodiakallichtes sowohl abends als morgens vorgenommen.

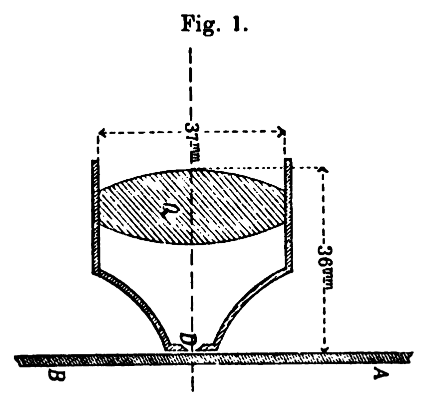
Aber diese Aufzeichnungen litten sehr unter der Unschärfe und der Langsamkeit der Intensitätszunahme des Lichtes von den Rändern gegen innen, so dass es, wie jeder, der das Zodiakallicht beobachtet hat, aus Erfahrung weiss, sehr schwer war, die Lage der Axe des Lichtkegels auch nur ganz roh zu bestimmen. Dazu kommt noch, dass man sich so leicht durch die Sterne der Umgebung irrleiten lässt. Abgesehen von ihrem störenden Eindruck auf das Auge ist man immer versucht, so sehr man sich auch dagegen bemüht, bei dem Anschluss der Konturen des Lichtes an die Sterne, diejenigen zu bevorzugen, die man in der betreffenden Gegend besser kennt.

Es regte sich deshalb in mir der Wunsch, das Zodiakallicht zu photographiren und aus dem Bild die Axenlage zu bestimmen. Verschiedene Versuche lehrten mich aber, dass

dieser Weg nicht viel mehr geben wird, als der optische. Die dazu nötigen lichtstarken Objective zeichnen nämlich stets bei dem grossen hierfür in Betracht kommenden Feld die Mittelpartien der Platte viel heller als die Randpartien, sodass man überhaupt nicht sicher weiss, ob man das Zodiakallicht photographirt hat, und wenn, so wird das Bild dadurch so entstellt, dass es schwer zu entscheiden ist, ob die grösste Intensität der Wirkung der Linse oder jener des Zodiakallichtes zuzuschreiben ist.

Ich habe deshalb diesen Weg nicht weiter verfolgt, sondern habe vielmehr auf andere Weise der Erscheinung näher zu treten versucht.

Fig. 1.



Im Beginne des Jahres 1899 liess ich mir von der Firma C. Zeiss in Jena ein Objectiv aus Quarz bauen, bei dem nur der allerzentralste Teil des Bildes in der optischen Axe brauchbar, in welchem also jede Strahlenvereinigung ausserhalb der Axe vernachlässigt wurde. Dagegen wurde möglichst grosse Lichtstärke (Flächenhelligkeit) erstrebt. In der That gelang es dort Dr. Harding, einen Quarzcondensor aus 3 Linsen zusammenzusetzen, der das eminente Oeffnungsverhältniss: Durchmesser zur Brennweite = 3 : 2 besitzt. Die Oeffnung ist etwa 37 mm, die Distanz des Bildes von der vordersten Fläche ist etwa 36 mm.

Die Disposition des damit gebauten Apparates ist aus der Figur 1 ersichtlich. Bei Q befindet sich das dreilinsige Quarz-

System. In seiner optischen Axe unmittelbar vor der Bildebene ist ein solid mit dem Objectiv verbundenes Diaphragma mit enger Oeffnung befestigt (*D*). Fast in Berührung mit und unmittelbar hinter dem Diaphragma liegt die photographische Platte (*A*—*B*). Dieselbe ist so gelagert, dass sie ihrer Länge nach in ihrer Ebene hinter dem Diaphragma vorbeigeschoben werden kann. Durch diese Verschiebung der Platte kann dann eine Reihe von Bildchen nebeneinander auf der Platte erzeugt werden und, wenn man durch Objectiv und Diaphragma Licht auf die Platte fallen lässt, so ist jedes so entstehende Bildchen genau in derselben Axe aufgenommen.

Auf diese Weise konnte ich erreichen, dass immer ein genau bestimmbarer Punkt des Himmels auf der Platte abgebildet und dabei doch jede Abblendung, also jeder Lichtverlust der Linse vermieden wird.

Dieses System wurde auf der Horizontalaxe eines Theodoliten so montirt, wie es der Lichtdruck auf der beigegebenen Tafel zeigt. Das Objectiv — der Quarz-Zeiss — ist fest verbunden mit der Horizontalaxe und steht mit seiner optischen Axe parallel mit der optischen Axe des Fernrohres des Theodoliten. Dadurch kann ich erreichen, den Quarz-Zeiss auf einen beliebigen Punkt des Himmels zu richten und dann durch sein Diaphragma von eben diesem beliebigen Punkt ein Bildchen auf der Platte zu erzeugen.

Die Platte sitzt in der hinter dem Objectiv sichtbaren Cassette und wird mit dieser durch die lange Schraube hinter dem Objectiv und seinem Diaphragma vorübergeschoben. Es ist wichtig die Bilder in gleichen Abständen auf der Platte zu erzeugen, weil dadurch die Arbeit des Einschätzens wesentlich erleichtert wird.

Der Apparat wurde von Mechaniker Schwall und mir in der Institutswerkstätte im Sommer 1899 gebaut.

Nach dem Verständnis der Anordnung des Apparates ist nun leicht ersichtlich, was erstrebt wurde. Es wird das Bild einer kleinen Stelle des Zodiakallichtes auf der Platte mit dem Quarz-Zeiss aufgenommen. Dann wird die Platte mit

der langen Schraube ein Stück weiter geschoben, der Apparat nach einer andern Stelle des Zodiakallichts gerichtet und abermals eine Aufnahme gemacht. An den Kreisen des Theodoliten wird die jeweilige Einstellung abgelesen und dadurch bekannt, welcher Punkt am Himmel photographirt ist. Fährt man so fort, so erhält man eine Serie von Ausschnitten aus dem Zodiakallicht — von bekannter Lage — schön nebeneinander auf der Platte abgebildet. S i n d d i e A u f n a h m e z e i t e n g e n a u g l e i c h l a n g, s o s i n d d i e I n t e n s i t ä t e n d e r B i l d e r v e r g l e i c h b a r und man kann z. B. das intensivste Bild heraussuchen. Also jener Punkt des Zodiakallichtes, der am hellsten, oder diejenigen, welche unter sich gleich hell geleuchtet haben, lassen sich so bestimmen.

Um die Belichtungsdauer für alle Bilder gleich zu machen, wurde, wie auf der Tafel ersichtlich, vor dem Objectiv ein guter Momentverschluss (System Linhof) befestigt. Es wurde auf den Pendelschlag einer Uhr der Verschluss geöffnet und ebenso auf einen andern Secundenschlag wieder geschlossen. Bei der ausgezeichneten Beschaffenheit des Verschlusses kommen Unterschiede von einer Zehntelsecunde kaum vor, eine Genauigkeit, die für die Methode völlig genügt.

Der Theodolit wurde bei den im Folgenden beschriebenen Versuchen stets horizontal aufgestellt, sodass also Höhe und Azimut abgelesen wurde. Das bedingte jedesmal eine Umrechnung in Rectascension und Declination. Aus diesem Grunde stelle ich auch den Theodoliten jetzt parallaktisch auf.

Auf die beschriebene Art lässt sich an einem Abend bequem eine Anzahl verschiedener Schnitte durch das Zodiakallicht ziehen. Durch die Verbindung der hellsten Stellen in den verschiedenen Querschnitten kann man dann die Axe grösster Helligkeit in dem kegelförmigen Lichtschein festlegen.

Andererseits kann man die Punkte gleicher Intensität aufsuchen und durch mehrere Schnitte die Linien gleicher Helligkeit im Zodiakallicht bestimmen.

Das abnorm schlechte Wetter dieses Winters verhinderte mich leider, viel mit dem Apparat, den ich das „S c h n i t t -

Photometer" nennen möchte, zu arbeiten; nur wenige Versuche konnten gemacht werden, und von diesen will ich im Folgenden berichten.

Wie vorausberechnet, war das Schnitt-Photometer völlig lichtstark genug. So erhielt ich Anfang Februar 1900 schon mit 6 Secunden Belichtung einen deutlichen Eindruck vom Zodiakallicht.

Um aber so kräftige Eindrücke zu erzielen, dass ihre Intensitäten leicht verglichen werden konnten, musste länger exponirt werden.

Bei den im Folgenden besprochenen Aufnahmen wurde stets 40ˢ0 belichtet. Als das Zodiakallicht im März schwächer wurde, genügten aber 60ˢ kaum mehr, um brauchbare Schwärzungen zu geben.

Was die Sicherheit des Auffindens der grössten Schwärzung einer Serie betrifft, so ist dieselbe so gross, dass nie ein Zweifel vorkam. Ich bat Herrn Schwassmann, unabhängig von mir die dunkelsten Bildchen herauszusuchen, und er fand bei den unten besprochenen Querschnitten, genau die gleichen heraus, wie ich selbst. Sterne, die in den Bildfleck hineinkamen, störten nicht; denn ihre Spuren waren zu kurz und fein. Wir waren beide sehr überrascht über die nicht erwartete Sicherheit in der Bestimmung des hellsten Bildpunktes.

Ich habe sechs geeignete Querschnitte genauer untersucht. Die Azimute und Höhen wurden so controlirt, dass ein bekannter Stern im Fernrohr des Theodoliten eingestellt und damit der Meridian am Kreis festgelegt und der Indexfehler gefunden wurde. Die Abweichung von Visirlinie und optischer Axe des Schnitt-Photometers wurde durch Einstellung auf ein und dasselbe entfernte terrestrische Objekt abgeleitet. Aus den abgelesenen Azimuten und Höhen und der notirten Zeit der Aufnahmen wurden die Rectascensionen und Declinationen bestimmt. Die Berechnung geschah nur für die wichtigen Maximalwerte streng, während die andern Punkte der Schnitte aus Herrn Schwassmanns Curventafel graphisch abgeleitet wurden.

Es fanden sich die folgenden Punkte auf den Platten abgebildet:

1900 Februar 21:

		α (h m)	δ
Schnitt A: Punkt	1	0 1.8	+22.0°
	2	8.2	20.9
	3	15.5	19.6
	4	31.9	17.2
	5	40.1	16.1
	6	48.2	14.7
	7	0 55.2	12.6
	8	1 1.5	12.1
	9	15.0	10.0
	10	27.4	6.9
	11	44.3	4.5

Dieser Schnitt der nahezu parallel mit dem Horizont durch den Lichtkegel des Zodiakallichtes gelegt ist, — die weiter aussenliegenden Punkte sind hier weggelassen, — ist auf der Abbildung 2 mit *A* bezeichnet.

Durch Vergleich der gegenseitigen Helligkeiten der Bildpunkte ergab sich sofort der Punkt

$$\alpha = 0^h\ 48.2^m \qquad \delta = 14^0\ 39'$$

als der hellste Punkt des Schnittes durch das Zodiakallicht.

1900 Februar 21:

		α (h m)	δ
Schnitt B: Punkt	1	1 11.1	+ 14.4°
	2	7.4	15.6
	3	3.1	16.9
	4	0 59.0	18.1
	5	52.6	19.6

Der hellste Zodiakallichtpunkt auf diesem Schnitt lag in

$$\alpha = 1^h\ 9.7^m \qquad \delta = +\ 14^0\ 51'.$$

1900 Februar 21:

		α	δ
		h m	
Schnitt C: Punkt	1	0 58.0	+ 20.1°
	2	1 7.5	18.8
	3	16.0	17.4
	4	25.1	15.6
	5	34.7	14.0
	6	43.6	12.3
	7	53.5	10.3

Maximum in

$\alpha = 1^h\ 25.1^m \qquad \delta = +\ 15^0\ 36'.$

1900 Februar 27:

		α	δ
		h m	
Schnitt D: Punkt	1	1 55.1	+ 7.4°
	2	45.7	10.3
	3	29.2	13.5
	4	17.3	16.2

Maximum in

$\alpha = 1^h\ 27.7^m \qquad \delta = +\ 14^0\ 5'.$

1900 Februar 27:

		α	δ
		h m	
Schnitt E: Punkt	1	1 19.2	+ 16.2°
	2	34.6	13.5
	3	54.4	10.3
	4	2 8.6	7.4

Maximum in

$\alpha = 1^h\ 30.2^m \qquad \delta = +\ 14^0\ 24'.$

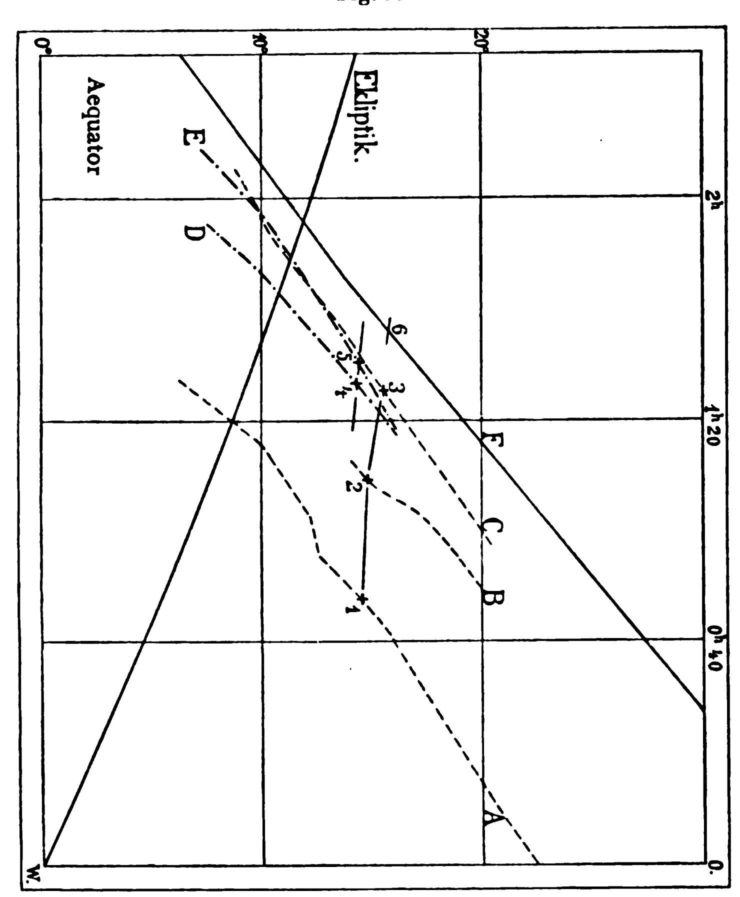
1900 März 1:

		α	δ
		h m	
Schnitt F: Punkt	1	0 14.9	+ 32.5°
	2	1 23.5	18.3
	3	1 46.8	13.5
	4	2 0.3	10.9
	5	2 30.2	+ 5.4
	6	4 32.7	− 12.4

Bei diesem Schnitt war das Zodiakallicht abnorm schwach. Ueberhaupt machte es den Eindruck, als ob das Licht successive und rapid an Intensität von Anfang Februar auf An-

fang März abgenommen hätte. Deshalb sind hier die Bildpunkte sehr schwach und bereits schwer zu schätzen. Jedenfalls würde das Maximum ebenfalls nördlich von der Ekliptik, vielleicht in der Gegend des Sternes 105 Piscium anzunehmen sein.

Fig. 2.



Auf Figur 2 sind die 6 Schnitte mit den Buchstaben A—F bezeichnet. Die Punkte maximaler Intensität sind durch kleine Kreuze angedeutet. Das Maximum von Schnitt A ist

mit 1, das von F mit 6 bezeichnet. Durch 1, 2, 3 ist die Linie der Maximalintensität für den 21. Februar gezogen, durch 4 und 5 die Linie grösster Intensität am 27. Februar.

Bei der Betrachtung der Lage der einzelnen Maxima springt nun sofort in die Augen, dass die hellste Stelle des Lichtes keineswegs, wie erwartet, auf der Ekliptik, sondern nördlich davon lag. Der Abstand der Linie grösster Intensität von der Ekliptik beträgt etwa 6° in der betrachteten Gegend.

Dass diese Erscheinung nicht durch die Absorption der Erdatmosphäre bedingt sein kann, folgt aus der steilen Lage des Zodiakallichts und der Betrachtung der fast parallel zum Horizont durchgelegten Schnitte.

Soviel ist also sicher, die Hauptmasse der Zodiakallichtmaterie hat in diesem Februar von uns aus gesehen nicht in der Ekliptik, sondern darüber gelegen, und zwar in einem beträchtlichen Abstand davon.

Nehmen wir einmal an, dass sich die Hauptmasse der Zodiakalmaterie um die Ebene des Sonnenäquators lagert. Da der Sonnenäquator seinen aufsteigenden Knoten in ca. 74° Länge liegen hat, so stehen wir zur Zeit des 6. December in der Ebene des Sonnenäquators, während zur Zeit des 6. März die nördliche Hälfte des Sonnenäquators uns zugekehrt ist.

Wir müssen also zur Zeit des 6. December das Zodiakallicht längs eines grössten Kreises sehen, der um die Neigung des Sonnenäquators also um ca. 7° gegen die Ekliptik aufsteigend geneigt erscheint. Die Teile des Zodiakallichtes, die wir wegen des Horizontes sehen können, sind dann relativ weit von uns entfernt, also schwach. Wir müssen daher das Zodiakallicht um diese Zeit relativ kurz sehen, und die Linie grösster Intensität des Zodiakallichtes muss unter einem Winkel von ca. 7° gegen die Ekliptik aufsteigend[1]) geneigt sein.

Ganz anders zur Zeit des 6. März. Wir sehen dann von Süden auf die Fläche der Zodiakallicht-Linse, und die gleich-

---

[1]) Oeffnung des Winkels nach Osten.

beleuchteten Teilchen stehen für uns dann viel günstiger. Es wird zwar wieder nach Sonnenuntergang durch den Horizont viel verdeckt, aber es sind uns viel näherliegende also hellere Teilchen sichtbar, als am 6. December. Die Linie grösster Intensität muss dann mehr parallel mit der Ekliptik verlaufen, und der uns am besten sichtbare Teil muss wegen der Lage des Horizontes zur Zeit der Beobachtung in absteigendem Sinne gegen die Ekliptik geneigt sein.

So müssen sich die Erscheinungen wohl darbieten, wenn die Zodiakalscheibe um den Sonnenäquator gelagert ist.

Betrachten wir nun die erlangten Resultate. Die Maximalintensität in einem Schnitt ist sehr sicher zu finden. Kleine Fehler können nur daher kommen, dass die Intervalle zu gross genommen werden, und solche stecken auch noch sicher in diesen ersten Versuchen.

Am sichersten sind die Maximalintensitäten der Schnitt-Curven A, C, D und E; 2 dürfte eine Spur verschoben sein, immerhin aber sehr wenig. Dagegen ist F unsicher und zwar besonders auch aus dem Grunde, dass, wie bereits bemerkt, das Zodiakallicht gegen Anfang März vielleicht aus meteorologischen Gründen rapid an Helligkeit abnahm.

Alle gefundenen Intensitätsmaxima liegen nun in der That nördlich von der Ekliptik. Jedenfalls fällt also die Zodiakal-Linse nicht in die Ekliptik. Die Lage der Linie grösster Intensität ist durch die drei Schnitte vom 21. Februar recht sicher bestimmt und es zeigt sich auf den ersten Blick, dass sie, wie von der Theorie verlangt, in absteigendem Sinne gegen die Ekliptik geneigt ist. Dasselbe gilt von den zwei Schnitten vom 27. Februar. Der 1. März gibt keinen Anhalt und ist überhaupt unsicher.

Es dürfte also gezeigt sein, dass die Zodiakal-Linse jedenfalls nicht in der Ekliptik zu suchen ist. Es dürfte ferner bereits durch die wenigen Versuche sehr wahrscheinlich gemacht sein, dass der Zodiakalring sich um die Ebene des Sonnenäquators lagert.

Es kommt jetzt darauf an, die Lagen der Linie der maximalen Intensität zu andern Jahreszeiten festzustellen. Es erscheint nach einigen Andeutungen nicht unmöglich, dass auch zeitweise mehrere Intensitätsmaxima vorhanden sind. Schliesslich wären aus der Lage und Ausdehnung der Schicht grösster Intensität und ihrem Verlauf, sowie der Verteilung der Intensitäten auf dem Kegel Schlüsse über die geometrische Form der Erscheinung zu ziehen. Diesen und ähnlichen Untersuchungen steht mit Hülfe des beschriebenen Apparates der Weg offen.

Da das Schnitt-Photometer so leicht photographische Eindrücke des Zodiakallichtes verschaffte, so lag der Gedanke nahe, dasselbe auch auf den Gegenschein anzuwenden. Leider hatten wir in diesem Frühjahr keine besonders klaren Nächte zur Verfügung und der Gegenschein war recht schwach. Immerhin konnte ich jüngst an zwei Abenden, am 27. und 28. April, mehrere Schnitte durch den Gegenschein ziehen.

Sie lassen auf den ersten Blick die Intensitätszunahme in der Gegend des Gegenscheines erkennen, und zeigen unzweideutig, dass dieses mehr geahnte als gesehene Licht thatsächlich vorhanden ist. Der Himmel war aber zu schlecht und unrein, als dass ich aus den Schnittserien den Punkt maximaler Intensität oder den Mittelpunkt des Gegenscheines hätte festlegen können.

Es mag noch erwähnt werden, dass ein Punkt im hellen Fleck in der Milchstrasse im Scutum Sobiesii bei 75 Secunden Belichtung photographisch nicht ganz so hell kam, als der Gegenschein bei 150 Secunden Belichtung.

Diese Untersuchungen sollen bei passender Gelegenheit weiter geführt werden. Vorerst genügt es gezeigt zu haben, dass der beschriebene Apparat auch dem Gegenschein näherzutreten gestattet.

Gr. Astrophys. Observ., Heidelberg 9. Mai 1900.



Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und Integrale.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 13. Juni.)

Der sogenannte zweite Mittelwerthsatz der Integral-Rechnung existirt in zwei verschiedenen Formen:

$$\left.\begin{aligned}&\text{(I)}\quad \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx\\ &\text{(II)}\quad \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\cdot\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx\end{aligned}\right\}(a \leqq \xi \leqq b),$$

die erste im wesentlichen von O. Bonnet,[1]) die zweite von P. Du Bois-Reymond[2]) herrührend. Dabei wird $f(x)$ in Gl. (I) für $a \leqq x \leqq b$ als positiv und niemals zunehmend, in (II) lediglich als monoton (niemals zu- oder niemals abnehmend) vorausgesetzt. Trotzdem nun der Satz (I) unter specielleren Voraussetzungen besteht, als der Satz (II), so ist er doch der allgemeinere von beiden. Denn während es,

---

[1]) Journal de Math. T. 14 (1849), p. 249. — Mémoires Acad. Belg. T. 23 (1850), p. 8. — B. giebt statt Gl. (I) die Ungleichungen:

$$A\cdot f(a) \leqq \int_a^b \varphi(x)\cdot dx \leqq B\cdot f(a),$$

wo A, B das Minimum und Maximum von $\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx$ für $a \leqq \xi \leqq b$ bedeuten.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 69 (1868), p. 82.

ausser in dem besonderen Falle $f(b) = 0$, zunächst unmöglich ist, den Satz (I) aus (II) herzuleiten, so ergiebt sich, wenn auch $f(x)$ lediglich als monoton vorausgesetzt wird, allemal die Anwendbarkeit des Satzes (I) auf $\pm f(x) + C$ (bei passender Wahl des zweifelhaften Vorzeichens und Limitirung von C), sodass ein noch etwas allgemeinerer Satz, als (II) resultirt, der schliesslich durch Specialisirung von C auch Gl. (II) liefert. Mit anderen Worten: Satz (I) ist keineswegs ein specieller Fall von (II), vielmehr erscheint (II) als ein blosses Corollar zu (I). Und da die Gleichung (I) für mancherlei Anwendungen die bei weitem bequemere ist, so findet man auch in den meisten Lehrbüchern zunächst die Bonnet'sche Form (I) als den eigentlichen Hauptsatz bewiesen und die Du Bois-Reymond'sche Form (II) auf dem eben angegebenen Wege daraus abgeleitet.[1] Sogar Herr C. Neumann, der in der Vorrede (p. IV) seines Buches über Kugel-Functionen (Leipzig 1881)[2] den Bonnet'schen Satz sehr kurz als einen „speciellen Fall" des Du Bois-Reymond'schen abthut, um dann diesen letzteren über Gebühr zu preisen, beweist schliesslich (p. 29 ff.) doch vor allem den Bonnet'schen Satz (I) unter der falschen Bezeichnung des „Du Bois-Reymond'schen" Mittelwerthsatzes[3]) und gewinnt daraus den Satz (II) als „Allgemeinere Form des Du Bois'schen Satzes" — eine Bezeichnung, die ebenfalls nicht correct erscheint, da der Satz (II), wie bemerkt, den Satz (I) zunächst nicht in sich enthält.

Nun existirt aber in der That eine solche allgemeinere Form des Satzes (II), die mir freilich in keiner seiner zahl-

---

[1]) Dabei wird dann gewöhnlich in (II) statt $f(a)$, $f(b)$ noch speciell $f(a+0)$, $f(b-0)$ geschrieben.

[2]) Der vollständige Titel lautet: Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Functionen fortschreitenden Entwickelungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes.

[3]) Ebenso wenig scheint es angemessen, wenn Herr C. Jordan in seinem Cours d'Analyse (T. II, 2ième éd., p. 220) den Satz (II) schlechthin als von Bonnet herrührend bezeichnet, ohne den Namen Du Bois-Reymond's überhaupt zu erwähnen.

reichen Darstellungen begegnet ist, die aber von Du Bois-Reymond zwar nicht bei jener oben erwähnten ersten Formulirung oder einer späteren Vervollständigung des betreffenden Beweises,[1]) sondern bei anderer Gelegenheit kurz angegeben worden ist. In einer Besprechung der Thomae'schen Schrift: „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" (Halle, 1875)[2]) bemerkt er nämlich ausdrücklich, dass man in (II) statt $f(a)$ bezw. $f(b)$ auch jede Zahl $\leqq f(a+0)$ bezw. $\geqq f(b-0)$ (scil., wenn $f(x)$ als niemals abnehmend vorausgesetzt wird) substituiren kann, ohne dass ξ das Intervall $a \leqq \xi \leqq b$ verlässt. Die dafür einzig gegebene Begründung: „das Integral links bleibt dabei unverändert" — scheint mir freilich unzulänglich; denn das Integral links bleibt ja auch unverändert, wenn man $f(a)$, $f(b)$ durch irgendwelche ganz beliebige Zahlen ersetzt. Es wäre daher zur genaueren Prüfung jener Bemerkung eine nochmalige Revision des betreffenden Beweises erforderlich,[3]) die dann in der That ihre Richtigkeit ergiebt. Man gewinnt auf diese Weise an Stelle des Satzes (II) den folgenden:

$$\text{(III)} \quad \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = A\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + B\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx \begin{cases} \text{wo:} & A \leqq f(a+0) < f(b-0) \leqq B, \\ \text{oder:} & A \geqq f(a+0) > f(b-0) \geqq B, \end{cases}$$

welcher dann in der That nicht nur diesen letzteren, sondern auch den Satz (I) als speciellen Fall enthält.[4]) Hierbei

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote.

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), Hist.-lit. Abth., p. 126.

[3]) Man kann sich dabei mit Vortheil der gerade von Herrn Thomae (a. a. O. p. 18) benützten Methode bedienen, dass man setzt:

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = \int_{a'}^{b'} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx,$$

wo: $a' < a < b < b'$ und $\varphi(x) = 0$ für $a' \leqq x \leqq a$ und $b \leqq x \leqq b'$, während $f(x)$ in den hinzugefügten Intervallen bis auf die Monotonie-Bedingung willkürlich bleibt.

[4]) Vgl. Du Bois-Reymond, Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen (Tübingen, [1880]), p. 58.

frappirt nun zunächst die ausserordentlich grosse Willkürlichkeit der beiden mit A, B bezeichneten Zahlen, und es gewinnt wohl zunächst den Anschein, als ob dieselbe auf einer infinitesimalen Eigenschaft des bestimmten Integrals beruhe, nämlich auf dem Umstande, dass die zu integrirende Function für die Stellen einer beliebigen unausgedehnten Punktmenge ganz willkürlich gedacht bezw. abgeändert werden darf, ohne dass der Integralwerth selbst eine Veränderung erleidet. Es erschien mir nun nicht ohne Interesse, festzustellen, dass die Willkürlichkeit in der Auswahl jener Zahlen A, B in Wahrheit ganz elementaren arithmetischen Ursprunges ist, indem nämlich auch für gewöhnliche endliche Summen ein Mittelwerthsatz besteht, der genau die Bauart der Formel (III) besitzt und deren eigentliche Grundlage bildet. Dieser, aus einer einfachen und sehr naheliegenden Umformung der bekannten Abel'schen Transformationsformel (partiellen Summation) hervorgehende Mittelwerthsatz wird in § 1 der folgenden Mittheilung zunächst abgeleitet und des näheren discutirt. In § 2 gebe ich dann einen darauf beruhenden Beweis der Integral-Formel (III), der mir mehr als irgend einer der bisherigen Beweise die äusserst erreichbare Allgemeinheit mit genügender Einfachheit zu verbinden scheint. Zur näheren Begründung dieser Ansicht werden dann noch in § 3 einige historische und kritische Bemerkungen über jene früheren Beweise hinzugefügt.

---

§ 1. Die Abel'sche Transformation und die daraus resultirenden Mittelwerthsätze für endliche Summen.

1. Es seien u_ν, v_ν $(\nu = 1, 2, \dots n)$ beliebig vorgelegte Zahlen und

$$(1) \qquad S_n = \sum_1^n {}^\nu\, u_\nu\, v_\nu .$$

Setzt man sodann:

$$(2) \qquad v_1 + v_2 + \dots + v_\nu = V_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots n),$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Substitution von

$$v_1 = V_1, \quad v_\nu = V_\nu - V_{\nu-1} \quad (\nu = 2, \ldots n)$$

in Gl. (1) die bekannte Abel'sche Transformations-Gleichung:

$$(3) \qquad S_n = \sum_1^{n-1} {}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_n V_n .$$

Um derselben eine etwas allgemeinere, für die weiteren Schlüsse zweckmässige Gestalt zu geben, bezeichne ich mit u_0, u_{n+1} zwei vollkommen willkürlich anzunehmende Zahlen, mit V_0 die Null. Alsdann besteht die Identität:

$$(4) \qquad 0 = (u_0 - u_1) \cdot V_0 - u_{n+1} V_n + u_{n+1} V_n$$

und es ergiebt sich, wenn man dieselbe zu Gleichung (3) addirt:

$$(A) \qquad S_n = \sum_0^{n} {}^{\nu} (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_{n+1} V_n .$$

2. Es seien jetzt die Zahlen $u_1, u_2, \ldots u_n$ reell und so gegeben, dass sie eine monotone (gleichgültig ob niemals zu- oder niemals abnehmende) Folge bilden; und es mögen sodann u_0, u_{n+1} im übrigen zwar willkürlich, jedoch so angenommen werden, dass sie sich dieser monotonen Folge anschliessen (welcher Bedingung u. a. stets genügt wird, wenn man speciell $u_0 = u_1$, $u_{n+1} = u_n$ setzt). Ferner werde allgemein durch die Symbole:

$$\underset{\nu=m}{\overset{\nu=m+p}{\mathrm{Max}}} (a_\nu) \qquad \underset{\nu=m}{\overset{\nu=m+p}{\mathrm{Min}}} (a_\nu) \qquad \underset{\nu=m}{\overset{\nu=m+p}{\mathfrak{M}}} (a_\nu)$$

das Maximum, das Minimum, ein Mittelwerth

aus irgendwelchen Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots a_{m+p}$ bezeichnet.

Alsdann ergeben sich im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \geq 0$ aus Gl. (A) die Ungleichungen:

$$(B) \qquad S_n \left\{ \begin{array}{l} > (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Min}}} (V_\nu) \\ < (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Max}}} (V_\nu) \end{array} \right\} + u_{n+1} V_n$$

und entsprechend im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \leqq 0$ die durch Vertauschung der Zeichen $\gtrless$ hieraus hervorgehenden. Man erhält daher in jedem dieser beiden Fälle, d. h. wenn die u_ν eine monotone Folge bilden, den folgenden Mittelwerthsatz:

$$(C) \qquad S_n = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} V_n$$
$$= u_0 \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} (V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_n)).$$

Da $\underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$ einen mittleren Werth aus den Zahlen $V_0, V_1, \ldots V_n$ bedeutet, so muss es entweder mindestens ein bestimmtes $m < n$ geben,[1] sodass:

$$(5) \qquad \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = V_m;$$

oder es tritt in der Reihe $V_0, V_1, \ldots V_n$ mindestens bei einem bestimmten Index m (wo: $0 \leqq m < n$) der Fall ein:

$$(6) \qquad V_m < \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) < V_{m+1}.$$

Man kann also beide Fälle dahin zusammenfassen, dass:

$$(7) \qquad \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = V_m + \vartheta (V_{m+1} - V_m), \text{ wo: } 0 \leqq \vartheta < 1,$$

d. h. mit Rücksicht auf die Beziehung: $V_{m+1} - V_m = v_{m+1}$:

$$(8) \qquad \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = \begin{cases} V_m + \vartheta\, v_{m+1} \\ V_{m+1} - (1 - \vartheta) \cdot v_{m+1}. \end{cases}$$

Durch Einführung der Ausdrücke (6) in den Mittelwerthsatz (C) nimmt dann derselbe noch die folgende Form an:

---

[1]) Wäre $m = n$ d. h. n der erste Index, für welchen:

$$\underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) = V_n,$$

so müssen $V_0, V_1, \ldots V_{n-1}$ theils unterhalb, theils oberhalb $\underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$ liegen, sodass also für ein $m < n - 1$ eine Ungleichung von der Form (6) besteht.

$$\text{(D)}\quad S_n = u_0(V_m + \vartheta\cdot v_{m+1}) + u_{n+1}((1-\vartheta)\cdot v_{m+1} + (V_n - V_{m+1}))$$
$$= u_0\left(\sum_1^m{}' v_\nu + \vartheta\cdot v_{m+1}\right) + u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}' v_\nu\right),$$

wo also m eine bestimmte (möglicherweise auf mehrfache Art wählbare) Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots (n-1)$ bedeutet und $0 \leqq \vartheta < 1$. Dabei ist noch anzumerken, dass für die beiden äussersten Fälle $m = 0$ bezw. $m = n - 1$ die Beziehungen bestehen: $V_m \equiv V_0 = 0$ bezw. $V_n - V_{m+1} \equiv V_n - V_n = 0$, sodass man also den in diesen Fällen bei der zweiten Schreibweise auftretenden Symbolen: $\sum_1^0{}' v_\nu$ bezw. $\sum_{n+1}^n v_\nu$ die Bedeutung von 0 beizulegen hat.

3. Sind die u_ν nicht nur monoton, sondern auch gleichbezeichnet, in welchem Falle also auch die numerischen Werthe der u_ν eine monotone Folge bilden, so kann man, falls die letzteren niemals zunehmen, also: $|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$, über u_{n+1} so verfügen, dass man $u_{n+1} = 0$ setzt; während man $u_0 = 0$ annehmen kann, wenn die $|u_\nu|$ niemals abnehmen, also: $|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|$. Der Mittelwerthsatz (C) liefert also in diesen beiden Fällen die folgenden Beziehungen:

$$\text{(E)}\quad \begin{cases} (1)\ S_n = u_0 \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}}(V_\nu) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1}\cdot \left(V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}}(V_\nu)\right) & (|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|), \end{cases}$$

die sich mit Hülfe von (D) auch in die folgende Form setzen lassen:

$$\text{(F)}\quad \begin{cases} (1)\ S_n = u_0\left(\sum_1^m{}' v_\nu + \vartheta\cdot v_{m+1}\right) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}' v_\nu\right) & (|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|). \end{cases}$$

Hierzu bemerke ich, dass man Gl. (E, 1), nicht aber Gl. (E, 2) auch unmittelbar, d. h. ohne den Weg über Gl. (C) zu nehmen, aus der Fundamental-Formel (A) herleiten kann: man hat dabei nur zu beachten, dass bei gleichbezeichneten u_ν und

$|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ die Differenzen $u_\nu - u_{\nu+1}$ mit den u_ν, also speciell auch mit u_{n+1} gleiches Vorzeichen haben.

Andererseits ist aber hervorzuheben, dass Gl. (E, 1), trotzdem sie durch Einführung einer specielleren Voraussetzung über die u_ν und durch Specialisirung der willkürlichen Grösse u_{n+1} aus Gl. (C) hervorging, doch genau dieselbe Tragweite besitzt, wie die formal allgemeinere Gleichung (C), d. h. dass man auch umgekehrt Gl. (C) ohne weiteres aus Gl. (E, 1) herleiten kann. Denn angenommen, es stehe von den u_ν nur soviel fest, dass $u_\nu \geqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$, so wähle man $u_{n+1} \leqq u_n$, im übrigen beliebig. Alsdann bestehen die Beziehungen:

$$(9) \qquad u_\nu - u_{n+1} \geqq u_{\nu+1} - u_{n+1} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots (n-1)),$$

sodass also auch:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Hat man dagegen: $u_\nu \leqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$ und wird sodann $u_{n+1} \geqq u_n$ angenommen, so ergiebt sich:

$$(10) \qquad u_\nu - u_{n+1} \leqq u_{\nu+1} - u_{n+1} \leqq 0,$$

und daher wiederum:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Die Terme $(u_\nu - u_{n+1})$ genügen somit, wenn nur die u_ν überhaupt monoton sind, allemal derselben Bedingung, wie die u_ν im Falle der Gleichung (E, 1). Wendet man also diese letztere auf die $(u_\nu - u_{n+1})$ an, so resultirt:

$$(11) \qquad \sum_1^n{}^\nu (u_\nu - u_{n+1}) \cdot v_\nu = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$$

d. h.
$$\sum_1^n{}^\nu u_\nu v_\nu = u_0 \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (C).

4. Diese Beziehungen erleiden eine merkliche Verschiebung, wenn man statt von der verallgemeinerten Abelschen Transformations-Formel (A) von deren ursprünglicher

Form (3) ausgeht. An die Stelle des Mittelwerthsatzes (C) tritt dann offenbar der folgende:

$$(C') \qquad S_n = u_1 \mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n-1} (V_\nu) + u_n \left(V_n - \mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n-1} (V_\nu) \right),$$

dem man (durch Anwendung einer der Relation (8) analogen Transformation auf $\mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n-1} (V_\nu)$) auch die folgende Form geben kann:

$$(D') \quad S_n = u_1 \left(\sum_1^m{}' v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1} \right) + u_n \left((1-\vartheta) v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}' v_\nu \right),$$

wo jetzt m eine gewisse Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots (n-2)$ bedeutet.[1])

Werden jetzt wiederum die u_ν noch dahin eingeschränkt, dass ausser der Monotonie der u_ν noch die Beziehung $|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ vorausgesetzt wird, so gelangt man von der Gl. (3) zu dem bekannten Abel'schen Lemma:

$$(E') \qquad S_n = u_1 \cdot \mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu),$$

während es andererseits schlechterdings unmöglich erscheint, diese Relation direkt[2]) aus der unter allgemeineren Voraussetzungen bestehenden Formel (C') zu erschliessen. Dagegen kann man umgekehrt durch Anwendung der Formel (E') auf

---

[1]) Es ist das, beiläufig bemerkt, diejenige Formel, welche Du Bois-Reymond (Freiburger Antrittsprogramm, p. 2) sonderbarer Weise als Folgerung aus dem entsprechenden Integralsatze herleitet, während sie doch unmittelbar aus der Abel'schen Transformation resultirt und gerade die Grundlage jenes Integralsatzes bildet.

[2]) D. h. ohne die Formel (C') durch Hinzufügung eines weiteren Summanden u_{n+1}, v_{n+1}, (wo $v_{n+1} = 0$, u_{n+1} nur der Monotonie-Bedingung zu genügen hat) ähnlich wie in Nr. 1 und 2 in die folgende überzuführen:

$$S_n = u_1 \mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \mathfrak{M}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) \right),$$

und sodann analog, wie beim Uebergange von Formel (C) zu (E) zu verfahren.

die Terme $(u_\nu - u_n)$, welche wiederum stets der Bedingung $|u_\nu - u_n| \geqq |u_{\nu+1} - u_n|$ genügen, auch wenn von den u_ν lediglich die Monotonie vorausgesetzt wird, ohne weiteres die mit Gl. (C′) im wesentlichen gleichwerthige Beziehung erhalten:

$$S_n = u_0 \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) + u_n \left(V_n - \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) \right).$$

Es besitzt also hier die unter specielleren Voraussetzungen bestehende Gleichung (E′) in Wahrheit einen weiteren Wirkungskreis, als die unter allgemeineren Bedingungen geltende Formel (C′), d. h. es besteht zwischen den Formeln (E′) und (C′) genau dasselbe Verhältniss, wie zwischen dem Bonnet'schen und dem Du Bois-Reymond'schen Satze (I) und (II).

---

§ 2. Der zweite Mittelwerthsatz für bestimmte Integrale.

1. Lehrsatz. Ist im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ die Function $f(x)$ *endlich* und *monoton*, $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ *integrabel*,[1]) so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = y_0 \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx,$$

wo ξ einen gewissen, der Bedingung $x_0 \leqq \xi \leqq X$ genügenden Werth besitzt, während y_0, Y zwei der *monotonen* Folge der $f(x)$-Werthe bei $x = x_0$ und $x = X$ sich anschliessende, im übrigen willkürliche Zahlen bedeuten, sodass also entweder:

$$y_0 \geqq f(x_0 + 0) > f(X - 0) \geqq Y,$$

oder:
$$y_0 \leqq f(x_0 + 0) < f(X - 0) \leqq Y.$$

---

1) Ich nenne $\varphi(x)$ im Intervalle $x_0 < x \leqq X$ integrabel, wenn nicht nur $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx$, sondern auch $\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x)\, dx$ für $x_0 < \xi \leqq X$ existirt.

Bezüglich der in die Voraussetzung aufgenommenen Integrabilitäts-Eigenschaften von $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ bemerke ich folgendes. Die Function $f(x)$ ist auf Grund der vorausgesetzten Endlichkeit und Monotonie allemal integrabel, auch wenn sie im übrigen beliebig viele Unstetigkeiten besitzt.[1]) Ist dann $\varphi(x)$ endlich und integrabel oder besitzt $\varphi(x)$ nur solche Unendlichkeitsstellen,[2]) dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ integrabel ausfällt, so ist jedesmal $f(x) \cdot \varphi(x)$ eo ipso integrabel.[3]) Dies gilt sogar auch dann noch, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function $\varphi(x)$ eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen besitzt, in deren Umgebung die absolute Integrabilität nicht vorhanden ist.[4]) Nur wenn Punkte der letztgenannten Art in unbegrenzter Anzahl auftreten, muss ausser der Integrabilität von $\varphi(x)$ noch diejenige von $f(x) \cdot \varphi(x)$ ausdrücklich in die Voraussetzung aufgenommen werden. Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass die Aussage, eine Function $\varphi(x)$, die in irgend einem Intervalle unendlich viele Unendlichkeits-Stellen besitzt, sei daselbst integrabel, allemal die Voraussetzung involvirt, dass jene Stellen eine unausgedehnte Menge bilden: hiermit ist nämlich, meines Wissens, die äusserste Grenze bezeichnet, bis zu welcher der Integral-Begriff überhaupt noch definirbar erscheint.[5])

---

[1]) S. z. B. Dini-Lüroth, p. 338, § 187, 6.

[2]) Also z. B., wie $\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}, \frac{1}{x^{1-\varepsilon}} \cdot \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$.

[3]) Dini-Lüroth, p. 346, § 190, 5; — p. 419, § 226.

[4]) Ebendas. p. 422, § 227.

[5]) Herr Dini (a. a. O. p. 406, § 217) beschränkt die Definition auf den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine Menge erster Gattung bilden (welche dann eo ipso auch unausgedehnt ist — s. z. B. Dini-Lüroth, p. 25, § 14) und beweist auch die Gültigkeit des Mittelwerthsatzes für diesen Fall: Serie di Fourier etc. (Pisa, 1880), p. 22. — Harnack (Math. Ann. Bd. 21 [1883], p. 325; ausführlicher Bd. 24 (1884), p. 220) definirt das Integral für den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine beliebige unausgedehnte (von ihm als „discret" bezeichnete) Menge ausmachen und beweist (an der zuerst citirten Stelle) ebenfalls

2. Beweis des Lehrsatzes. Man theile das Intervall (x_0, X) durch Einschaltung der Punkte $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ in n Theil-Intervalle, sodass also:

$$(1) \quad J \equiv \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = \sum_{1}^{n} {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \quad (\text{wo: } x_n = X)$$

gesestzt werden kann. Auf jedes dieser Theil-Integrale wende man die identische Umformung an:

$$(2) \quad \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f_\nu(x) \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx + \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\} \cdot \varphi(x) \cdot dx,$$

und zwar mag hier, falls etwa $f(x)$ an der Stelle x_ν unstetig sein sollte, unter $f_\nu(x)$ der (allemal eindeutig bestimmte) Werth $f(x_\nu - 0)$ verstanden werden: die Zahlen $f(x_\nu)$ bilden dann für $\nu = 1, 2, \ldots n$, wegen der Monotonie von $f(x)$, stets eine monotone Folge.

Durch Einführung der Umformung (2) in die rechte Seite von Gl. (1) ergiebt sich:

$$(3) \qquad J = J_n + R_n$$

wo:

---

den Mittelwerthsatz in dem entsprechenden Umfange. Doch reichen die Erörterungen Harnack's nicht aus, um die Existenz des Integrals in dem Sinne zu gewährleisten, dass gleichzeitig mit $\int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$ auch das Integral über jedes Theil-Intervall existirt (vgl. Stolz, Wiener Sitz.-Ber. Bd. 107[2] [1898], p. 3; Grundzüge der Diff.- und Integr.-Rechnung, Bd. III, p. 277). Dies ist, wenn die Unendlichkeits-Stellen eine Menge zweiter Gattung bilden, dann und nur dann der Fall, wenn ausser $\varphi(x)$ auch $|\varphi(x)|$ im Harnack'schen Sinne integrabel ist (vgl. Stolz, a. a. O. und Wiener Sitz.-Ber. Bd. 28[2] [1899], p. 1235). Für nicht absolut integrable $\varphi(x)$ muss es daher wohl bei der Dini'schen Voraussetzung sein Bewenden haben, dass die Unendlichkeitsstellen höchstens eine Menge erster Gattung bilden (so auch bei De La Vallée-Poussin, Journ. de Math. (4), T. 8 [1892], p. 453).

$$(4) \qquad J_n = \sum_1^n{}^{\nu} f(x_\nu) \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

$$(5) \qquad R_n = \sum_1^n{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{ f(x) - f(x_\nu) \} \cdot \varphi(x) \cdot dx.$$

Der ganze Beweis des fraglichen Satzes besteht nun in der Anwendung der Abel'schen Transformation bezw. der daraus resultirenden Mittelwerth-Relation auf J_n und sodann in dem Nachweise, dass R_n bei hinlänglicher Vergrösserung von n beliebig klein wird.

Setzt man, mit Bezugnahme auf die in § 1 benützten Bezeichnungen, für $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$u_\nu = f_\nu(x), \quad v_\nu = \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx, \quad \text{also:} \quad V_\nu = \sum_1^\nu{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

und ausserdem: $u_0 = y_0$, $u_{n+1} = Y$, so nehmen die Ungleichungen (B), welche noch die Voraussetzung $f(x_\nu) > f(x_{\nu+1})$, also $f(x_0) > f(X)$ erheischen, die folgende Form an:

$$(6) \qquad J_n \left\{ \begin{array}{l} > (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Min}}} \displaystyle\int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \\ < (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Max}}} \displaystyle\int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \end{array} \right\} + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Dabei hätte man $Y \leq f(x_n - 0) = f(X - 0)$ und zunächst nur $y_0 \geq f(x_1 - 0)$ anzunehmen: dieser letzteren Bedingung wird aber (unabhängig von der Wahl des x_1) a fortiori genügt, wenn man $y_0 \geq f(x_0 + 0)$ festsetzt.

Zieht man jetzt statt der n Integrale $\int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx (\nu = 1, 2, \ldots n)$ alle möglichen Werthe des Integrals $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ für $x_0 \leq x' \leq X$ in Betracht, so bestehen offenbar die Beziehungen:

$$(7)\quad \operatorname*{Min}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \leq \operatorname*{Min}_{\nu=0}^{\nu=n} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx, \quad \operatorname*{Max}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \geq \operatorname*{Max}_{\nu=0}^{\nu=n} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx,$$

sodass aus den Ungleichungen (6) a fortiori die folgenden sich ergeben:

$$(8)\qquad J_n \left\{ \begin{array}{l} > (y_0 - Y)\cdot \operatorname*{Min}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \\ < (y_0 - Y)\cdot \operatorname*{Max}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \end{array} \right\} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx,$$

bei denen jetzt der Einfluss von n auf der rechten Seite vollständig eliminirt erscheint. Angenommen nun, man könne durch passende Vergrösserung von n bei jedem $\varepsilon > 0$ erzielen, dass:

$$(9)\qquad |R_n| < \varepsilon, \text{ also } R_n \left\{ \begin{array}{l} > -\varepsilon \\ < +\varepsilon, \end{array} \right.$$

so ergiebt sich durch Addition der beiden letzten Ungleichungen zu den entsprechenden Ungleichungen (8):

$$(10)\qquad J \left\{ \begin{array}{l} > (y_0 - Y)\cdot \operatorname*{Min}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx - \varepsilon \\ < (y_0 - Y)\cdot \operatorname*{Max}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx + \varepsilon \end{array} \right\} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx$$

und somit, da ε die untere Grenze Null besitzen sollte:

$$(11)\qquad J \left\{ \begin{array}{l} \geq (y_0 - Y)\cdot \operatorname*{Min}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \\ \leq (y_0 - Y)\cdot \operatorname*{Max}_{x'=x_0}^{x'=X} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \end{array} \right\} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx.$$

Die entsprechenden Beziehungen mit Vertauschung der Zeichen $\gtrless$ ergeben sich im Falle $f(x_0) > f(X)$. Man hat also, sofern nur $f(x)$ für $x_0 < x < X$ monoton ist,

$$(12)\qquad J = (y_0 - Y)\cdot \operatorname*{\mathfrak{M}}_{x'=x_0}^{x'=X} \left(\int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\, dx \right) + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx$$

und da man dem betreffenden Mittelwerthe wegen der Stetigkeit von $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ die Form: $\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx$, wo: $x_0 \leqq \xi < X$ geben kann, schliesslich, wie behauptet:

$$(13) \qquad J = (y_0 - Y) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$$
$$= y_0 \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Es handelt sich somit einzig und allein noch um den Nachweis der Beziehung (9). Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ in dem fraglichen Intervalle integrabel sei.[1] Aus Gl. (5) folgt zunächst:

$$(14) \qquad |R_n| \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(x) - f(x_\nu)| \cdot |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Da nun, wegen der Monotonie von $f(x)$, für jedes einzelne Integrations-Intervall $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ die Beziehung besteht:

$$(15) \quad |f(x) - f(x_\nu)| \equiv |f(x) - f(x_\nu - 0)| \leqq |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)|.$$

so ergiebt sich weiter:

$$(16) \quad |R_n| \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu} |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)| \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Wird jetzt $\varepsilon' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man die Theil-Intervalle $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ so weit verkleinern,[2] dass:

[1] Diese Bedingung ist an sich schon erfüllt, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function endlich bleibt. Im übrigen beschränkt sie lediglich den Charakter, nicht aber die Anzahl der etwa zulässigen Unendlichkeitsstellen.

[2] Dies ist ohne weiteres klar, wenn $\varphi(x)$ durchweg endlich bleibt, folgt aber auch für den Fall eines absolut integrablen, unendlichwerdenden $\varphi(x)$ unmittelbar aus der entsprechenden Definition eines Integrales von der Form $\int_a^b |\varphi(x)| \cdot dx$.

(17) $$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx < \varepsilon' \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Alsdann wird aber:

$$|R_n| < \varepsilon' \cdot \sum_1^n{}^\nu |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)|,$$

und da die Differenzen $f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)$ wegen der vorausgesetzten Monotonie von $f(x)$ sämmtlich gleichbezeichnet (eventuell auch Null) sind, also:

$$\sum_1^n{}^\nu |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| = |\sum_1^n{}^\nu \{f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)\}|$$
$$\leqq |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

schliesslich:

(18) $$|R_n| < \varepsilon' \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

sodass also in der That $|R_n|$ — unter Voraussetzung eines absolut integrablen $\varphi(x)$ — durch passende Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden kann.[1])

Es möge nun zweitens $\varphi(x)$ auch solche Unendlichkeitsstellen a besitzen, dass zwar nicht mehr $|\varphi(x)|$, wohl aber $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ durchweg integrabel bleiben. Da die a im äussersten Falle eine unausgedehnte[2]) Menge bilden, so besagt die obige Integrabilitäts-Voraussetzung folgendes: Wird $\varepsilon'' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so lassen sich die Stellen

---

[1]) Man kann dieses Resultat auch noch in anderer Weise erschliessen. Da $f(x)$ monoton ist und endlich bleibt, so kann es nur eine endliche Anzahl von Stellen x' geben, in deren Umgebung die Schwankung von $f(x)$ eine (beliebig klein vorzuschreibende) positive Zahl ε' erreicht oder übersteigt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Theil-Intervalle wird die Gesammtlänge der Intervalle, welche jene Punkte x' enthalten eine beliebig kleine Zahl δ, und zugleich in allen übrigen Intervallen:

$$|f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| < \varepsilon'.$$

Man findet daher aus Ungl. (16):

$$|R_n| < \varepsilon' \cdot \int_{x_0}^{X} |\varphi(x)| \cdot dx + \delta \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|.$$

[2]) Vgl. übrigens p. 220, Fussnote.

a in eine endliche Anzahl von Intervallen: $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$, wo etwa:

$$(19) \qquad \delta_\varkappa = x_{m_\varkappa} - x_{m_\varkappa - 1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots p),$$

einschliessen, so dass:

$$(20) \quad (a) \ \left|\sum_1^\lambda{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x)\cdot dx\right| < \varepsilon'', \quad (b) \ \left|\sum_1^\lambda{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx\right| < \varepsilon''$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots p).$$

Bezeichnet man sodann mit $\varphi_1(x)$ eine Function, die ausserhalb der Intervalle $\delta_\varkappa$ mit $\varphi(x)$ übereinstimmt, dagegen für $x_{m_\varkappa - 1} \leq x \leq x_{m_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ verschwindet, so lässt sich R_n in die Form setzen:

$$(21) \ R_n = \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\}\cdot\varphi_1(x)\cdot dx + \sum_1^p{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \{f(x) - f(x_{m_\varkappa})\}\cdot\varphi(x) dx.$$

$$= R_n' + S_p.$$

Da $\varphi_1(x)$ endlich bleibt, so gilt für R_n' das zuvor in Bezug auf R_n gefundene Ergebniss Ungl. (18), d. h. man erhält bei passender Vergrösserung von n:

$$(22) \qquad |R_n'| < \varepsilon' \cdot |f(x_0 + 0) - f(X - 0)|.$$

Ferner hat man:

$$(23) \qquad S_p = \sum_1^p{}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx + \sum_1^p{}^\varkappa f(x_{m_\varkappa}) \cdot \int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x)\cdot dx.$$

Die erste dieser Summen liegt nach Ungl. (20^b) numerisch unter ε''. Auf die zweite kann man, wegen der Monotonie von $f(x_{m_\varkappa})$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots p$, den Mittelwerthsatz (C) des vorigen Paragraphen (p. 214) anwenden. Beachtet man, dass jede der in Betracht kommenden Summen und folglich auch jeder aus ihnen gezogene Mittelwerth nach Ungl. (20^a) numerisch unter ε'' liegt, so ergiebt sich:

$$(24) \ \left|\sum_1^p{}^\varkappa f(x_{m_\varkappa})\cdot\int_{x_{m_\varkappa-1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x)\cdot dx\right| < |f(x_0+0) - f(X-0)|\cdot\varepsilon'' + |f(X-0)|\cdot\varepsilon'',$$

und daher schliesslich:

(25) $|R_n| < (\varepsilon' + \varepsilon'') \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)| + \varepsilon''(1 + |f(X-0)|)$.

Damit ist aber der ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen.

3. Setzt man speciell: $y_0 = f(x_0 + 0)$, $Y = f(X-0)$, so erhält man die zumeist übliche Form des fraglichen Satzes:

$$(26) \quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0+0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + f(X-0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Und wenn sodann die $f(x)$-Werthe nicht nur monoton, sondern auch gleichbezeichnet sind, sodass man setzen kann: $Y = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| > |f(X-0)|$, dagegen $y_0 = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| < |f(X-0)|$, so folgt:

$$(27) \quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0+0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0+0)| > |f(X-0)|).$$

$$(28) \quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(X-0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0+0)| < |f(X-0)|).$$

Will man lediglich — etwa im Rahmen einer Elementar-Vorlesung — die für die Anwendungen wichtigsten Formeln (26) (27) beweisen, so wird man am einfachsten im Anschlusse an das gewöhnliche Abel'sche Lemma[1]) und unter Einhaltung des (natürlich sich entsprechend vereinfachenden) Beweisverfahrens von Nr. 2 zunächst Gl. (27) und hieraus nach der in

---

[1]) In der bekannten, aus Gl. (3) des vorigen Paragraphen unmittelbar hervorgehenden Form:

$$u_1 \cdot \operatorname*{Min}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) < S_n < u_1 \cdot \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu).$$

Kehrt man die Reihenfolge der Glieder um, so ergiebt sich entsprechend:

$$u_n \operatorname*{Min}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_{\nu,n}) < S_n < u_n \operatorname*{Max}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_{\nu,n})$$

$$(\text{wo: } V_{\nu,n} = v_\nu + v_{\nu+1} + \ldots + v_n),$$

eine Beziehung, aus der dann analog Gl. (28) resultiren würde.

der Einleitung angedeuteten Methode Gl. (26) ableiten.[1]) Man gewinnt dabei gegenüber den sonst üblichen Beweisen immer noch den Vortheil, dass das Auftreten von Unendlichkeits-Stellen, welche die absolute Integrabilität von $\varphi(x)$ bestehen lassen, sowie dasjenige unendlich vieler Zeichenwechsel bei $\varphi(x)$ den Haupttheil des Beweises in keiner Weise complicirt.

---

§ 3. Ueber die bisherigen Beweise des zweiten Mittelwerthsatzes der Integralrechnung.

1. Bonnet bezeichnet seinen Integralsatz (Fussn. 1, p. 209) als eine unmittelbare Folge des Abel'schen Lemma's, ohne in eine genauere Discussion der erforderlichen Grenzübergänge einzutreten. Das entsprechende gilt von dem sogenannten Hankel'schen Beweise des Satzes in der gewöhnlichen Du Bois-Reymond'schen Form (p. 209, Gl. II).[2]) Hankel beweist in Wahrheit nur nochmals die Abel'sche Transformation für $\sum_{n}^{0}{}^{\nu} u_\nu v_\nu$ und leitet daraus diejenige Summen-Relation ab, welche der Mittelwerth-Formel (C') des § 1 bei Umkehrung der Gliederfolge entspricht. Im übrigen begnügt er sich mit dem Hinweise, dass daraus durch einen passenden Grenzübergang die fragliche Integralformel hervorgehe.

Immerhin lehren diese Beweis-Andeutungen so viel, dass der eigentliche Kern des fraglichen Satzes in der Abel'schen Transformation liegt, und zwar gleichgültig, ob man auf den Beweis der Bonnet'schen (I), der gewöhnlichen (II) oder der verallgemeinerten (III) Du Bois-Reymond'schen Form ausgeht: gelingt es nur, die Abel'sche Transformation in an-

---

[1]) Die directe Ableitung von Gl. (26) scheint mir aus dem Grunde unvortheilhaft, weil man alsdann die zur Abschätzung von Integralen mit der oberen Grenze ∞ besonders nützliche Formel (27) überhaupt nicht erhält. (So z. B. bei Thomae, a. a. O. p. 18; Stolz, Grundzüge der Diff.- und Int.-R., Bd. I, p. 420).

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. 14 (1869), p. 436.

gemessener Weise auf das Integral $\int\limits_{x_0}^{X} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx$ anzuwenden, so hängt die besondere Form des Endresultates lediglich davon ab, ob man (je nachdem $f(x)$ als monoton und gleichbezeichnet oder nur als monoton vorausgesetzt wird) für den Endschluss das gewöhnliche Abel'sche Lemma (E'), die Mittelwerth-Relation (C') oder deren verallgemeinerte Form (C) des § 1 (bezw. die diesen Gleichungen zu Grunde liegenden Ungleichungen) benützt. Was nun aber die Möglichkeit betrifft, jenes Integral mit Hülfe der Abel'schen Transformation umzugestalten, so ergeben sich hier zwei verschiedene Wege.

2. Am nächsten liegt es offenbar, die Umgestaltung des Integrals in eine Summe von der Form $\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\, u_\nu\, v_\nu$ dadurch zu ermöglichen, dass man auf dessen Definition als Grenzwerth einer solchen Summe zurückgeht:

$$(1)\qquad J = \int\limits_{x_0}^{X} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = \lim_{n=\infty}\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(x_\nu)\cdot(\varphi(x_\nu)\cdot\delta_\nu).$$

Der erste Beweis dieser Art — und zwar für die Satzform (II) — ist wohl derjenige des Herrn Thomae (1875),[1]) etwas übersichtlicher (Satzform (I)) der des Herrn Dini (1878).[2]) Unvollständig scheint mir ein ebenfalls hierher gehöriger Beweis von Kronecker (1885),[3]) der auch in die von Herrn Netto herausgegebenen Vorlesungen über die Theorie der Integrale übergegangen ist,[4]) während andererseits der von Kron-

[1]) A. a. O. p. 18.

[2]) Dini-Lüroth, p. 387, § 204.

[3]) Mathesis, T. 5, p. 100. Es fehlt die Erörterung der Beziehung zwischen den dort mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlen.

[4]) A. a. O. p. 59. Die in der vorigen Fussnote mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlenpaare sind hier beide mit M_0, M bezeichnet. Dabei bedeuten M_0, M einmal eine untere und obere Schranke für

$$\sum_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} \varphi(x_\nu)\cdot\delta_\nu \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

ecker bei dieser Gelegenheit ausgesprochene Zweifel, ob das Integral allemal eine stetige Function seiner oberen Grenze sei, schwerlich von vielen Mathematikern getheilt werden dürfte. Die bei dem Kronecker'schen Beweise nach meinem Dafürhalten bestehende Lücke ist wohl am zweckmässigsten in dem von Herrn Hölder[1]) gegebenen Beweise ausgefüllt, weniger scharf bei C. Jordan.[2])

Im übrigen scheint mir diese ganze Beweis-Methode bei vollkommen strenger Durchführung eine gewisse Schwerfälligkeit und Unübersichtlichkeit mit sich zu bringen, die gerade aus dem Zurückgreifen auf die Summen-Definition entspringt. Auch bezieht sie sich ausschliesslich auf den Fall eines endlich bleibenden $\varphi(x)$: das Auftreten eines einzigen Unendlichkeitspunktes einfachster Art erfordert wieder eine besondere Betrachtung.

3. Aus diesen Gründen halte ich die zweite Methode, die sich zur Ausführung der fraglichen Transformation des Integrals darbietet, für vortheilhafter. Sie besteht darin, das Integral in eine Summe von Theil-Integralen:

$$\sum_1^n {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

zu zerlegen, diese letzteren auf die Form zu bringen:

$$u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x)\, dx,$$

oder zum mindesten auf die folgende:

$$u_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx + r_\nu \text{ (wo: } \sum_1^n {}^{\nu} r_\nu \text{ mit } \frac{1}{n} \text{ gegen Null convergirt),}$$

---

das andere Mal Minimum und Maximum von

$$\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \text{ für } x_0 < x' \leq X.$$

[1]) Gött. Anzeigen, 1894, p. 520.

[2]) Cours d'Analyse, T. II, p. 222.

und sodann auf $\sum_1^n{}^{\nu}\, u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx$ wiederum die Abel'sche Transformation anzuwenden.

Diese Methode liegt in Wahrheit dem sehr unübersichtlichen[1]) Beweise von Du Bois-Reymond[2]) zu Grunde: nur erscheint sie, da die betreffende Umformung nicht mit Hülfe einer allgemeinen Formel, sondern schrittweise vollzogen wird, und in Folge einer ganz besonders unglücklich gewählten Bezeichnungsweise bis zur Unkenntlichkeit verdunkelt.

In ihrer einfachsten Gestalt findet man sie bei dem Beweise des Herrn G. F. Meyer. Auf Grund der dort eingeführten beschränkenden Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ nur an einer endlichen Anzahl von Stellen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ das Vorzeichen wechseln solle, ergiebt sich durch Anwendung des ersten Mittelwerthsatzes auf $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx$ $(\nu = 1, 2, \ldots n;\ x_n = X)$:

$$J = \sum_1^n{}^{\nu}\, u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx, \tag{2}$$

wo u_ν einen (unbekannten) Mittelwerth von $f(x)$ für $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ bezeichnet. Da die u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ gleichzeitig mit $f(x)$ monoton sind, so folgt dann alles weitere unmittelbar durch Anwendung der Abel'schen Transformation.

Der Beweis des Herrn Neumann[3]) beruht auf einer Zerlegung von folgender Form:

$$\begin{aligned} J &= \sum_1^n{}^{\nu}\, u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx + \sum_1^n{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} (f(x) - u_\nu)\cdot\varphi(x)\cdot dx \\ &= J_n + R_n, \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) „Mühsam, aber lehrreich" sagt Kronecker: Vorl. über Integr. p. 60.

[2]) S. p. 209, Fussn. 2.

[3]) Math. Ann. Bd. 6 (1873), p. 315.

wo u_ν das arithmetische Mittel von $f(x)$ für $x_{\nu-1} \leq x \leq x_\nu$ bedeutet. Auf J_n wird dann wieder die Abel'sche Transformation angewendet, andererseits aber, um aus der Beziehung:

$$(4) \qquad |R_n| \leq \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(x) - u_\nu| \cdot |\varphi(x)| \cdot dx$$

das Verschwinden von $\lim_{n=\infty} R_n$ zu erschliessen, die beschränkende Voraussetzung der abtheilungsweisen Stetigkeit von $f(x)$ eingeführt. In Folge dieser letzteren Bedingung ergiebt sich offenbar bei passender Wahl der x_ν und hinlänglicher Verkleinerung von $x_\nu - x_{\nu-1}$:

$$(5) \qquad |R_n| < \varepsilon \cdot \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx = \varepsilon \cdot \int_{x_0}^{X} |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Die beim Meyer'schen Beweise angeführte Beschränkung bezüglich der Zeichenwechsel von $\varphi(x)$ kann durch ein von Du Bois-Reymond[1]) angegebenes Verfahren nachträglich wieder beseitigt werden. Auch der Neumann'sche Beweis lässt sich dahin ergänzen, dass die in Bezug auf $f(x)$ eingeführte Stetigkeits-Bedingung unnöthig erscheint.[2])

Da der im vorigen Paragraphen von mir angegebene Beweis, der ja ebenfalls dem hier charakterisirten Typus angehört,[3]) ohne irgendwelche nachträgliche Correctur zu erfordern, den fraglichen Satz sofort in der allgemeinsten Form und unter den denkbar allgemeinsten Voraussetzungen liefert, so dürfte er vielleicht immerhin einige Beachtung verdienen.

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote. Weniger allgemein bei Stolz, Grundzüge I, p. 422.

[2]) Vgl. Fussnote 1, p. 224.

[3]) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass die Form, unter welcher ich hier den Meyer'schen und Neumann'schen Beweis dargestellt habe und welche ja mit derjenigen meines Beweises ausserordentliche Aehnlichkeit besitzt, keineswegs deren Originalform ist, vielmehr von mir nur gewählt wurde, um den eigentlichen Kern und das gemeinsame aller dieser Beweise möglichst scharf hervortreten zu lassen.

4. Von Beweisen des fraglichen Satzes, die nicht auf der Abel'schen Transformation beruhen, sind mir nur zwei bekannt geworden: der von Weierstrass in seinen Vorlesungen schon vor der Du Bois-Reymond'schen Publication gegebene und ein anderer, der von Herrn Netto herrührt. Der erstere[1]) basirt auf der partiellen Integration und erfordert demgemäss die Existenz einer integrablen Derivirten $f'(x)$, besitzt also erheblich geringere Tragweite, als irgend einer der bisher betrachteten Beweise und macht insbesondere die allgemeine Anwendbarkeit des Satzes auf den Convergenz-Beweis der Fourier'schen Reihe illusorisch. Im übrigen beruht dieser Beweis im Grunde genommen auf einem Umwege, durch dessen Benützung er gerade seine Allgemeinheit verliert. Denn die partielle Integration in ihrer Anwendung auf bestimmte Integrale ist schliesslich auch nur eine, gewisse specielle Voraussetzungen erheischende Folgerung aus der partiellen Summation.[2]) Es wird also der Mittelwerthsatz bei dem fraglichen Beweise statt aus der Abel'schen Transformation selbst, aus einer unter speciellen Bedingungen bestehenden Folgerung derselben hergeleitet.

Der Netto'sche Beweis[3]) sucht die Bonnet'sche Form des Satzes durch vollständige Induction zu begründen. Bedeuten wiederum $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die einzigen Stellen, bei welchen $\varphi(x)$ einen Zeichenwechsel erleidet, so gilt der Satz zunächst, wie unmittelbar zu sehen, für das Intervall $x_0 \leqq x < x_1$. Sodann wird gezeigt, dass seine Gültigkeit stets über eine Stelle x' hinausreicht, sofern sie nur bis x' feststeht. Dabei wird aber offenbar stillschweigend vorausgesetzt, dass überhaupt eine Stelle x_1, d. h. eine erste Stelle existire, bei welcher ein Zeichenwechsel stattfindet. Mit anderen Worten, der Beweis wird hinfällig, wenn $\varphi(x)$ in der Nachbarschaft

---

[1]) Man findet ihn auch bei Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 69, p. 82; desgl. Kronecker, Vorlesungen p. 57.

[2]) Vgl. Helm, Zeitschr. f. Math. 22 (1877), p. 401.

[3]) Zeitschr. f. Math. 40 (1895), p. 180.

von $x_0 + 0$ unendlich viele Zeichenwechsel besitzt. Ferner: angenommen es erstrecke sich die Gültigkeit des Satzes, die ursprünglich bis x' festgestanden haben mag, nunmehr bis x'', von da bis x''' u. s. f., so ist es sehr wohl denkbar, dass die Folge $x', x'', \ldots x^{(\nu)} \ldots$ gegen einen Grenzwerth $X' < X$ convergire. Und, wenn auch diese Complication überwunden ist, so gilt schliesslich, im Gegensatz zu der von Herrn Netto am Schlusse gemachten Behauptung, dass über die Anzahl der Stellen x_ν keine beschränkende Voraussetzung erforderlich sei, der betreffende Beweis überhaupt nur, wenn die x_ν eine monoton zunehmende Folge mit einer einzigen Grenzstelle bilden. Für diesen Fall kommt man aber so sehr viel einfacher mit dem Meyer'schen Beweise zum Ziele, dass die Vorzüge der äusserst mühsamen Netto'schen Schlussweise nicht recht einleuchtend erscheinen.

Druckfehler-Berichtigung.

In dem Aufsatze: „Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche“, Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898) muss es

p. 312, Zeile 3, Formel (34)
„ Fussnote, Zeile 4
p. 317, Zeile 1, Formel (54)
„ „ 4 „ (55)

durchweg heissen:

$|b_\nu| - |a_\nu|$ statt: $|a_\nu| - |b_\nu|$.

Ueber den sogenannten semidefiniten Fall in der Theorie der Maxima und Minima.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 18. Juni.*)

Die Entscheidung, ob eine Funktion

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

von n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ an einer Stelle:

1) $$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

welche den Gleichungen:

2) $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \; i = 1, 2 \ldots n$$

entspricht, ein wirkliches Maximum oder Minimum besitzt, hat nur in dem singulären Falle eine gewisse Schwierigkeit, falls die 2. Variation an der betreffenden Stelle:

3) $$\delta^2 f = \tfrac{1}{2} \overline{\underline{\sum^i \sum^\varkappa}}_1^n f_{i\varkappa} \, \delta x_i \, \delta x_\varkappa,$$

in der:

4) $$f_{i\varkappa} = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_\varkappa} \right|_{x_1 = a_1, \, x_2 = a_2 \ldots . \, x_n = a_n},$$

semidefinit ist, d. i. falls die Gleichung

5) $$\begin{vmatrix} f_{11} - \varrho & f_{12} & \cdots\cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \varrho & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots\cdots & f_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

r von null verschiedene Wurzeln gleichen Vorzeichens $\varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_r$ und $n - r$ Wurzeln:

$$6) \quad \varrho_{r+1} = \varrho_{r+2} = \dots = \varrho_{n-1} = \varrho_n = 0 \quad (0 \leqq r \leqq n - 1)$$

besitzt. Dieser singuläre Fall, in dem die Untersuchung der 2. Variation zur Entscheidung nicht mehr ausreicht, ist zum ersten Male in strenger Weise für den Fall zweier unabhängiger Variabeln von L. Scheeffer (Math. Ann. Bd. 35), für den allgemeinen Fall von n unabhängigen Variabeln von A. Mayer (Berichte der k. Sächs. Ges. d. Wiss. 1892), O. Stolz (Berichte der Wiener Akademie Bd. 99, 100, 102), v. Dantscher (Math. Ann. Bd. 51) behandelt worden. Ohne mich auf diese Arbeiten zu stützen, will ich im folgenden einen einfachen Weg angeben, um in dem genannten singulären Falle zu den nächsten Kriterien des Maximums resp. Minimums zu gelangen.

§ 1.

Wir wollen die ursprüngliche Definition des Maximums resp. Minimums zu grunde legen:

Eine Funktion von n unabhängigen Variabeln $x_1\, x_2 \dots x_n$:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

hat an der Stelle:

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \dots n$$

ein Maximum oder Minimum, falls eine positive, im übrigen beliebig kleine Grösse ε existiert, so, dass die Differenz

$$7) \quad \delta f \equiv f(a_1 + \delta x_1,\ a_2 + \delta x_2, \dots a_n + \delta x_n) - f(a_1, a_2 \dots a_n)$$

für beliebige $\delta x_1\, \delta x_2 \dots \delta x_n$, die den Ungleichungen entsprechen:

$$8) \qquad -\varepsilon \leqq \delta x_i \leqq +\varepsilon, \quad i = 1, 2 \dots n$$

ein festes Zeichen hat, und zwar wird ein Maximum vorhanden sein, falls stets

$$\delta f < 0,$$

ein Minimum, falls stets

$$\delta f > 0$$

ist. Wir wollen dabei von der Funktion f stets voraussetzen, dass in den Intervallen 8) f mit allen seinen Ableitungen eindeutig und stetig und der Taylor'schen Entwickelung fähig sei, so dass:

$$9) \qquad \delta f = \delta^1 f + \delta^2 f + \delta^3 f + \delta^4 f + \dots,$$

wenn wir mit

$$\delta^1 f, \ \delta^2 f, \ \delta^3 f, \ \delta^4 f \dots$$

resp. die 1. 2. 3. 4.... Variation von f bezeichnen.

§ 2.

Wir betrachten den Fall, dass an einer Stelle:

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \dots n,$$

welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \dots n$$

entspricht, die 2. Variation semidefinit ist, und untersuchen zunächst 2 Specialfälle:

1. Specialfall. Es ist identisch:

$$\delta^2 f \equiv 0,$$

dann ist bekanntlich für ein Maximum oder Minimum erforderderlich, dass identisch:

$$\delta^3 f \equiv 0,$$

und es wird dann sicher ein Maximum vorhanden sein, falls $\delta^4 f$ stets positiv, ein Minimum, falls $\delta^4 f$ stets negativ ist; für die 2. Singularität, dass $\delta^4 f$ zwar ein festes Zeichen hat, aber auch für nicht gleichzeitig verschwindende $\delta x_1 \, \delta x_2 \dots \delta x_n$ gleich null werden kann, ist zur Entscheidung eine weitere Untersuchung notwendig, während für den Fall, dass $\delta^4 f$ beliebig positiv oder negativ gemacht werden kann, sicher kein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

2. Specialfall. Die 2. Variation ist von der Form:

$$10)\qquad \delta^2 f = \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \varrho_h\,\delta x_h^2, \text{ [1] } \quad (1 \leqq r \leqq n-1),$$

so dass:

$$11)\qquad \delta f = \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \varrho_h\,\delta x_h^2 + \delta^3 f + \delta^4 f + \dots .$$

Nennen wir ε_1 den absolut grössten Wert von

$$\delta x_1\ \delta x_2 \dots \delta x_r,$$

ε_2 den absolut grössten Wert von

$$\delta x_{r+1},\ \delta x_{r+2} \dots \delta x_n,$$

so werden offenbar die beiden Fälle:

$$\text{I.}\quad \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$$

und

$$\text{II.}\quad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2$$

alle möglichen Fälle umfassen.

In dem Falle I. muss δf das Zeichen der ϱ_h haben, so dass wir das Zeichen von δf nur noch für den Fall

$$12)\qquad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon$$

zu untersuchen haben. Wir schreiben hierzu die Gleichung 11) in der Form:

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} \delta f = {} & \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \varrho_h\,\delta x_h^2 \\ & + \left|\delta f\right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_r = 0} \text{ [2]} \\ & + \sum_1^r{}^h \left|\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_r = 0} \delta x_h \text{ [3]} \\ & + \text{Glieder 3. und höherer Ordnung, welche} \\ & \quad \delta x_1\ \delta x_2 \dots \delta x_r \text{ von wenigstens zweiter} \\ & \quad \text{Ordnung enthalten,} \end{aligned}\right.$$

---

[1] Die ϱ_h sind hier von null verschiedene Koefficienten gleichen Vorzeichens.

[2] Wir sammeln in der 2. Zeile die Glieder nullter Ordnung in bezug auf $\delta x_1\ \delta x_2 \dots \delta x_r$.

[3] Wir sammeln in der 3. Zeile die in bezug auf $\delta x_1\ \delta x_2 \dots \delta x_r$ linearen Glieder.

oder:

$$14)\quad \begin{cases} \delta f = \frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \varrho_h \delta x_h^2 \quad (1+E) \\ \quad + \left| \delta f \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \\ \quad + \sum_1^r {}^h \left| \delta \frac{\partial f}{\partial x_h} \right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} \delta x_h \end{cases},$$

wo wir von den in dem Ausdruck E zusammengefassten Gliedern aussagen können, dass:

$$15)\qquad \text{abs. } E \lesseqgtr a \cdot \varepsilon_2,$$

wenn wir unter a eine endliche Konstante verstehen.[1]) Wir können nun 14) folgendermassen schreiben:

$$16)\quad \begin{cases} \delta f = \frac{1}{1+E}\left[\sum_1^r {}^h \frac{1}{2}\varrho_h \left(\delta x_h (1+E) + \frac{\left|\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0}}{\varrho_h}\right)^2 \right. \\ \left. \quad + (1+E) |\delta f|_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0} - \frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \frac{\left|\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right|^2_{\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0}}{\varrho_h}\right]. \end{cases}$$

Die Gleichung 16) zeigt, dass

1. δf ein festes Zeichen und zwar das Zeichen der ϱ_h jedenfalls dann hat, wenn der Ausdruck:

$$17)\qquad (1+E)[\delta f] - \frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \frac{\left[\delta \frac{\partial f}{\partial x_h}\right]^2}{\varrho_h},$$

---

[1]) Es ist nemlich:

$$E = \frac{\text{Glieder der 4. Zeile in 13)}}{\frac{1}{2}\sum_1^r {}^h \varrho_h \delta x_h^2}$$

$$\text{abs. } E \lesseqgtr \varepsilon_2 \frac{\sum_1^r {}^h \delta x_h^2}{\frac{1}{2}\sum_1^r {}^h |\varrho_h| \delta x_h^2} \times \text{endl. Const.},$$

und der Bruch rechts hat ein endliches Maximum.

(wir wollen die Substitution

18) $$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0$$

durch Einschliessung in $[-]$ ausdrücken), das Zeichen der ϱ_h bei beliebigen $\delta x_1\ \delta x_2 \ldots \delta x_n$ und genügend kleinem ε_2 besitzt; und dass

2. δf ein festes Zeichen jedenfalls dann nicht hat, falls man die $\delta x_{r+1}\ \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ so wählen kann, dass bei beliebigen $\delta x_1\ \delta x_2 \ldots \delta x_r$ (die nur der Bedingung 12) entsprechen) der Ausdruck 17) das entgegengesetzte Zeichen der ϱ_h erhält.

Der Ausdruck 17)[1]) kann nun — bei Berücksichtigung der Ungleichung 15) — ein festes Zeichen nur dann haben, wenn identisch:

19) $$[\delta^3 f] \equiv 0$$

ist, und der Ausdruck:

20) $$\left[\delta^4 f - \tfrac{1}{2} \sum_1^r {}^h \frac{\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2}{\varrho_h}\right]$$

ein festes Zeichen hat, und er wird in jedem Falle das Zeichen der ϱ_h haben, wenn die Identität 19) erfüllt ist und der Ausdruck 20) stets das Zeichen der ϱ_h hat. Wir sind somit bisher zu dem folgenden Resultat gelangt:

Es ist in unserem 2. Specialfalle für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

21) $$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_r = 0$$

die Identität:

22) $$\delta^3 f \equiv 0$$

---

[1]) Man kann denselben in der folgenden Form schreiben:

$$(1 + E)([\delta^3 f] + [\delta^4 f] + \ldots)$$
$$- \tfrac{1}{2} \sum_1^r {}^h \frac{1}{\varrho_h} \left[\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_h} + \delta^3 \frac{\partial f}{\partial x_h} + \ldots\right]^2.$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen 21) der Ausdruck:

$$23)\qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h}\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_h}\right)^2$$

für beliebige $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ das Zeichen der ϱ_h hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck 23) unter den Bedingungen 21) durch geeignete Wahl der $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ das entgegengesetzte Zeichen der ϱ_h erhalten kann; für den Fall, dass der Ausdruck 23) bei den Bedingungen 21) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta x_{r+1}\, \delta x_{r+2} \ldots \delta x_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung notwendig.[1])

§ 3.

Man kann nun jede beliebige semidefinite 2. Variation

$$\tfrac{1}{2}\overline{\underline{\sum{}^i \sum{}^\varkappa}}_1^n f_{i\varkappa}\, \delta x_i\, \delta x_\varkappa$$

durch die Jacobi'sche Transformation auf die Form:

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \varrho_h\, \delta y_h^2, \quad (0 \overline{\lessgtr} r \overline{\lessgtr} n-1)$$

bringen, also auf einen der beiden Specialfälle des vorigen Paragraphen zurückführen, indem man:

$$24)\qquad x_i = a_{i1}\, y_1 + a_{i2}\, y_2 + \ldots. + a_{in}\, y_n, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

setzt und die Konstanten $a_{i\varkappa}$ und ϱ_h durch die Gleichungen:

$$25)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_{11}\, a_{1h} + f_{21}\, a_{2h} + \ldots. + f_{n1}\, a_{nh} = \varrho_h\, a_{1h}, \\ f_{12}\, a_{1h} + f_{22}\, a_{2h} + \ldots. + f_{n2}\, a_{nh} = \varrho_h\, a_{2h}, \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ f_{1n}\, a_{1h} + f_{2n}\, a_{2h} + \ldots. + f_{nn}\, a_{nh} = \varrho_h\, a_{nh}, \end{array}\right| \quad h = 1, 2 \ldots n$$

$$26)\qquad \sum_1^n{}^\varkappa a_{\varkappa h}^2 = 1$$

bestimmt.

---

[1]) Man vgl. hierzu v. Dantscher (Math. Ann. 51).

Zwischen den Variationen δx_i und δy_i bestehen dann die Relationen:

$$27)\quad \begin{cases} \delta x_i = a_{i1}\,\delta y_1 + a_{i2}\,\delta y_2 + \ldots + a_{in}\,\delta y_n\,, \\ \delta y_i = a_{1i}\,\delta x_1 + a_{2i}\,\delta x_2 + \ldots + a_{ni}\,\delta x_n\,, \end{cases} \Bigg|\; i = 1,2\ldots n.$$

Wir können somit die Resultate des vorigen Paragraphen sofort auf den allgemeinen Fall übertragen:

Es ist im Falle einer semidefiniten 2. Variation für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

$$28)\qquad \delta y_1 = \delta y_2 = \ldots . = \delta y_r = 0$$

die Identität:

$$29)\qquad \delta^3 f \equiv 0$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen 28) der Ausdruck:

$$30)\qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2}\sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h}\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2$$

für beliebige $\delta y_{r+1}\,\delta y_{r+2}\ldots\delta y_n$ das Zeichen der $\varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_r$ (resp. im Falle $r = 0$ ein festes Zeichen) hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck 30) unter den Bedingungen 28) durch geeignete Wahl der $\delta y_{r+1}\,\delta y_{r+2}\ldots\delta y_n$ das entgegengesetzte Zeichen der $\varrho_1\,\varrho_2\ldots\varrho_r$ erhalten kann (resp. im Falle $r = 0$ bald positiv bald negativ gemacht werden kann); für den Fall, dass der Ausdruck 30) bei den Bedingungen 28) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta y_{r+1}\,\delta y_{r+2}\ldots\delta y_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung notwendig.

§ 4.

Die soeben gefundenen Kriterien setzen in der letztgenannten Form noch die Bekanntschaft mit der Jacobi'schen Transformation voraus; wir wollen uns nunmehr von dieser Voraussetzung befreien.

Zunächst sind, wie bekannt, die r Gleichungen 28) mit den n Gleichungen:

$$31)\qquad \sum_1^n{}^{\varkappa} f_{i\varkappa}\,\delta x_\varkappa = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

äquivalent, von denen nur r von einander unabhängig sind. Es handelt sich daher lediglich noch darum, den Ausdruck 30) so umzuformen, dass er die Kenntnis der Jacobi'schen Transformation nicht erfordert.

Es ist nun:

$$\frac{\partial f}{\partial y_h} = \sum_1^n{}^{\varkappa} a_{\varkappa h}\frac{\partial f}{\partial x_\varkappa}, \quad h = 1, 2 \ldots n,$$

$$\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h} = \sum_1^n{}^{\varkappa} a_{\varkappa h}\,\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

$$\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2 = \overline{\sum{}^i \sum{}^\varkappa}_1^n\, a_{ih}\, a_{\varkappa h}\,\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

somit:

$$32)\qquad \sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h}\left(\delta^2 \frac{\partial f}{\partial y_h}\right)^2 = \overline{\sum{}^i \sum{}^\varkappa}_1^n\, c_{i\varkappa}\,\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

wo:

$$33)\qquad c_{i\varkappa} = \sum_1^r{}^h \frac{1}{\varrho_h}\, a_{ih}\, a_{\varkappa h}, \quad (i, \varkappa = 1, 2 \ldots n).$$

Diese $c_{i\varkappa}$ wollen wir in etwas anderer Form darstellen. Wir multiplicieren die Gleichungen 25) resp. mit $a_{1h}\, a_{2h} \ldots a_{nh}$ und addieren, dann folgt mit Rücksicht auf 26):

$$34)\qquad \overline{\sum{}^i \sum{}^\varkappa}_1^n\, f_{i\varkappa}\, a_{ih}\, a_{\varkappa h} = \varrho_h, \quad h = 1, 2 \ldots n.$$

Die ϱ_h sind Wurzeln der Determinantengleichung 5); denken wir uns dieselben aus jener Gleichung als Funktionen der $f_{i\varkappa}$ berechnet und differenzieren wir nach Substitution dieser Lösungen ϱ_h 34) nach $f_{i\varkappa}$, dann folgt:

35)[1]
$$\left\{\begin{array}{ll|c} 2\,a_{ih}\,a_{\varkappa h} = \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{i\varkappa}}, & i \neq \varkappa & i, \varkappa = 1, 2 \ldots n \\ a_{\varkappa h}^2 = \dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{\varkappa\varkappa}} & & h = 1, 2 \ldots r \end{array}\right.$$

Setzen wir nun die Werte 35) der $a_{i\varkappa}$ in 33) ein, so ergiebt sich:

36)
$$\left\{\begin{array}{ll|c} c_{i\varkappa} = \frac{1}{2}\sum_1^r{}^h \dfrac{1}{\varrho_h}\dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{i\varkappa}}, & i \neq \varkappa & \\ c_{\varkappa\varkappa} = \sum_1^r{}^h \dfrac{1}{\varrho_h}\dfrac{\partial \varrho_h}{\partial f_{\varkappa\varkappa}}, & & i, \varkappa = 1, 2 \ldots n, \end{array}\right.$$

oder:

37)
$$\left\{\begin{array}{ll|c} c_{i\varkappa} = \dfrac{1}{2P}\dfrac{\partial P}{\partial f_{i\varkappa}}, & i \neq \varkappa & \\ c_{\varkappa\varkappa} = \dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial f_{\varkappa\varkappa}}, & & i, \varkappa = 1, 2 \ldots n, \end{array}\right.$$

wenn:

38)
$$P = \varrho_1\,\varrho_2 \ldots \varrho_r.$$

Es ist nun $(-1)^r P$ nichts anderes als der Koefficient a_r von ϱ^{n-r} in der nach Potenzen von ϱ geordneten Determinantengleichung 5):

39)
$$\varrho^n + a_1\,\varrho^{n-1} + a_2\,\varrho^{n-2} + \ldots + a_r\,\varrho^{n-r} = 0.$$

---

[1]) Wir haben zu berücksichtigen, dass ($\mu, \nu = 1, 2 \ldots n$; $h = 1, 2 \ldots r$):

$$\overline{\sum^i \sum^\varkappa}_1^n f_{i\varkappa}\,\frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}}\,a_{\varkappa h} = \sum_1^n{}^i \frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}} \sum_1^n{}^\varkappa f_{i\varkappa}\,a_{\varkappa h},$$

$$= \varrho_h \sum_1^n{}^i a_{ih}\,\frac{\partial a_{ih}}{\partial f_{\mu\nu}}, \text{ (nach 25))}$$

$$= 0, \text{ (nach 26))}$$

und analog:

$$\overline{\sum^i \sum^\varkappa}_1^n f_{i\varkappa}\,a_{ih}\,\frac{\partial a_{\varkappa h}}{\partial f_{\mu\nu}} = 0.$$

Wir können daher folgendes Endresultat aussprechen:

Ist die 2. Variation an einer Stelle

$$x_i = a_i, \quad i = 1, 2 \ldots n,$$

welche den Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

entspricht, semidefinit, so dass in der Gleichung:

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + a_2 \varrho^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \varrho + a_n = 0,$$

welche die nach Potenzen von ϱ geordnete Relation:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \varrho & f_{21} & \ldots f_{n1} \\ f_1 & f_{22} - \varrho & \ldots f_{n2} \\ - & - & - \\ f_{1n} & f_{2n} & \ldots f_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

darstellt, die Koefficienten

$$a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots a_n \quad (0 \gtreqless r \gtreqless n - 1)$$

verschwinden, während die Koefficienten:

$$(a_0 =) \, 1, \; a_1, \; a_2 \ldots a_r$$

entweder r Zeichenfolgen oder r Zeichenwechsel aufweisen, dann lauten die nächsten Kriterien für das Auftreten eines Maximums oder Minimums an der betrachteten Stelle:

Es ist für ein wirkliches Maximum oder Minimum notwendig, dass unter den Bedingungen:

A) $$\sum_1^n{}^{\varkappa} f_{i\varkappa} \, \delta x_\varkappa = 0, \quad i = 1, 2 \ldots n$$

(von diesen sind infolge der Semidefinitheit der 2. Variation nur r von einander unabhängig) die Identität:

B) $$\delta^3 f \equiv 0$$

stattfinde; es wird dann sicher ein Maximum resp. Minimum vorhanden sein, falls bei den Bedingungen A) der Ausdruck:

$$\text{C)} \qquad \delta^4 f - \tfrac{1}{2}\overline{\sum^{i}\sum^{\varkappa}}_{1}^{n} c_{i\varkappa}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \delta^2 \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa},$$

in dem:

$$\text{D)} \qquad \begin{cases} c_{i\varkappa} = \dfrac{1}{2a_r}\dfrac{\partial a_r}{\partial f_{i\varkappa}}, \quad i \neq \varkappa & \Bigg| \; i, \varkappa = 1, 2 \,..\, n \\ c_{\varkappa\varkappa} = \dfrac{1}{a_r}\dfrac{\partial a_r}{\partial f_{\varkappa\varkappa}} & \Bigg| \; r = 0 \\ c_{i\varkappa} = 0, \; \big| \; i, \varkappa = 1, 2 \,..\, n, \; r = 0, & \end{cases}$$

das Zeichen von $(-a_1)$ [resp. im Falle $r = 0$ ein festes Zeichen] hat; es wird sicher kein Maximum oder Minimum stattfinden, falls der Ausdruck C) unter den Bedingungen A) durch geeignete Wahl der $\delta x_1\, \delta x_2 \,..\, \delta x_n$ auch das Zeichen von $(+a_1)$ erhalten kann [resp. im Falle $r = 0$ bald positiv, bald negativ gemacht werden kann]; für den Fall, dass der Ausdruck C) bei den Bedingungen A) zwar ein festes Zeichen hat, aber auch verschwinden kann, ohne dass $\delta x_1\, \delta x_2 \,..\, \delta x_n$ gleichzeitig null sind, ist eine weitere Untersuchung erforderlich.[1]) (Fall der 2. Singularität.)

---

[1]) Ich habe den obigen Satz zum ersten Male in einer Vorlesung über Variationsrechnung (München Winter 1896/97) ausgesprochen. Herr Prof. A. Mayer machte mich, als ich ihm den Beweis mitteilte, auf eine Lücke in demselben aufmerksam, die ich durch die obige Untersuchung ausgefüllt habe; ich hatte in meinem früheren Beweise die in dem Ausdruck E zusammengefassten Glieder in Formel 14) als für das Vorzeichen von δf belanglos fortgelassen; dass dies für die nächsten Kriterien der Fall ist, bedurfte des nunmehr hinzugefügten Beweises, und es ist zu bemerken, dass diese Glieder im Falle der 2. Singularität sehr wohl auf das Zeichen von δf von Einfluss sein können.

Sitzung vom 7. Juli 1900.

1. Herr F. Lindemann legt eine Abhandlung des Herrn Prof. Josef Schick vor: „Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie.“

2. Herr W. Dyck überreicht eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Eduard v. Weber: „Ueber die Reduzirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen.“



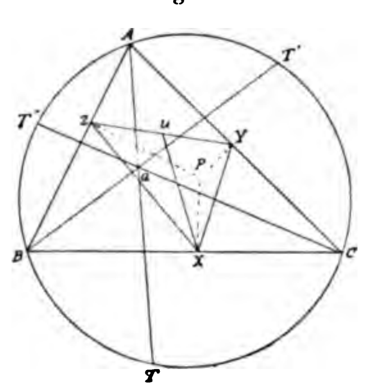
Beziehungen zwischen Isogonalcentrik und Invariantentheorie.

Von **J. Schick.**

(*Eingelaufen 7. Juli.*)

§ 1. Bekanntlich lässt sich ein Doppel-Verhältniss von vier Punkten in der complexen Ebene auf einfache Weise geometrisch darstellen. Seien A, B, C, P (Fig. 1) vier Punkte

Fig. 1.



mit den complexen Coordinaten z_1, z_2, z_3, z_4, so ist der absolute Wert des Doppel-Verhältnisses $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$

$$\text{abs}\left(\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}};$$

das Argument aber ist nach Wedekind gleich dem Winkel der Kreise $z_1\, z_2\, z_3$ und $z_1\, z_3\, z_4$, d. h. der Kreise, welche be-

ziehungsweise durch die Punkte A, B, C und A, C, P hindurchgehen (bei richtiger Wahl des Sinnes).

Diese beiden Elemente, absoluter Wert und Argument, lassen sich nun leicht in einem Dreieck vereinigt zur Anschauung bringen, nemlich dem Fusspunktsdreieck von P in Bezug auf das Dreieck ABC. Denn in diesem ist (vgl. Fig. 1), da $CXPY$ ein Kreisviereck,

$$XY = CP \cdot \sin ACB,$$

ebenso

$$ZY = AP \cdot \sin BAC,$$

also

$$\frac{XY}{ZY} = \frac{CP}{AP} \cdot \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{CP}{AP} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{CB} : \frac{AP}{CP},$$

also gleich dem absoluten Wert des betrachteten Doppel-Verhältnisses $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$. Der Winkel aber, den diese beiden Seiten des Fusspunktsdreiecks einschliessen, nemlich $\sphericalangle XYZ$, ist

$$= \sphericalangle XYP + \sphericalangle ZYP = \sphericalangle XCP + \sphericalangle ZAP$$
$$= \sphericalangle APC - \sphericalangle B,$$

d. h. gleich der Differenz zwischen den Peripheriewinkeln der Kreise APC und ABC, also gleich dem Winkel dieser beiden Kreise selbst, oder gleich dem Argument des gegebenen Doppel-Verhältnisses.

Bei linearer Transformation von der Form

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

bleibt aber das Doppel-Verhältniss von vier Punkten ungeändert; folglich muss von Dreieck XYZ bei der Transformation in die ζ-Ebene sowohl $XY : ZY$, als auch der eingeschlossene Winkel XYZ invariant bleiben; es bleibt also überhaupt die Form des Fusspunktsdreiecks XYZ ungeändert.

Man erhält somit den bemerkenswerthen Satz:

Bei linearer Transformation von vier Punkten in der complexen Ebene behält das Fusspunktsdreieck je des vierten Punktes in Bezug auf das Dreieck der drei übrigen Punkte invariante Form.

Dies ist der Fall, trotzdem alle bei Construction des Fusspunktsdreiecks benutzten Linien nicht invarianten Charakter haben, sondern in Kreise übergehen, die für die Construction des neuen Fusspunktsdreiecks keine Bedeutung haben.

§ 2. Aus dem angeführten Satze wird unmittelbar erhellen, dass die Theorie der Fusspunktsfiguren — die „Isogonalcentrik" — von einiger Wichtigkeit für die Invariantentheorie zu werden verspricht. Vor Jahren habe ich solche Fusspunktsfiguren, insbesondere Dreiecke, einer genaueren Untersuchung unterzogen und namentlich die Frage behandelt, welche geometrischen Oerter das „Orthogonalcentrum" P der Fusspunktsfigur (allgemeiner „Isogonalcentrum", wenn die Strahlen PX, PY, PZ nicht „orthodrom", sondern „isoloxodrom", d. h. nicht gerade je unter einem rechten, sondern unter einem beliebigen gleichen Winkel ξ gezogen werden) beschreiben muss, damit gewisse Elemente dieser Figur constant bleiben.

§ 3. Dabei zeigt sich z. B., dass die Seiten des Fusspunktsdreiecks YZ, XZ, XY (bezeichnet mit a_f, b_f, c_f) constant sind, wenn das Isogonalcentrum P sich auf Kreisen um die Dreiecksspitzen A, B, C bewegt. Weiter ist, wie längst bekannt, der Inhalt J_f des Fusspunktsdreiecks constant für Kreise, die concentrisch sind mit dem Umkreis des Originaldreiecks.

§ 4. Ferner ist die Transversale (Mittellinie) $t_f = XU$ constant für Kreise um einen Punkt T (den „Transversalpol"), der, im Sinne der complexen Ebene, der vierte harmonische Punkt ist zu A, B, C. Bekanntlich liegt dieser Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC so, dass das Verhältniss $BT:CT = BA:CA$ ist; auch leuchtet ein, dass man bei cyklischer Permutation zwei weitere Transversalpole T' und T'' erhalten wird: diese liefern im Fusspunktsdreieck constante Transversalen t_f' und t_f'' (vgl. meine Grundlagen einer Isogonalcentrik, Tübingen 1887, § 29), und das ganze Punkt-System T, T' und T'' bildet die Covariante Q der binären cubischen Form (ABC).

§ 5. Auch wenn YZ in U nicht halbiert, sondern in beliebigem gegebenen Verhältniss $m:n$ geteilt sein soll, so gilt dieser Satz

noch mutatis mutandis: man erhält dann für constantes $XU = t_f$ im Fusspunktsdreieck wiederum einen Kreis als geometrischen Ort; der Mittelpunkt liegt auch hier auf dem Umkreis (in einfach zu bestimmender Lage). Lässt man $m:n$ beliebig variieren, so umläuft das Centrum der Kreisscharen die Peripherie des Umkreises: letzterer ist also der Träger von Satellitenkreisen (oder der „deferierende" Kreis von Epicykelscharen), die die Oerter für constante „Barytome" t_f bilden.

§ 6. Zieht man AT, BT', CT'', so schneiden sich diese Linien in einem Punkte Q, der die Eigenschaft hat, dass Kreise um ihn die Träger von Isogonalcentren sind, die im Fusspunktsdreieck constante Summen der Seitenquadrate haben, so dass also

$$XY^2 + XZ^2 + YZ^2 = a_f^2 + b_f^2 + c_f^2 = \text{Const.}$$

Ich habe diesen Punkt früher selbständig untersucht und ihn den „Schwerpol" des Dreiecks genannt (vgl. Grundlagen, §§ 23, 34 ff.); später fand ich, dass derselbe auch von Grebe und dem um die Geometrie des Dreiecks hochverdienten Lemoine untersucht worden war und in neueren Werken bald nach dem einen, bald nach dem andern benannt wird. (Vgl. über diesen Punkt auch unten § 27.)

§ 7. Die Höhen eines Fusspunktsdreiecks, h_f, h_f', h_f'' sind constant, wenn das Isogonalcentrum sich auf Konchoiden mit Kreis ABC als Basis und den Ecken des Dreiecks A, resp. B und C, als Doppelpunkten bewegt (Grundlagen, § 108); ähnliches gilt von den Projectionen einer Seite auf eine andere: in diesem Falle wird die circulare Basis der Konchoiden gebildet von Orthogonalkreisen an den Umkreis ABC, die zugleich je durch die Endpunkte einer Seite gehen.

§ 8. Sollen im Fusspunktsdreiecke die Verhältnisse von zwei Seiten, z. B. $b_f : c_f$, constant sein, so bekommt man als Oerter für das Isogonalcentrum apollonische Kreise zu B und C (also den Punkten, die selbst die Centren für Kreisscharen mit constanter Länge der betreffenden Seiten b_f und c_f im Fusspunktsdreieck sind).

Soll $b_f = c_f$ sein, so geht der gesuchte Kreis durch A und den Transversalpol T; er ist dann ein „Aequilateralkreis“ des Dreiecks. Soll in ähnlicher Weise etwa das Verhältniss der Transversalen t_f' und t_f'' constant sein, so erhält man als Oerter für das Isogonalcentrum apollonische Kreise zu T' und T'' u. s. w.

§ 9. Sollen endlich die Winkel des Fusspunktsdreiecks constant sein, so erhält man Kreisbogen über den Seiten BC, AC, AB des Dreiecks als geometrische Oerter; für constante Winkel zwischen a_f und t_f Kreisbogen über AT, für constante Winkel zwischen t_f' und t_f'' Kreisbogen über T' T'' u. s. w.

§ 10. Die ersten der obigen Sätze, die von Strecken und Flächen handeln (§§ 3—7), werden für die Invariantentheorie keine Bedeutung haben, wohl aber die letzteren, die sich auf Verhältnisse, und jedenfalls diejenigen, die sich auf Winkel beziehen (§§ 8 und 9). Insbesondere handelt es sich um die Lage des Isogonalcentrums, wenn die Winkel X, Y, Z des Fusspunktsdreiecks bei gegebenem Urdreieck ABC vorgeschriebene Grösse haben sollen, und verwandte Dinge. Diesen Teil der „Isogonalcentrik“ hoffe ich demnächst in einem besonderen Kapitel, der „Isomorphopolcentrik“, zu behandeln; die Sätze, die ich hieraus für den gegenwärtigen Zweck benötige, werde ich je an geeigneter Stelle anführen.

§ 11. Zunächst vermittelt nun die Kenntniss des elementaren Hauptsatzes der Isomorphopolcentrik eine schnelle und unmittelbare Einsicht in das Theorem von der Invarianz der Form von Fusspunktsdreiecken bei linearer Transformation. Der angezogene Satz — dessen Beweis in den Ausführungen des § 1 oben liegt — lautet: Ein Winkel α_f eines Fusspunktsdreiecks ist gleich dem Winkel des Umkreises ABC mit dem Kreise durch B, P und C. Nun bleibt letzterer Winkel als Kreiswinkel bei der Transformation constant, also auch α_f, und natürlich in cyklischer Folge auch β_f und γ_f. Q. e. d.

§ 12. Des weiteren lehrt die Isomorphopolcentrik, dass, wenn ein Punkt P im Fusspunktsdreieck die Winkel λ, μ, ν hat, auch der (in Bezug auf den Umkreis) zu ihm „reciproke“

Dreiecke BDC, CEA, AFB mit den Winkeln λ, μ, ν. Es gehen dann bekanntlich die Geraden AD, BE, CF durch einen Punkt V, von dem aus die Seiten des Dreiecks unter den Supplementarwinkeln zu λ, μ, ν gesehen werden, so dass also $\sphericalangle BVC = 2R - \lambda$, $\sphericalangle AVC = 2R - \mu$, $\sphericalangle AVB = 2R - \nu$. Dieser Punkt V ist dann der „Gegenpunkt" des $(\lambda\mu\nu)$-Isomorphopols.

§ 17. Für diesen Punkt ist auch die Summe

$$D_{\lambda\mu\nu} = \sin\lambda \cdot AV + \sin\mu \cdot BV + \sin\nu \cdot CV$$

ein Minimum (wo V variabel bei constantem A, B, C und λ, μ, ν). Ich nenne diesen Ausdruck deswegen die $(\lambda\,\mu\,\nu)$-Minimal-Distanz, und es gilt für sie die Formel:

$$D_{\lambda\mu\nu} = \sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\,\{a^2\cdot\mathrm{ctg}\,\lambda + b^2\cdot\mathrm{ctg}\,\mu + c^2\cdot\mathrm{ctg}\,\nu + 4J\}}.$$

§ 18. Einen Punkt V' mit ähnlichen Eigenschaften erhält man, wenn man die Dreiecke über den Seiten von ABC alle nach innen errichtet. Im Hinblick auf die angegebenen Eigenschaften kann man die Punkte V und V' die (λ, μ, ν)-„Visirpunkte" oder „(Minimal-)Distanzpunkte" des Dreiecks nennen.

Es sei noch bemerkt, dass Punkt V' auf dem Kreise liegt, welcher durch die Spiegelpunkte V_1, V_2, V_3 von V in Bezug auf die Dreiecksseiten geht (dessen Centrum der „Gegenpunkt" von V ist, also nach obigem der (λ, μ, ν)-Isomorphopol).

§ 19. Für die Isogonalcentrik ist wegen seiner grossen Allgemeinheit der Satz von Wichtigkeit, dass die $(\lambda\,\mu\,\nu)$-Minimaldistanz in Bezug auf ein Fusspunktsdreieck XYZ constant ist, wenn das Orthogonalcentrum sich auf Kreisen um den $(\lambda\,\mu\,\nu)$-Isomorphopol bewegt.

§ 20. Im Anschluss an obige Ausführungen ergeben sich leicht (aus ähnlichen Dreiecken) die Formeln für die Abstände der (λ, μ, ν)-Isomorphole von den Ecken, nemlich:

$$AP = \frac{bc\cdot\sin\lambda}{D};\quad BP = \frac{ac\cdot\sin\mu}{D};\quad CP = \frac{ab\cdot\sin\nu}{D}$$

wo $D = \sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\,\{a^2\cdot\mathrm{ctg}\,\lambda + b^2\cdot\mathrm{ctg}\,\mu + c^2\cdot\mathrm{ctg}\,\nu + 4J\}}$.

Alsbald erkennt man, dass das Doppel-Verhältniss

$$\frac{BP}{CP}:\frac{BA}{CA}=\frac{c\cdot\sin\mu}{b\cdot\sin\nu}:\frac{c}{b}=\frac{\sin\mu}{\sin\nu}$$

nur von μ und ν abhängt, wie es nach § 1 sein muss. Auch sieht man leicht, dass in diesen Formeln eine geschlossene Lösung des Pothenot'schen Problems enthalten ist.

Weiter zeigt sich, dass man bei cyklischer Vertauschung für den (λ, ν, μ)-Isomorphol P' die Formeln erhält:

$$AP'=\frac{b\,c\cdot\sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\cdot\{a^2\cdot\operatorname{ctg}\lambda+b^2\cdot\operatorname{ctg}\nu+c^2\cdot\operatorname{ctg}\mu+4J\}}}$$

u. s. w., und für die Antiisomorphole (mit negativem Zeichen vor $4J$):

$$AQ=\frac{b\,c\cdot\sin\lambda}{\sqrt{\sin\lambda\cdot\sin\mu\cdot\sin\nu\cdot\{a^2\cdot\operatorname{ctg}\lambda+b^2\cdot\operatorname{ctg}\mu+c^2\cdot\operatorname{ctg}\nu-4J\}}}$$

u. s. w.

§ 21. Wir haben im obigen gesehen, dass jeder Punkt in der Ebene eines Dreiecks, betrachtet als (λ, μ, ν)-Isomorphopol, invariant ist. Es wird sich verlohnen, die wichtigsten der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks unter diesem Gesichtspunkt Revue passiren zu lassen.

Sind zunächst alle drei Winkel λ, μ und ν einander gleich, also je $=\frac{\pi}{3}$, so wird das Fusspunktsdreieck $X\,Y\,Z$ gleichseitig. Leicht erkennt man, dass alsdann die zwölf Punkte sich auf zwei (reciproke) Punkte J und J' reduciren, die sogenannten äquianharmonischen Punkte (oder, da sie gleichseitige Fusspunktsdreiecke geben, die „Aequilateralpole"). Sie liegen harmonisch zum Schwerpol und Umkreiscentrum; Kreise um sie sind die Träger von Isogonalcentren, für welche die „Minimaldistanz" d_f, resp. d'_f, im Fusspunktsdreieck constant ist (vgl. Grundlagen, §§ 21, 73, 74, 135).

§ 22. Ebenso sieht man leicht, dass die drei Transversalpole T, T' und T'' eines Dreiecks invariant sind. Dieselben liegen auf der Peripherie des Umkreises; ihre Fusspunkte

liegen demnach auf einer geraden Linie („Wallace-Linie", früher fälschlich „Simson-Linie" genannt; vgl. Cantor, Geschichte der Mathematik III, 522 f.). Da ferner für Punkt T

$$BT:CT = AB:AC$$

ist, so ist offenbar $XY = XZ$. Das Dreieck XYZ bekommt also in dieser Grenzform die Winkel 0, 0, 180°, und das Seitenverhältniss 1 : 1 : 2; all dies bleibt invariant.

Die Transversalpole sind, wie schon in § 3 angedeutet, die vierten harmonischen Punkte zu den Ecken des Dreiecks, und müssen ja als solche natürlich invariante Eigenschaft haben.

§ 23. Es sei des weitern angedeutet, dass merkwürdige Dreieckspunkte invarianter Natur ferner bei den Figuren zum Vorschein kommen, welche sich aus der stereographischen Projection des Oktaëders und Ikosaëders ergeben (vgl. z. B. Möbius, Theorie der symmetrischen Figuren, Ges. Werke Band II, Klein, Vorlesungen über das Ikosaëder — die Figur am Ende —, oder Forsyth, Theory of Functions, p. 570 und 572). Man hat in beiden Figuren Kreisbogen und gerade Linien, die sich unter bekannten Winkeln $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5} \text{ etc.}\right)$ schneiden. Nimmt man zu drei bestimmten Punkten einer solchen Figur einen vierten Punkt derselben Figur hinzu, so zeigt sich (bei geeigneter Lage), dass der vierte Punkt auf Kreisbogen über den Seiten des zum Ausgang genommenen Dreiecks liegt. Das Fusspunktsdreieck des 4. Punktes in Bezug auf die drei ersten wird alsdann bestimmte Winkel haben $\left(\text{z. B. } \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, so dass also der vierte Punkt ein bestimmter Isomorphopol dreier anderer ist und so das ganze System invariant bleibt.

§ 24. In den vorhergehenden Beispielen haben wir stets Punkte gehabt, die in beiden Dreiecken, dem Dreieck ABC der z-Ebene und dem Dreieck $A'B'C'$ der ζ-Ebene, gleich definiert waren. So werden die „Aequilateralpole" des ersten

Dreiecks wieder „Aequilateralpole" des zweiten, die „Transversalpole" des ersten wieder „Transversalpole" des zweiten u. s. w. Man kann Punkte dieser Art, welche absolute, von den Elementen des Urdreiecks unabhängige Coordinaten λ, μ, ν haben, Punkte primärer Invarianz nennen.

Anders steht es mit einer Gruppe anderer merkwürdiger Punkte des Dreiecks. So wird z. B. das Umkreiscentrum O des Dreiecks $A\,B\,C$ keineswegs in das Umkreiscentrum des Dreiecks $A'\,B'\,C'$ transformirt, ist also in dieser Eigenschaft nicht invariant. Das Umkreiscentrum ist aber auch Orthogonalcentrum eines Fusspunktsdreiecks, dessen Winkel α, β, γ, d. h. die Winkel des Urdreiecks selbst sind. Nach § 21, resp. § 11, muss der Punkt O, als (α, β, γ)-Isomorphopol von $A\,B\,C$ betrachtet, invariant sein, d. h. der entsprechende Punkt O' muss in seinem Fusspunktsdreieck auf $A'\,B'\,C'$ auch die Winkel α, β, γ des ersten Dreiecks haben.

Hier hängen also die Coordinaten der Punkte O und O' von den Elementen des Urdreiecks ab; das Umkreis-Centrum ist nicht als solches invariant, sondern nur in einer Eigenschaft von secundärer Bedeutung. Wir werden solche Punkte als Punkte secundärer Invarianz bezeichnen.

§ 25. Im Anschluss an die Betrachtungen des vorigen Paragraphen können wir nun auch leicht den unendlich fernen Punkt der z-Ebene in der ζ-Ebene entsprechend darstellen. Als reciproker Punkt des Umkreiscentrums wird der unendlich ferne Punkt im Fusspunktsdreieck auch die Winkel α, β, γ haben; in der ζ-Ebene wird ihm also der reciproke Punkt zu $\bar{O}'$ (der Antiisomorphopol von O') entsprechen.

§ 26. Aehnliches wie vom Umkreis-Centrum und vom unendlich fernen Punkt gilt von den Brocard'schen Punkten des Dreiecks, oder den „Paraklinenpunkten", wie ich früher sie zu nennen versucht war (weil sie durch Kreise construiert werden, die sich an die Dreiecksseiten anlehnen). Die Fusspunktsdreiecke der zwei Brocard'schen Punkte (die bekanntlich „Gegenpunkte" sind), sind auch dem Urdreieck $A\,B\,C$

ähnlich, doch so, dass nun für den einen der zwei Punkte der Winkel β, für den andern der Winkel γ an die erste Seite BC des Urdreiecks zu liegen kommt (während im Fusspunktsdreieck von O der erste Winkel an der ersten Seite liegt). Auch im transformierten Dreieck haben also die entsprechenden Punkte die Winkel α, β, γ (in bestimmter Reihenfolge) im Fusspunktsdreieck; aber natürlich sind die neuen Punkte nun nicht auch die „Paraklinenpunkte" des neuen Dreiecks: dazu müssten die Fusspunktsdreiecke die Winkel α', β', γ' des transformierten Dreiecks haben.

Es mag hier noch erwähnt werden, dass auch die höheren Fusspunktsdreiecke der Brocard'schen Punkte (wenn also von ihnen aus neue Senkrechte auf die Seiten des ersten Fusspunktsdreiecks, dann auf die Seiten des so entstandenen secundären, tertiären etc. Fusspunktsdreiecks gefällt werden) sammt und sonders in infinitum einander ähnlich sind und die Winkel des Urdreiecks α, β, γ enthalten.

§ 27. Nur von secundärer Invarianz ist weiter ein anderer, höchst merkwürdiger Punkt des Dreiecks, der sog. Grebe'sche oder Lemoine'sche Punkt, Q (vgl. oben § 6). Er ist der Gegenpunkt des Schwerpunkts, der Pol der Pascal-schen Geraden des Dreiecks, das Centrum von Kreisscharen, die constante Summe der Seitenquadrate im Fusspunktsdreieck haben u. s. w.; sein eigenes Fusspunktsdreieck hat zu Winkeln die drei Transversalenwinkel des Urdreiecks τ_1, τ_2, τ_3. Letztere Eigenschaft hat natürlich (neben den andern zehn Isomorphopolen) auch der reciproke Punkt zu Q, der nichts anderes ist als der Fusspunkt des vom Umkreiscentrum auf die Pascal'sche Gerade gefällten Perpendikels. Dieser Punkt ist also nur secundär invariant, nemlich als (τ_1, τ_2, τ_3)-Isomorphopol des Dreiecks ABC.

---

§ 28. Wenn wir nun unsere Blicke auf das Viereck, oder auch auf höhere Polygone werfen, so lassen sich natürlich auf der Stelle gleich eine Menge invarianter Punkte angeben. Die

Kreise über den Partialdreiecken $A\,B\,C$, $A\,C\,D$, $A\,B\,D$, $B\,C\,D$ sind ja invariant, also auch Kreise, die diese halbieren, trisecieren, überhaupt mit ihnen gleiche Winkel bilden; solche Kreise werden sich dann auch wieder in invarianten Punkten schneiden. Oder man construiere beliebige entsprechende Punktternionen in der z- und ζ-Ebene: die Kreise, die hierdurch bestimmt werden, schneiden sich in neuen invarianten Punkten u. s. w. Dadurch erhält man nun freilich nur Punkte, die zunächst keine weiteren interessanten Eigenschaften aufweisen, insbesondere sich nicht mit bereits bekannten und wichtigen merkwürdigen Punkten des Vierecks (oder Vierseits — die Scheidung ist für unsere Zwecke kaum von Wichtigkeit) decken. Die Theorie der letzteren ist freilich noch ziemlich vernachlässigt; doch dürften als einige der merkwürdigsten Punkte des Vierecks die in den folgenden Paragraphen zur Beschreibung kommenden bezeichnet werden.

§ 29. Die vier Seiten eines Vierseits bestimmen vier Dreiecke, deren Umkreise sich in einem Punkte schneiden; dieser ist der Brennpunkt der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel. Ich nenne ihn deshalb die Eschara des Vierseits (altgriechisch *ἐσχάρα* 'Herd'; in neugriechischen mathematischen Schriften ist *ἐσχάριον* = focus, Brennpunkt).

Der Punkt ist für die Isogonalcentrik von grossem Interesse, da seine Fusspunkte in Bezug auf die vier Seiten in gerader Linie liegen, der Flächeninhalt seines Fusspunktsvierecks also gleich Null ist.

Vier Punkte bestimmen sechs Gerade, die in drei Doppelpaaren angeordnet werden können; jedes Doppelpaar hat seine eigene Eschara: wir bekommen also ein „Escharendreieck“, dessen Seiten sich sehr einfach aus gewissen Elementen des Vierecks bestimmen lassen.

§ 30. Um einen dieser Punkte P auf die Eigenschaft der Invarianz zu prüfen, berechne man seine Abstände von den Ecken A, B, C und D. Man findet, wenn a, b, c, d die Seiten, e und f die Diagonalen bezeichnen (vgl. Fig. 3):

$$A\,P = \frac{a\,d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2}} = \frac{a\,d}{2\,t};$$

$$B\,P = \frac{ab}{2\,t};\quad C\,P = \frac{b\,c}{2\,t};\quad D\,P = \frac{c\,d}{2\,t}.$$

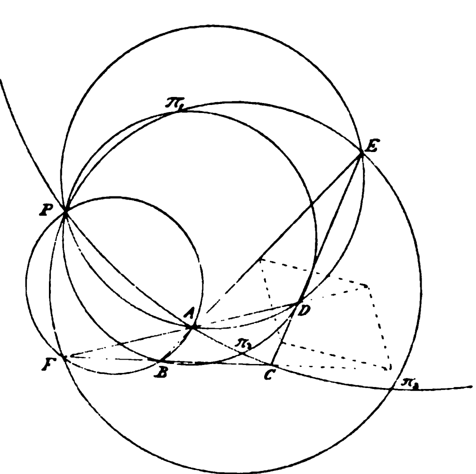
So ergibt sich für das Doppelverhältniss die Formel:

$$\frac{B\,P}{A\,P} : \frac{B\,C}{A\,C} = \frac{b}{d} : \frac{b}{e} = \frac{e}{d}.$$

Da nun offenbar $e:d$ nicht invariant ist, so ist es auch das genannte Doppelverhältniss nicht, womit die Eschara als nicht invarianter Punkt erwiesen ist.

§ 31. Nebst den Escharen verdient eine Gruppe weiterer merkwürdiger Punkte unser Interesse, die meines Wissens die Aufmerksamkeit der Geometer noch nicht auf sich gezogen haben. Man kann die Aufgabe stellen, bei gegebenem Viereck

Fig. 3.



einen Punkt zu suchen, so dass dessen Fusspunktsviereck ein Parallelogramm ist. Die Lösung ist folgende:

Construiere zu dem gegebenen Viereck $A\,B\,C\,D$ (Fig. 3) die Eschara P (Schnitt der Kreise $A\,B\,F$, $A\,D\,E$, $C\,D\,F$, $B\,C\,E$);

dann beschreibe die Kreise ACP, BDP und EFP; sie schneiden sich ausser in P noch in drei Punkten Π_1, Π_2, Π_3, die die verlangte Eigenschaft haben (in Figur 3 ist das zu Π_2 gehörige Fusspunktsparallelogramm angedeutet). Diese Construction lässt sich noch zwei Mal cyklisch permutieren (indem man statt AC und BD nunmehr AB und CD, resp. AD und BC als Diagonalen des Vierecks fasst), so dass man zusammen neun solcher Punkte erhält.

§ 32. Die Aufgabe, ein Fusspunktsparallelogramm zu construieren, ist nur ein specieller Fall einer allgemeineren. Euler ist es schon gewesen, der am Viereck die Verbindungslinie der Diagonalenmitten, $MN = t$, ins Auge gefasst hat. Bekanntlich hat er bewiesen, dass sie sich sehr einfach in den Seiten und Diagonalen des Vierecks ausdrücken lässt, nemlich:

$$t^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$

Aehnliches gilt von den Verbindungslinien t' und t'' der Mitten von AB und CD, resp. AD und BC. Man thut wohl am besten, den Namen **Medianen**, den besonders französische Geometer bevorzugen, für die bezeichneten Verbindungslinien anzunehmen.

Die Aufgabe ist nun, den geometrischen Ort des Isogonalcentrums P anzugeben, wenn eine bestimmte Mediane im Fusspunktsdreieck constant sein soll. Es zeigt sich, dass Kreise um die Punkte Π diese geometrischen Oerter darstellen, und so bezeichnen wir diese Punkte Π am besten als **Medianenpole**.

§ 33. Für die Entfernung des Punktes Π_3 von A, B, C, D gelten die Formeln:

$$A\Pi_3 = \frac{e \cdot \sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta - \sin^2\varepsilon - \sin^2\zeta}} = \frac{e \cdot \sin\gamma}{\sigma};$$

$$B\Pi_3 = \frac{f \cdot \sin\delta}{\sigma}; \quad C\Pi_3 = \frac{e \cdot \sin\alpha}{\sigma}; \quad D\Pi_3 = \frac{f \cdot \sin\beta}{\sigma}.$$

Wenn man die entsprechenden Doppelverhältnisse bildet, wie in § 30, so findet man, dass auch die „Medianenpole“ nicht invariant sind.

§ 34. Man kann Punkt Π_3 auch noch durch Specialisierung eines hübschen Satzes vom Sechseck finden. Die fünf Escharen eines Pentagramms liegen bekanntlich nach einem Satz von Miquel auf einem Kreis, der „Pentaphorie", und die sechs Pentaphorieen eines Hexagramms schneiden sich in einem Punkt, der „Hexeschara". Der Medianenpol Π_3 ist nun die Hexeschara eines Hexagramms, das von den vier Seiten und zwei Diagonalen eines Tetragramms gebildet wird.

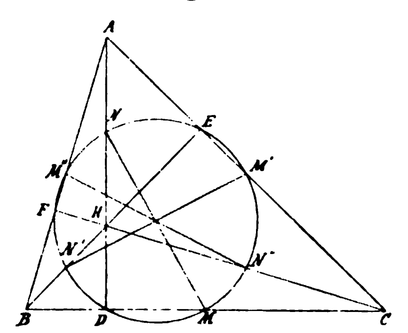
§ 35. Interessante Punkte entstehen ferner am vollständigen Vierseit, wenn man über den drei Diagonalen AC, BD, EF als Durchmessern Kreise beschreibt. Diese schneiden sich bekanntlich in zwei Punkten, die auf der Steiner'schen Höhengeraden liegen, den sogenannten „cyklischen Punkten" Z und Z' des Vierecks.

§ 36. Invariant sind aber auch diese Punkte nicht. Denn Kreis AZC über der Diagonale AC des Vierecks $ABCD$ schneidet diese Diagonale unter rechten Winkeln; die Diagonale AC geht aber bei der Transformation nicht wieder in die Diagonale $A'C'$ über, sondern in einen beliebigen Kreis $A'QC'$ durch $A'C'$; der Kreis über $A'C'$ als Durchmesser (auf dem die cyklischen Punkte des ζ-Vierecks liegen) muss also verschieden sein von dem Orthogonalkreis zu $A'QC'$, der dem Kreis AZC der z-Ebene entspricht.

§ 37. Ein weiteres Punktepaar mag noch erwähnt werden, das auch in der Isogonalcentrik eine Rolle spielt, die „Isomedianenpole" oder „Trisorthopole". Es ist nemlich möglich, dass in einem (vollständigen) Vierseit alle drei Medianen einander gleich sind: dies ist der Fall, wenn der vierte Punkt Höhenschnitt des Dreiecks der drei übrigen ist. Wenn (Fig. 4) M, M', M'' die Mitten der Seiten BC, AC, AB des Dreiecks ABC und N, N', N'' die Mitten der oberen Höhenabschnitte AH, BH, CH sind, so ist bekanntlich $MN = M'N' = M''N''$; die Medianen schneiden sich im Centrum des Feuerbach'schen Kreises des Dreiecks; je zwei Diagonalen des Vierecks, AH und BC, BH und AC, CH und AB, stehen senkrecht auf einander.

Wenn man nun verlangt, dass bei gegebenem Viereck ein Fusspunktsviereck gefunden werde, so dass die drei Medianen gleich seien (oder alle drei Diagonalenwinkel rechte seien), so sind die genannten Punkte die Orthogonalcentren. Sie sind die Schnittpunkte von Orthogonalkreisen, die je durch die Enden einer Diagonale zu den „Escharenkreisen" APC, BPD, EPF gezogen werden können. Eine ähnliche Ueberlegung wie in § 36 ergibt, dass auch diese Punkte nicht invariant sind.

Fig. 4.



§ 38. Zur Auffindung wirklich invarianter Punkte am Viereck (und wohl auch an höheren Figuren) kann man sich aber des folgenden einfachen Princips mit Nutzen bedienen.

Wenn die Fusspunktsdreiecke XYZ und $X_1 Y_1 Z_1$ eines Punktes P in Bezug auf zwei beliebige Dreiecke, etwa ABC und $A_1 B_1 C_1$, ähnlich sind, so heisst das in der complexen Ebene nach § 1, dass die Doppelverhältnisse $(PABC)$ und $(PA_1 B_1 C_1)$ gleich sind. Offenbar ist dadurch Punkt P bestimmt (endlich vieldeutig)[1]), und zwar als primär invarianter Punkt.

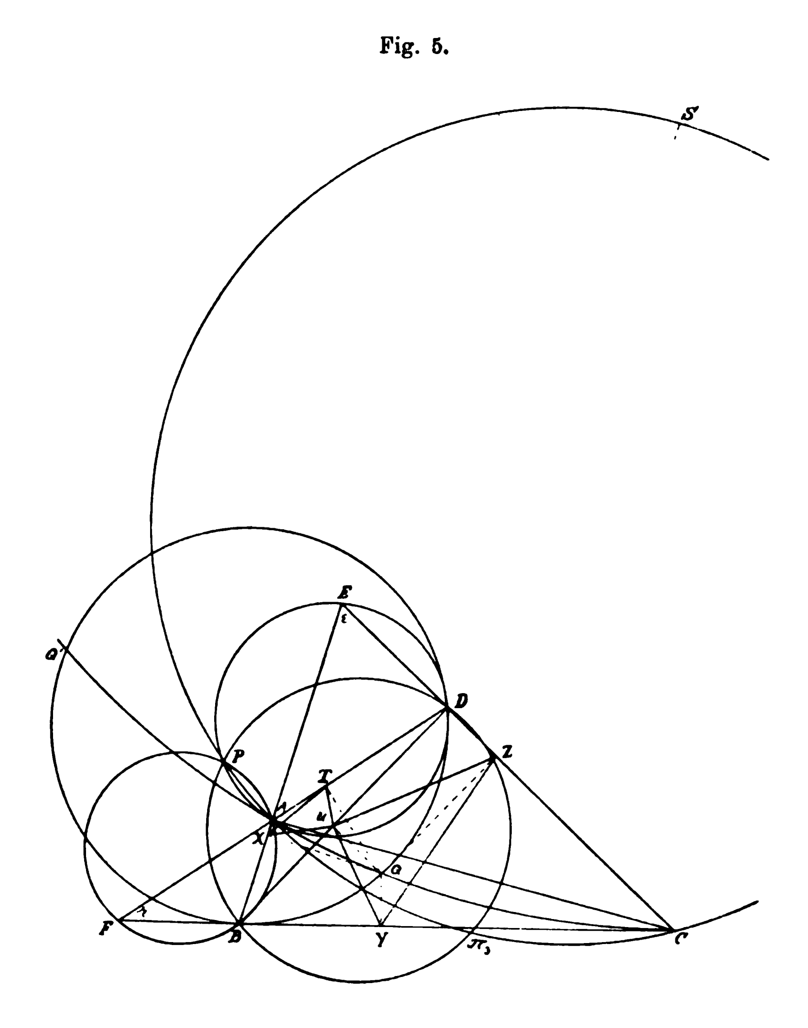
§ 39. Auf das Viereck lässt sich nun dieses Princip z. B. auf folgende Weise anwenden.

---

[1]) Die Bestimmung des Punktes führt auf interessante Curven, die nach den obigen Ausführungen für die Invariantentheorie von grosser Wichtigkeit sein müssen.

Fällt man von einem Punkte Q (Fig. 5) die Senkrechten auf die vier Seiten und eine Diagonale des Vierecks, so wird

Fig. 5.



Punkt Q invariant sein, wenn $\triangle X U T \sim Y U Z$, und es handelt sich nur darum, einen Punkt mit dieser Eigenschaft zu construieren. Es sei nun $\sphericalangle X U T = \sphericalangle Y U Z$, so folgt

$$A\,B\,Q + A\,D\,Q = B\,Q\,D - \gamma,$$

oder
$$4\,R - \alpha - B\,Q\,D = B\,Q\,D - \gamma, \quad \text{also}$$

(1) $$B\,Q\,D = 2\,R - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 2\,R - \frac{\varepsilon + \zeta}{2}.$$

Es sei weiter $\sphericalangle\, X\,T\,U = \sphericalangle\, U\,Y\,Z$, also

$$A\,Q\,D - A\,B\,D = B\,Q\,C - B\,D\,C,$$

$$B\,Q\,C - A\,Q\,D = B\,D\,C - A\,B\,D = \varepsilon,$$

oder links $A\,Q\,B$ addiert und subtrahiert:

$$4\,R - A\,Q\,C - B\,Q\,D = \varepsilon;$$

aber
$$B\,Q\,D = 2\,R - \frac{\alpha - \gamma}{2}, \quad \text{also}$$

(2) $$A\,Q\,C = 2\,R - \frac{\delta - \beta}{2} = 2\,R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}.$$

Die Schnittpunkte der beiden Kreise $A\,Q\,C$ und $B\,Q\,D$ müssen also nach obigem invariante Punkte sein.

§ 40. Es lässt sich nun zunächst leicht zeigen, dass der Kreis $A\,C\,Q$ den Winkel der Kreise $A\,B\,C$ und $A\,C\,D$, sowie der Kreis $B\,D\,Q$ den Winkel der Kreise $A\,B\,D$ und $B\,C\,D$ halbiert. Dies gibt eine sehr einfache Construction der gefundenen invarianten Punkte, die wir fortan Γ und Γ' nennen wollen. Auch sieht man hier unmittelbar, dass wir es mit invarianten Punkten zu thun haben; denn es kommt ja den Kreisen $A\,B\,C$ und $A\,C\,D$, sowie $A\,B\,D$ und $B\,C\,D$ die Eigenschaft der Invarianz zu, also auch den respectiven Halbierungskreisen und deren Schnittpunkten.

§ 41. Bekanntlich haben die Punkte Γ und Γ' die Eigenschaft, dass sie zu dem Punktepaar $A\,C$, sowie zu dem Paar $B\,D$ im Sinn der complexen Ebene harmonisch liegen (Γ ist Transversalpol zu $A\,C\,\Gamma'$ und $B\,D\,\Gamma'$, Γ' Transversalpol zu $A\,C\,\Gamma$ und $B\,D\,\Gamma$).

Man kann die Punkte deshalb die a u t o h a r m o n i s c h e n, oder vielleicht auch schlechtweg die h a r m o n i s c h e n Punkte des Vierecks nennen.

§ 42. Nach den Angaben der §§ 31 und 39 ist es auch leicht, die Lage der Punkte Γ und Γ' gegen die Eschara und den Medianenpol zu bestimmen. Der Winkel, den der Kreis $P A \Pi_3 C$ (wo P die Eschara, Π_3 Medianenpol) über $A C$ fasst, ist offenbar $= \varepsilon - \zeta$, respective $2 R - (\varepsilon - \zeta)$; allein der Kreisbogen $A \Gamma C$ fasst nach § 39 den Winkel $2 R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}$, folglich liegt sein Mittelpunkt S im Zenith des Bogens $A C$ gegenüber Π_3, und der Kreis $A \Gamma C$ halbiert den Winkel der Geraden $A C$ und des Kreisbogens $A \Pi_3 C$.

§ 43. Die Isogonalcentrik lehrt, dass für Kreise über den Diagonalen eines Vierecks die Diagonalenwinkel des Fusspunktsvierecks constant sind; so haben die Fusspunktsvierecke aller Punkte auf dem Kreise $A \Gamma C$ einen der Diagonalenwinkel constant $= \frac{1}{2}(\delta - \beta) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \zeta)$; ähnlich auf Kreis $B \Gamma D$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \zeta).$$

Zwei der Diagonalenwinkel des Fusspunktsvierecks der autoharmonischen Punkte sind also bezüglich $= \frac{1}{2}(\varepsilon - \zeta)$ und $\frac{1}{2}(\varepsilon + \zeta)$. Es sei noch bemerkt, dass man selbstverständlich durch cyklische Permutation im ganzen sechs solche Punkte Γ erhält. Diese sechs Punkte repräsentieren bekanntlich die Covariante T (Functionaldeterminante der Grundform und ihrer Hesse'schen Covariante) der biquadratischen Form $(A B C D)$.

§ 44. Auch für das Fünfeck lassen sich nach dem angegebenen Princip bemerkenswerte invariante Punkte construieren. Es sei nemlich (Fig. 6) $A B C D E$ ein beliebiges Fünfeck, und es sei nun P ein solcher Punkt, dass das Doppelverhältniss $(P A E D) = (P B E C)$ sei; diese Eigenschaft würde dem Punkt P offenbar die Eigenschaft der Invarianz geben. Nach unseren Ausführungen müssen dann die Fusspunktsdreiecke des Punktes P in Bezug auf die Dreiecke $A D E$ und $B E C$, nemlich $F_1 F_2 F_3$ und $G_1 G_2 G_3$, einander ähnlich sein. Wenn nun $\sphericalangle F_2 F_1 F_3 = G_2 G_1 G_3$ ist, so folgt nach den Sätzen der Angularcentrik:

$$A P E - A D E = B P E + B C E,$$

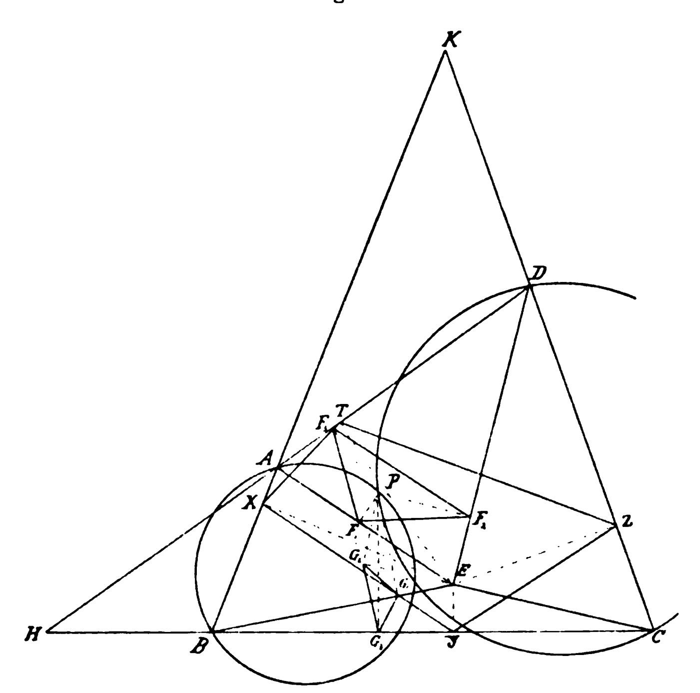
also
$$A P E - B P E = A D E + B C E,$$

oder
$$A P B = A D E + B C E = C E D - C H D,$$

also, wenn man das Fusspunktsviereck $X Y Z T$ des Punktes E in Bezug auf $A B C D$ construiert,

$$\sphericalangle A P B = \sphericalangle Y Z T. \tag{1}$$

Fig. 6.



Letzterer Winkel ist natürlich bei gegebener Lage der Punkte A, B, C, D, E bekannt, und somit wird P einmal auf einem leicht zu construierenden Kreisbogen über $A B$ liegen.

Wenn ferner $\sphericalangle F_1 F_2 F_3 = \sphericalangle G_1 G_2 G_3$ sein soll, so ist in ähnlicher Weise:

$$E P D - E A D = E P C + E B C,$$

also $$E P D - E P C = E A D + E B C, \text{ oder}$$

(2) $$C P D = A H B + A E B = Y X T;$$

also liegt P auch auf einem Kreisbogen über $C D$, der den bekannten Winkel $Y X T$ fasst. Die Kreise $A P B$ und $C P D$ werden sich natürlich noch in einem weitern Punkte P' schneiden. Die Construction der Kreise $A P B$, resp. $C P D$, geht wohl am leichtesten so vor sich, dass man durch A eine Parallele mit $T Z$, durch B mit $Y Z$ zieht; der Schnittpunkt der beiden wird, neben A und B, einen dritten Punkt des Kreises $A P B$ bilden. Analog natürlich für Kreis $C P D$.

Diese Construction wird sich ferner ebensowohl auf das Seitenpaar $B C$ und $A D$ des Vierecks $A B C D$, wie für $A B$ und $C D$, anwenden lassen: so dass man also über $A D$ einen Kreis mit $\sphericalangle X Y Z$, und über $B C$ einen Kreis mit $\sphericalangle X T Z$ zu beschreiben hat, um zwei weitere invariante Punkte P'' und P''' zu erhalten, u. s. w.

Alle obigen Constructionen werden sich in cyklischer Folge fünfmal machen lassen, indem man statt E der Reihe nach die andern Punkte A, B, C, D vor den übrigen auszeichnet.

§ 45. Punkt E hatte im vorigen Paragraphen eine beliebige Lage gegen die vier übrigen Punkte A, B, C, D des Fünfecks. Man wird die Lage so specialisiren können, dass Punkt E mit einem der invarianten Punkte P, P', P'', P''' zusammenfalle. Offenbar ist dann ein solcher Punkt ein invarianter Punkt des Vierecks $A B C D$, und es erhebt sich die Frage, was für ein merkwürdiger Punkt des Vierecks $A B C D$ alsdann E sein wird.

Es muss für den Zusammenfall von E und P natürlich

(1) $\sphericalangle A P B = A E B$, und (2) $C P D = C E D$ sein.

Aus der ersten Bedingung ergibt sich, da $A P B = T Z Y$ sein soll, die Gleichung:

$$\sphericalangle A E B = T Z Y = C E D - C H D = C E D - \zeta;$$

aus der zweiten $CED = TXY = AEB + \zeta$, eine Gleichung, die mit der vorigen identisch ist. Die Aufgabe ist also unbestimmt, und man wird noch die Forderung hinzustellen können, dass etwa auch P'' mit E zusammenfalle. Dann muss auch

$$AED = XYZ = BEC - BKC = BEC - \varepsilon;$$

verknüpft man dies mit obiger Gleichung

$$AEB = CED - \zeta,$$

so bekommt man

$$BED = 4R - BED - (\varepsilon + \zeta), \text{ also}$$

$$BED = 2R - \frac{\varepsilon + \zeta}{2}. \tag{1}$$

Weiter muss bei dem Zusammenfall von E und P'' auch sein:

$$\sphericalangle BEC = XTZ = AED + \varepsilon;$$

dazu nehme man abermals die Gleichung:

$$AEB = CED - \zeta,$$

und man erhält durch Addition:

$$4R - AEC = AEC + \varepsilon - \zeta, \text{ oder}$$

$$AEC = 2R - \frac{\varepsilon - \zeta}{2}. \tag{2}$$

Wir gelangen also auf diesem Wege abermals zu den „autoharmonischen Punkten“ als invarianten Punkten: E ist dann ein Punkt der Covariante T, welche zu der biquadratischen Form $(ABCD)$ gehört (vgl. oben § 43).

Soll ein Punkt einer binären Form fünfter Ordnung zur Covariante T der übrigen vier Punkte gehören, so muss nach Clebsch[1]) die schiefe Invariante R der Form fünfter Ordnung verschwinden. Wenn umgekehrt $R = 0$ ist, so tritt entweder der genannte Fall ein, oder der Punkt E gehört einem von drei Quadrupeln an, die aus einer gewissen cubischen Gleichung bestimmt werden.

---

[1]) Vgl. Clebsch a. a. O., p. 354 f.

Der aufmerksame Leser wird bereits gesehen haben, dass die vorangehenden Paragraphen auf Schritt und Tritt zu weiterer Ausgestaltung drängen und zu neuen Problemen führen. Für jetzt habe ich nur die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf den Satz des § 1 lenken, und zugleich einige sich leicht ergebende Illustrationen und Anwendungen desselben geben wollen. Auf genauere Determinationen, auf analytische Untersuchungen u. s. w., musste ich gegenwärtig verzichten: ich möchte auch lieber zuerst gewisse hieher gehörige Teile der Isogonalcentrik — namentlich die Isomorphopolcentrik — in eigenen Artikeln ausführen und begründen.

Zum Schlusse dieser Ausführungen aber möchte ich noch ein wärmstes Wort des Dankes an einen hochverehrten Freund entrichten, und auf seinen massgebenden Einfluss auf ihr Zustandekommen hinweisen. Der Grundgedanke dieser Paragraphen ist aus den Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. Lindemann über Invarianten- und Functionentheorie herausgewachsen; auch manches Detail geht auf diese Vorlesungen zurück.

Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen.

Von **Eduard von Weber.**

(*Eingelaufen 7. Juli.*)

1. Eines der zunächst sich darbietenden und wichtigsten Probleme in der allgemeinen Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen ist die Beantwortung der Frage: Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein gegebenes System von $n - m$ Pfaff'schen Gleichungen in n Variabeln:

$$(1) \qquad dx_{m+h} = \sum_1^m {}^s\, a_{sh}(x_1, \ldots x_n)\, dx_s \quad (h = 1, 2, \ldots n - m)$$

sich auf eine Form mit nur τ Differentialelementen:

$$(2) \qquad \sum_1^\tau {}^s\, F_{sh}\, df_s = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n - m)$$

bringen lässt, wo $f_1, f_2, \ldots f_\tau$ unabhängige Funktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bedeuten, und unter τ eine Zahl verstanden wird, die nicht kleiner als $n - m$ und nicht grösser als $n - 2$ ist?

Wir wollen die Beantwortung dieser Frage „das Problem A" nennen.

Die Annahme $\tau = n - 1$ führt auf eine triviale Aufgabe, die Annahme $\tau = n - m$ auf den Fall, dass das System (1) unbeschränkt integrabel ist; dazu ist bekanntlich notwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$a_{iks} \equiv 0 \quad (i, k = 1, .. m; \; s = 1, .. n - m),$$

wenn gesetzt wird:

$$A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-m} {}^h a_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{m+h}}; \quad (i = 1, 2, .. m)$$

$$a_{iks} \equiv - a_{kis} \equiv A_i a_{ks} - A_k a_{is},$$

oder, für die unaufgelöste Form des Systems (1):

$$\sum_1^n {}^k \xi_{ik} \, dx_k = 0 \quad (i = 1, 2, .. n - m),$$

dass die alternirenden bilinearen Gleichungen:

$$\sum_1^n {}^k \sum_1^n {}^l \left(\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \xi_{il}}{\partial x_k} \right) dx_k \, \delta x_l = 0$$

vermöge der Relationen:

$$\sum_1^n {}^k \xi_{ik} \, dx_k = \sum_1^n {}^k \xi_{ik} \, \delta x_k = 0 \quad (i = 1 .. n - m)$$

identisch stattfinden.

2. Es gilt zunächst der Satz: Damit sich das System (1) in der Form (2) darstellen lasse, ist notwendig und hinreichend, dass in der alternirenden Matrix:

$$(3) \quad \left\| \begin{array}{cccccccc} 0, & \sum^s \lambda_s a_{12s}, & .. & \sum^s \lambda_s a_{1ms}, & A_1 f_1, & .. & A_1 f_\varrho \\ . & . & .. & . & . & .. & . \\ \sum^s \lambda_s a_{m1s}, & \sum^s \lambda_s a_{m2s} & ..... & 0, & A_m f_1 & .. & A_m f_\varrho \\ A_1 f_1, & A_2 f_1 & .. & A_m f_1 & 0 & .. & 0 \\ . & . & .. & . & . & .. & . \\ A_1 f_\varrho, & A_2 f_\varrho & .. & A_m f_\varrho & 0, & .. & 0 \end{array} \right\|$$

alle $2\varrho + 2$-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch, d. h. für jedes beliebige Werthsystem

$$x_1 .. x_n, \; \lambda_1 .. \lambda_{n-m}$$

verschwinden, wenn

$$\varrho = \tau - n + m$$

gesetzt wird.

In der That, aus unserer Annahme folgt, dass das Pfaff'sche System

$$(4) \qquad d x_{m+h} = \sum a_{ih}\, d x_i; \quad d f_1 = 0, \ldots d f_\varrho = 0$$

unbeschränkt integrabel sein muss; dazu ist nach dem oben gesagten notwendig und hinreichend, dass die $n - m$ bilinearen Gleichungen:

$$(5) \qquad \sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k a_{iks}\, d x_i\, \delta x_k = 0 \quad (s = 1 \ldots n - m)$$

vermöge der Relationen (4) und der dazu congruenten, in den δx geschriebenen, d. h. also vermöge der Gleichungen:

$$(6) \qquad \sum_1^m A_i f_k\, d x_i = 0, \ \sum_1^m A_i f_k\, \delta x_i = 0 \quad (k = 1 \ldots \varrho)$$

identisch bestehen; dasselbe muss also auch für die Relation

$$\sum \sum \sum \lambda_s\, a_{iks}\, d x_i\, \delta x_k = 0$$

bei beliebigen Werten der λ stattfinden, und diese Bedingung findet bekanntlich[1]) ihren Ausdruck in dem Verschwinden aller $2\varrho + 2$-reihigen Determinanten in (3).

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, die Gleichungen (4) also unbeschränkt integrabel und $f_1, \ldots f_\varrho, f_{\varrho+1}, \ldots f_r$ ihre Integrale, so kann das System (1) augenscheinlich in der Form (2) geschrieben werden. Eine erste notwendige (aber, wie sich zeigen wird, keineswegs hinreichende) Bedingung für die Möglichkeit der Darstellung (2) ist also die, dass der Rang der Matrix

$$(7) \qquad \left\| \sum_1^{n-m}{}^s \lambda_s\, a_{iks} \right\| \quad (i, k = 1, \ldots m)$$

nicht grösser als 2ϱ sei.[2])

3. Die obigen Bedingungen können offenbar auch so formulirt werden:

---

[1]) Vgl. z. B. mein Buch: „Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem" Leipzig 1900, S. 308 ff.

[2]) Diese Bedingung wurde schon von H. Grassmann ausgesprochen; vgl. Herrn Engels Note in Grassmanns Werken Bd. I, Abt. 2, pag. 480.

Damit sich das Pfaff'sche System (1) auf eine Form mit nur τ Differentialelementen reduciren lasse, ist notwendig und hinreichend, dass

1) überhaupt wenigstens **ein** System von $\varrho = \tau - n + m$ congruenten Relationenpaaren

$$\xi_{1i}\,dx_1 + \ldots + \xi_{mi}\,dx_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho) \tag{8}$$

$$\xi_{1i}\,\delta x_1 + \ldots + \xi_{mi}\,\delta x_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho) \tag{9}$$

existire, vermöge dessen alle $n - m$ bilinearen Gleichungen (5) identisch erfüllt sind;

2) dass sich unter diesen Relationensystemen eines so auswählen lasse, dass die Gleichungen (1) (8) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden.

Bei der Lösung des Problems A handelt es sich natürlich darum, die Bedingungen für die Möglichkeit einer Darstellung (2) durch Gleichungen zwischen den Coefficienten a_{ik} des gegebenen Systems (1) allein auszudrücken, also die $f_1 \ldots f_\varrho$ aus den Bedingungen der vorigen Nr. zu eliminiren. Für die einfachsten Fälle $m = 3$ und $m = 4$ reicht dazu, wie wir sehen werden, der Satz dieser Nr. vollständig aus.

In allen Fällen erhält man aus der Forderung, dass in der Matrix (3) alle $2\varrho + 2$-reihigen Determinanten identisch verschwinden, in den Unbekannten $f_1 \ldots f_\varrho$ und den Independenten $x_1 \ldots x_n$ ein Differentialsystem 1. O., das auf seine Integrabilität hin zu untersuchen ist.

4. Statt dieses Differentialsystems wollen wir indes ein anderes betrachten, das für unsere Zwecke, insbesondere für die Behandlung des sogleich zu besprechenden „Problems B" besonders geeignet ist.

Aus der Darstellung (2) des Pfaff'schen Systems (1) folgt, dass die Relationen

$$f_1 = c_1,\; f_2 = c_2, \ldots f_\tau = c_\tau$$

für jedes Wertsystem der arbiträren Constanten c ein τ-gliedriges Integraläquivalent, also wenn wir die Ausdrucksweise der Geometrie in dem n-dimensionalen Punktraum $R_n\,(x_1 \ldots x_n)$ heran-

ziehen, eine „$n - \tau$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit," oder kurz eine „Integral-$M_{n-\tau}$" des Pfaff'schen Systems (1) darstellen. Durch jeden Punkt $x_1^0 .. x_n^0$ geht eine und nur eine solche $M_{n-\tau}$ hindurch. Wird eine dieser $M_{n-\tau}$ durch die Relationen

$$(10) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, .. u_\nu) \quad (i = 1 .. n;\ \nu = n - \tau)$$

dargestellt, wo die u wesentliche unabhängige Parameter bedeuten, so genügen die x identisch den Differentialgleichungen

$$(11) \qquad \frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_r} = \sum_1^m {}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (r = 1, .. \nu;\ h = 1, .. n - m)$$

und somit auch den folgenden:

$$(12) \qquad \sum_1^m {}^i \sum_1^m {}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, .. \nu;\ h = 1, 2, .. n - m),$$

die sich durch Derivation von (11) nach $u_1 .. u_\nu$ und Vergleichung der links auftretenden Ableitungen $\frac{\partial^2 x_{m+h}}{\partial u_r \partial u_s}$ ergeben. Wir wollen das System (11) (12) mit S_ν bezeichnen. Umgekehrt liefert jedes Integral (10) des Differentialsystems S_ν von der Eigenschaft, dass in der Matrix

$$(13) \qquad \left\| \begin{matrix} . & . & . & . & . \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_r} & \frac{\partial x_2}{\partial u_r} & . & . & \frac{\partial x_n}{\partial u_r} \\ . & . & . & . & . \end{matrix} \right\| \quad (r = 1, .. \nu)$$

nicht alle ν-reihigen Determinanten identisch verschwinden, eine Integral-$M_{n-\tau}$ von (1).

Ist ferner das Differentialsystem S_ν so beschaffen, dass durch jeden Punkt $x_1^0 .. x_n^0$ eines gewissen n-dimensionalen (also nur durch Ungleichungen definirten) Gebietes des R_n wenigstens eine Integral-$M_{n-\tau}$ hindurchgeht, so lässt sich das Pfaff'sche System (1) in der Form (2) schreiben, und umgekehrt.

5. Aus der allgemeinen Theorie der Systeme partieller Differentialgleichungen[1]) ergeben sich jetzt nachstehende Resultate.

Fügt man zu dem System S_ν der Reihe nach diejenigen Gleichungen, die aus ihm durch wiederholte Derivation nach $u_1 \,..\, u_\nu$ hervorgehen, so gelangt man nach einer endlichen Anzahl solcher Derivationen entweder (durch Elimination der partiellen Ableitungen der x) zu Widersprüchen, ev. Relationen in den Variabeln x allein, oder zu einem Differentialsystem, das durch Auflösung nach gewissen partiellen Ableitungen der x in ein „canonisches, passives System" Σ verwandelt werden kann. Als canonische Form[2]) kann man dabei immer eine solche wählen, die aus lauter Relationen der Form

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu} x_i}{\partial u_1^{\alpha_1}\,\partial u_2^{\alpha_2} \cdots \partial u_\nu^{\alpha_\nu}} = \varphi_{i,\alpha_1 \cdots \alpha_\nu}\left(x_1, \cdots x_n, \cdots \frac{\partial^{\beta_1+\cdots\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1} \cdots \partial u_\nu^{\beta_\nu}} \cdots\right)$$

mit folgenden Eigenschaften besteht: Keine der links vorkommenden Ableitungen tritt auf einer der rechten Seiten auf; für jede in $\varphi_{i,\alpha_1 \cdots \alpha_\nu}$ vorkommende Ableitung $\dfrac{\partial^{\beta_1+\cdots+\beta_\nu} x_k}{\partial u_1^{\beta_1} \cdots \partial u_\nu^{\beta_\nu}}$ ist $\Sigma \beta \leqq \Sigma \alpha$; gilt das Gleichheitszeichen, so ist $k \leqq i$, und im Falle $k = i$ die erste nicht verschwindende der Differenzen $\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2 \ldots$ positiv. Bezeichnet man mit Riquier die auf den linken Seiten der Gleichungen Σ vorkommenden partiellen Ableitungen und alle die unbegrenzt vielen, durch Derivation nach $u_1 \,..\, u_\nu$ daraus hervorgehenden Ableitungen als „principale", die Variabeln $x_1 \,..\, x_n$ selbst und die noch übrigen partiellen Ableitungen der x als „parametrische" Grössen des Systems Σ, so findet die Passivität des letzteren darin ihren Ausdruck, dass man vermöge der Gleichungen Σ und der daraus durch unbegrenzte Derivation folgenden Relationen jede principale Ableitung auf eine und nur eine Weise durch die parametrischen Grössen allein ausdrücken kann.

---

[1]) Vgl. C. Riquier, Ann. éc. norm. 1893, p. 65, 123, 167; Par. sav. [étr.] 32; A. Tresse, Acta math. 18 p. 1 (1894) u. a.

[2]) Vgl. A. Tresse a. a. O.

Sind dann $u_1^0 \ldots u_\nu^0$ beliebige Constante, so besitzt das Differentialsystem Σ — und infolgedessen auch das System S_ν — ein und nur ein System an der Stelle u^0 regulärer Integralfunktionen $x_1 \ldots x_n$ von der Eigenschaft, dass sich die x und ihre sämtlichen parametrischen Ableitungen $\frac{\partial^{i+k+\ldots+l} x_h}{\partial u_1^i \partial u_2^k \ldots \partial u_\nu^l}$ vermöge der Gleichungen $u_1 = u_1^0 \ldots u_\nu = u_\nu^0$ bezw. auf die willkürlich vorgeschriebenen „Anfangswerte"

$$x_1^0 \ldots x_n^0, \ldots \left(\frac{\partial^{i+k+\ldots+l} x_h}{\partial u_1^i \partial u_2^k \ldots \partial u_\nu^l}\right)_0 \ldots$$

reduciren, vorausgesetzt, dass die rechten Seiten der Gleichungen Σ in der Umgebung dieser Anfangswerte regulär sind, und die n Potenzreihen

$$\Sigma \left(\frac{\partial^{i+k+\ldots+l} x_h}{\partial u_1^i \ldots \partial u_\nu^l}\right)_0 (u_1 - u_1^0)^i \ldots (u_\nu - u_\nu^0)^l \text{ [1]}$$

einen gemeinsamen n-dimensionalen Convergenzbezirk besitzen.

Insbesondere besitzt also das System Σ wenigstens eine Integral-M_ν, die den willkürlich gewählten (nur durch Ungleichungen beschränkten) Punkt $x_1^0 \ldots x_n^0$ enthält; hieraus und aus der vorigen Nr. folgt:

„Damit das Pfaff'sche System (1) sich in der Form (2) darstellen lasse, worin die τ Funktionen $f_1 \ldots f_\tau$ von einander unabhängig sind, ist notwendig und hinreichend, dass aus den Relationen S_ν und den Gleichungen, die hieraus durch unbegrenzt wiederholte Derivation nach $u_1 \ldots u_\nu$ hervorgehen, weder das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten der Matrix (13), noch eine Relation zwischen den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ allein folge. Ob diese Bedingungen erfüllt sind, oder nicht, lässt sich in jedem einzelnen Fall durch eine endliche Zahl von Differentiationen und Eliminationen entscheiden.

[1] Die Summe erstreckt sich über alle parametrischen Ableitungen von x_h.

Bezeichnet man allgemein mit S_λ das System:

$$\frac{\partial x_{m+h}}{\partial u_r} = \sum_1^m{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (r = 1 \,..\, \lambda;\; h = 1 \,..\, n - m)$$

$$\sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \,..\, \lambda;\; h = 1, 2, \,..\, n - m),$$

und besitzt S_ν die im vorigen Satze genannte Eigenschaft, so gilt Analoges a fortiori für alle Systeme S_λ, wo $\lambda < \nu$.

Verlangt man, um die Ideen zu fixiren, dass die $n - \nu = \tau$ Funktionen f_i hinsichtlich $x_{\nu+1} \,..\, x_{\nu+2} \,..\, x_n$ unabhängig seien, so kann man in S_ν die Variabeln $x_1 \,..\, x_\nu$ statt $u_1 \,..\, u_\nu$ als Independente einführen.

6. Die Bedingungen der vorigen Nr. verlangen natürlich vor allem, dass nicht schon aus den Relationen (11) (12) selber das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten in (13) oder eine Relation zwischen den x allein hervorgehe, m. a. W., dass sich ν linear unabhängige Funktionensysteme

$$(14) \qquad \eta_{1s}, \eta_{2s}, \,..\, \eta_{ms} \quad (s = 1, 2, \,..\, \nu)$$

derart bestimmen lassen, dass die Beziehungen

$$(15) \qquad \sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k a_{ikh}\, \eta_{ir}\, \eta_{ks} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \,...\, \nu;\; h = 1, 2, \,..\, n - m)$$

erfüllt sind. Es ist dies nichts anderes als die in Nr. 3 unter 1) aufgestellte Forderung. In der That, gibt es $\nu = n - \tau = m - \varrho$ Grössensysteme (14) der genannten Eigenschaft, so besitzen die Gleichungen

$$\sum \eta_{is}\, \xi_i = 0 \quad (s = 1, 2, \,..\, m - \varrho)$$

genau ϱ linear unabhängige Lösungensysteme

$$\xi_{1i}, \xi_{2i} \,...\, \xi_{mi} \quad (i = 1, 2, \,..\, \varrho),$$

und die bilinearen Gleichungen (5) sind offenbar vermöge der ϱ linear unabhängigen Relationenpaare (8) (9) identisch erfüllt. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, und bedeuten die Grössen

(14) die ν linear unabhängigen Lösungensysteme der Relationen:

$$\xi_{1i}\eta_1 + \ldots + \xi_{mi}\eta_m = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho),$$

so bestehen offenbar auch die Beziehungen (15), was zu zeigen war.

7. Bemerkenswert ist der Spezialfall, dass schon das Differentialsystem S_ν selber durch Auflösung nach gewissen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial u_r}$ in ein canonisches passives System verwandelt werden kann. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass das System S_ν und die Gleichungen, die hieraus durch unbegrenzte Derivation nach den u folgen, weder das Verschwinden aller ν-reihigen Determinanten (13) noch auch irgend eine nicht in S_ν enthaltene Relation zwischen den Grössen

$$x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (i = 1, \ldots n;\ r = 1, \ldots \nu)$$

zur Folge haben. Alle Systeme S_2, S_3, .. $S_{\nu-1}$ besitzen dann a fortiori die analogen Eigenschaften.

8. Eine weitere Spezialisirung der Annahme der letzten Nr. ist für die allgemeine Theorie der partiellen Differentialprobleme von besonderem Interesse. Es seien für das System S_ν die Bedingungen der vorigen Nr. erfüllt, und es werde die Forderung hinzugefügt, dass aus S_ν und den aus ihm durch Derivationen folgenden Gleichungen keine andern Relationen in den Variabeln

$$(16) \qquad x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \frac{\partial x_i}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial x_i}{\partial u_{\nu-1}} \quad (i = 1 \ldots n)$$

folgen, als solche, die vermöge $S_{\nu-1}$ (vgl. Nr. 5) identisch bestehen, ebenso, dass aus dem System $S_{\nu-1}$ und den daraus durch unbegrenzte Derivation folgenden Gleichungen für die Variabeln

$$x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \ldots \frac{\partial x_i}{\partial u_{\nu-2}} \quad (i = 1 \ldots n)$$

keine andern Relationen hervorgehen können, als solche, die in $S_{\nu-2}$ enthalten sind, u. s. w., endlich dass S_2 zu S_1 in der analogen Beziehung stehe. Betrachten wir jetzt eine beliebige Integral-$M_{\nu-1}$ des Differentialsystems $S_{\nu-1}$:

$$(17) \qquad x_i = \psi_i (u_1 u_2 \ldots u_{\nu-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und beachten, dass jede partielle Ableitung der x, die in der canonischen Auflösung von $S_{\nu-1}$ parametrisch ist, infolge unserer Annahmen sich offenbar auch unter den parametrischen Ableitungen der canonischen Form von S_ν findet, so erschliesst man nach Nr. 5 die Existenz einer Integral-M_ν des Systems S_ν, die jene Integral-$M_{\nu-1}$ vollständig enthält. Eine Ausnahme würde nur dann eintreten, wenn für jedes Wertsystem der Grössen (16), das durch die Relationen (17) definirt wird, die rechten Seiten der canonischen Auflösung von S_ν aufhörten, sämtlich regulär zu sein. Da dies aber, wie man leicht erkennt, nur für besondere Integral-$M_{\nu-1}$ eintreten kann, die ausser $S_{\nu-1}$ noch andere partielle Differentialgleichungen erfüllen, so schliesst man:

Unter den zu Anfang dieser Nr. gemachten Voraussetzungen geht durch jede Integral-M_1 des gegebenen Pfaff'schen Systems im Allgemeinen wenigstens **eine** Integral-M_2, durch jede Integral-M_2 wenigstens **eine** Integral-M_3 etc., endlich durch jede Integral-$M_{\nu-1}$ wenigstens **eine** Integral-M_ν.

Die Aufstellung der hiezu notwendigen und hinreichenden Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten a_{ik} des Pfaff'schen Systems bezeichnen wir als das „Problem B." Es erhebt sich in jedem einzelnen Fall insbesondere die Frage nach der grössten Zahl ν von der angegebenen Beschaffenheit.

9. Damit die Forderungen der vorigen Nr. erfüllt seien, ist vor allem nötig, dass ausser den Bedingungen der Nr. 6 noch die folgenden erfüllt seien: Bezeichnet man allgemein mit G_λ das Relationensystem

$$\sum_1^m{}^i \sum_1^m{}^k a_{ikh}\, \eta_{ir}\, \eta_{ks} = 0$$

$$(r, s = 1, 2, \ldots \lambda;\ h = 1, 2, \ldots n - m),$$

so dürfen aus den Relationen G_ν durch Elimination der $\eta_{i\nu}$ nur solche Relationen folgen, die vermöge $G_{\nu-1}$ identisch erfüllt sind, ebenso dürfen aus $G_{\nu-1}$ durch Elimination der $\eta_{i,\nu-1}$ nur solche Gleichungen hervorgehen, die in $G_{\nu-2}$ enthalten sind, u.s.w.

In den einfachsten Fällen $m = 3$ und $m = 4$ wird sich herausstellen, dass diese Bedingungen zusammen mit denjenigen der Nr. 6 bereits die Passivität des Differentialsystems S_ν zur Folge haben.

10. In den Fällen $m = 1$ und $m = 2$ sind die Probleme A und B trivial. Wir betrachten daher zunächst das Pfaff'sche System:

$$(18)\quad dx_{3+h} = a_{1h}\, dx_1 + a_{2h}\, dx_2 + a_{3h}\, dx_3 \quad (h = 1, 2, \ldots n - 3),$$

und fragen, unter welchen Bedingungen sich dieses System auf eine Form mit $n - 2$ Differentialelementen bringen lässt.

Soll zunächst durch jede Integral-M_1 (oder „Integralcurve") des Systems eine Integral-M_2 gehen, so müssen die Gleichungen

$$(19)\quad \sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k a_{ikh}\, \xi_i\, \eta_k = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n - 3)$$

für jedes Wertsystem $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ ein davon linear unabhängiges Lösungensystem $\eta_1\, \eta_2\, \eta_3$ zulassen, und dies kann offenbar nur dann eintreten, wenn sich die $n - 3$ bilinearen Gleichungen (19) auf eine einzige reduciren, d. h. wenn in der Matrix

$$(20)\quad \begin{Vmatrix} a_{121} & a_{231} & a_{311} \\ a_{122} & a_{232} & a_{312} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

alle zweireihigen Determinanten identisch verschwinden. Sind also etwa die Elemente der ersten Zeile nicht alle null, so muss man haben:

$$a_{ikh} = \varrho_h\, a_{ik1} \quad (h = 2, 3, \ldots n - m;\ i, k = 1, 2, 3).$$

Ich habe diese Annahme in einer früheren Abhandlung[1]) ausführlich untersucht. Es sei hier nur hervorgehoben, dass ein Pfaff'sches System (18) dieser Art unbegrenzt viele Integral-M_2 besitzt, und dass jede dieser M_2 von ∞^1 „charakteristischen Curven" erzeugt wird, die durch das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dx_{3+h} = \sum a_{ih}\, dx_i; \quad dx_1 : dx_2 : dx_3 = a_{231} : a_{311} : a_{121}$$

definirt sind; man erhält die M_2, die durch eine beliebig vorgegebene Integral-M_1 des Systems (18) hindurchgeht, indem man alle diejenigen ∞^1 charakteristischen Curven, die bezw. von den ∞^1 Punkten der Integral-M_1 auslaufen, zu einer M_2 zusammenfasst. Dieser einfache Satz enthält als Spezialfall Cauchy's Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Independenten, sowie die Theorie der von Lie[2]) so genannten „Darboux'schen Systeme" erster Klasse, d. h. derjenigen partiellen Differentialprobleme in zwei Independenten, auf welche sich Cauchy's Methode übertragen lässt.

11. Soll das System (18) überhaupt eine Darstellung

$$df_h = F_h\, df \quad (h = 1, 2, \ldots n - 3) \tag{21}$$

zulassen, so muss es nach Nr. 3 ein Funktionensystem $u_1\, u_2\, u_3$ geben, derart, dass die Gleichungen

$$\sum_1^3{}^i \sum_1^3{}^k a_{ikh}\, dx_i\, \delta x_k = 0 \quad (h = 1, \ldots n - 3) \tag{22}$$

vermöge der Relationen

$$\begin{aligned} u_1\, dx_1 + u_2\, dx_2 + u_3\, dx_3 &= 0 \\ u_1\, \delta x_1 + u_2\, \delta x_2 + u_3\, \delta x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

erfüllt sind; also hat man

---

[1]) „Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen", Leipziger Berichte 1898, p. 207.

[2]) Leipziger Berichte 1895, p. 71.

$$(24)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12h} & a_{13h} & u_1 \\ a_{21h} & 0 & a_{23h} & u_2 \\ a_{31h} & a_{32h} & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } a_{23h}\, u_1 + a_{31h}\, u_2 + a_{12h}\, u_3 = 0;$$

in der Matrix (20) müssen also alle dreireihigen Determinanten identisch verschwinden. Sind nun nicht alle zweireihigen Determinanten null, so besitzen die Gleichungen (24) eine und nur eine Auflösung, und es kommt noch die weitere Forderung hinzu, dass die Gleichungen (18) (23) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden. Man findet hierfür die Bedingung:

$$0 \equiv u_1 (A_2 u_3 - A_3 u_2) + u_2 (A_3 u_1 - A_1 u_3) + u_3 (A_1 u_2 - A_2 u_1).$$

Durch Betrachtung spezieller Fälle überzeugt man sich leicht, dass diese Bedingung nicht für jedes beliebige System (18) stattfindet; ist sie erfüllt, so erhält man durch Integration des Systems (18) (23) eine und wesentlich nur eine Darstellung (21).

Die Probleme A und B sind damit für $m = 3$ vollständig erledigt.

12. Soll das Pfaff'sche System

$$(25)\qquad dx_{4+h} = \sum_1^4 a_{ih}\, dx_i \quad (h = 1, 2, \ldots n-4)$$

auf eine Form

$$(26)\qquad df_h = F_h\, df \quad (h = 1, 2, \ldots n-4)$$

gebracht werden können, so muss zunächst der Rang der Matrix

$$(27)\qquad \left\| \sum_1^{n-4} {}^h\, a_{ikh}\, \lambda_h \right\| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

gleich zwei sein. Deuten wir daher $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4$ und ebenso $\eta_1 \ldots \eta_4$ als homogene Punktcoordinaten eines R_3, so sind alle linearen Complexe des R_3, die in der Schaar:

(28) $$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k \left(\sum_1^{n-4}{}^h a_{ikh} \lambda_h\right) \xi_i \eta_k = 0$$

enthalten sind, speziell.

Es werde mit $\varkappa$ der Rang der Matrix

(29) $$\left\| \begin{matrix} . & . & . & . & . & . \\ a_{12h} & a_{13h} & a_{14h} & a_{23h} & a_{24h} & a_{34h} \\ . & . & . & . & . & . \end{matrix} \right\| \quad (h = 1, \ldots . n - 4)$$

bezeichnet. Ist dann $\varkappa = 1$, d. h. reducirt sich die Zahl linear unabhängiger Complexe der Schaar (28) auf eins, so kommen wir auf den Fall zurück, den ich in meiner pag. 284 citirten Arbeit betrachtet habe. Die Reduktion auf die Form (26) ist auf unendlich viele Arten möglich, und zwar gehen durch jede Integral-M_1 unbegrenzt viele Integral-M_2, durch jede der letzteren wenigstens eine Integral-M_3 hindurch. Umgekehrt, soll dies der Fall sein, so muss zwei der Rang von (27) und eins derjenige von (29) sein; in der That folgt nach Nr. 9 aus der gemachten Annahme, dass durch jeden Punkt ξ des R_3 wenigstens eine Gerade gehen muss, die allen Complexen der Schaar (28) gemeinsam ist, und durch jede solche Gerade eine Ebene, deren sämtliche Geraden den Complexen der Schaar gemeinsam sind, und dies kann offenbar nur eintreten, wenn alle Complexe der Schaar (28) speziell und identisch sind.

13. Ist der Rang der Matrix (27) gleich 2 und $\varkappa = 2$, d. h. enthält die Schaar (28) zwei und nur zwei linear unabhängige Complexe, so bilden die Leitgeraden der ∞^1 Complexe der Schaar ein ebenes Büschel. Ist

(30) $$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

die Gleichung der Büschelebene, so ist das Relationenpaar

(31) $$w_1 \, dx_1 + \ldots + w_4 \, dx_4 = 0$$

(32) $$w_1 \, \delta x_1 + \ldots + w_4 \, \delta x_4 = 0$$

das einzige, vermöge dessen alle bilinearen Gleichungen:

(33) $$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k a_{ikh} \, dx_i \, \delta x_k = 0 \quad (h = 1, \ldots n - 4)$$

identisch erfüllt sind. Es gibt dann eine (und nur eine) Darstellung (26), wenn das Pfaff'sche System (25) (31) unbeschränkt integrabel ist, d. h. wenn in der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \beta_{12} & . & \beta_{14} & w_1 \\ . & . & . & . & . \\ \beta_{41} & \beta_{42} & . & 0 & w_4 \\ w_1 & w_2 & . & w_4 & 0 \end{Vmatrix} \quad (\beta_{ik} = A_i w_k - A_k w_i)$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden. Dieser Fall lässt sich leicht auf denjenigen der Nr. 11 zurückführen. Unter der gemachten Annahme gibt es nämlich ein Funktionensystem $\xi_1 \,.\,.\, \xi_4$, das den Relationen

$$(34) \qquad \sum_1^4{}^i a_{ikh}\, \xi_i = 0 \quad (k = 1\,.\,.\,4;\ h = 1,\,.\,.\,n - 4)$$

genügt, indem ξ den gemeinsamen Schnittpunkt der Leitgeraden der Complexe (28) bezeichnet; also gestattet das Pfaff'sche System (25) die infinitesimale Transformation[1])

$$Xf \equiv \xi_1 A_1 f + \,.\,.\, + \xi_4 A_4 f,$$

und wird, indem man die $n - 1$ Integrale der Gleichung

$$(35) \qquad \xi_1 A_1 f + \,.\,.\, + \xi_4 A_4 f = 0$$

als neue Variable einführt, auf ein $n - 4$-gliedriges Pfaff'sches System in $n - 1$ Variabeln reducirt, für das also m den Wert 3 hat. Da die Anzahl unabhängiger bilinearer Covarianten durch die Transformation sich nicht ändert,[1]) so erhalten wir in der That den Fall der Nr. 11.

Ist 2 der Rang von (27) und $\varkappa = 3$, sind also 3 und nicht mehr linear unabhängige Complexe in der Schaar (28) vorhanden, so besteht letztere aus ∞^2 speziellen Complexen, deren Leitgeraden entweder durch einen Punkt $\xi_1 \,.\,.\, \xi_4$ gehen, oder eine Ebene (30) erfüllen, je nachdem die Gleichungen (34) eine Lösung besitzen oder nicht. Im letzteren Falle ergeben sich für die Möglichkeit einer Darstellung (26) ganz analoge

---

[1]) S. meine Arbeit, Leipziger Berichte 1898, p. 209.

Bedingungen wie soeben; im ersteren Falle ist eine Darstellung (26) überhaupt nicht möglich.

Da nun unter der Annahme, dass 2 der Rang der Matrix (27) sei, in der Schaar (28) mehr als drei linear unabhängige Complexe nicht enthalten sein können, so sind die Probleme A und B für den Fall $m = 4$, $\nu = 3$ völlig erledigt.

14. Wir wenden uns zu dem Problem B unter der Annahme $m = 4$, $\nu = 2$; der Rang der Matrix (27) werde mit 2σ bezeichnet.

1) $2\sigma = 4$, $\varkappa = 1$. Nach meiner oben citirten Abhandlung kann das Pfaff'sche System (25) auf unbegrenzt viele Arten in der Form

$$df_1 = F\,df + \Phi\,d\varphi;\ df_2 = 0, \ldots df_{n-4} = 0$$

geschrieben werden, worin die n Funktionen

$$f, \varphi, f_1, f_2, \ldots f_{n-4}, F, \Phi$$

unabhängig sind; durch jede Integral-M_1 gibt es unbegrenzt viele Integral-M_2.

2) $2\sigma = 4$, $\varkappa = 2$. Die Schaar (28) enthält nur zwei (im allgemeinen verschiedene) spezielle Complexe. Durch jeden Punkt ξ, der nicht auf einer Leitgeraden eines der speziellen Complexe liegt, geht eine einzige, den Complexen (28) gemeinsame Gerade, so dass die Bedingungen der Nr. 9 erfüllt sind. Ferner hat das System S_2 hier die Form:

$$\frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_r} = \sum_1^4{}^i a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \quad (h = 1, \ldots n-4;\ r = 1, 2) \tag{36}$$

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k a_{ikh} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = 0 \quad (h = 1, \ldots n-4), \tag{37}$$

(wobei man von den Relationen (37) nur die zwei ersten beizubehalten braucht), und kann nach den Grössen

$$\frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_4}{\partial u_2}, \frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_1}, \frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_2} \quad (h = 1 \ldots n-4)$$

aufgelöst werden; diese Auflösung ist canonisch, und offenbar passiv, da die zwei Werte, die sich für jede der Ableitungen $\frac{\partial^2 x_{4+h}}{\partial u_1 \partial u_2}$ durch Derivation von (36) ergeben, vermöge (37) identisch ausfallen. Dementsprechend geht durch jede Integralcurve des Pfaff'schen Systemes (25) mindestens eine, und, wie man leicht erkennt, auch nur eine Integral-M_2 hindurch. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die gegebene Integral-M_1, die wir durch Gleichungen der Form

$$x_i = \psi_i(u_1) \quad (i = 1 \,..\, n)$$

definirt denken, ausser den Relationen

$$\frac{\partial x_{4+h}}{\partial u_1} = \sum_1^4{}^i \, a_{ih} \frac{\partial x_i}{\partial u_1}$$

auch noch das eine oder das andere der Gleichungspaare:

$$\sum_1^4{}^k \, \omega_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = 0; \quad \sum_1^4{}^k \, \bar{\omega}_{ik} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

erfüllt, wobei die beiden Relationenpaare

$$\sum{}^k \, \omega_{ik} \, \xi_k = 0, \quad \sum \bar{\omega}_{ik} \, \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2)$$

bezw. die Direktricen der in der Schaar (28) enthaltenen zwei speziellen Complexe definiren sollen. Eine solche Integral-M_1 heisse eine „Charakteristik“; sie ist auf unbegrenzt vielen zweifach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten des Pfaff'schen Systems (25) enthalten. Umgekehrt enthält jede Integral-M_2 je einfach unendlich viele Charakteristiken eines jeden der beiden Systeme.

Wie man sieht, ergibt sich hier eine Theorie, die den bekannten Sätzen über partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung mit zwei Independenten ganz analog ist, und auch wirklich nicht nur die zuletzt genannte Theorie, sondern auch diejenige der sog. Darboux'schen Systeme zweiter Klasse als Spezialfälle in sich schliesst. Indem wir wegen weiterer Einzel-

heiten teils auf eine frühere Abhandlung,[1]) teils auf eine an anderer Stelle zu gebende ausführliche Darlegung verweisen müssen, erwähnen wir hier nur noch, dass jedes $n - m$-gliedrige Pfaff'sche System in n Variabeln, dessen bilineare Covarianten sich auf genau $m - 2$ linear unabhängige reduciren, zu einer analogen Theorie Anlass gibt, indem es im Allgemeinen eine und nur eine Integral-M_2 besitzt, die eine gegebene Integral-M_1 enthält.

Ist $2\sigma = 4$, so kann, falls die Bedingungen der Nr. 9 für $\nu = 2$ erfüllt sein sollen, $\varkappa$ nicht > 2 sein, da sonst nicht durch jeden Punkt des R_3 eine den Complexen (28) gemeinsame Gerade hindurchgehen könnte.

3) Es sei $2\sigma = 2$; dann ist $\varkappa \leq 3$.

Ist $\varkappa = 1$, so kann die Zahl ν der Nr. 8 gleich 3 genommen werden.

Ist $\varkappa = 2$, so kann das Differentialsystem (36) (37), genau wie beim vorhergehenden Fall, ohne weiteres die canonische passive Form erhalten, und man schliesst, dass durch jede Integral-M_1 des Pfaff'schen Systems (25) im allgemeinen e i n e und nur eine Integral-M_2 geht. Diese Integralmannigfaltigkeit wird aber nunmehr durch Integration eines simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden. In der That reducirt sich das Pfaff'sche System (25) unter der gemachten Annahme durch Einführung der Integrale der in Nr. 13 betrachteten Gleichung (35) als neuer Variabler auf ein System mit $n - 1$ Variabeln, oder etwas anders ausgedrückt, die durch eine gegebene Integral-M_1 gehende Integral-M_2 wird erzeugt von den ∞^1 charakteristischen Curven der Gleichung (35), die bezw. von den ∞^1 Punkten der M_1 ausgehen.

Soll endlich im Falle $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ durch jeden Punkt des R_3 eine gemeinsame Gerade der ∞^2 speziellen Complexe (28) gehen, so müssen die Leitgeraden der letzteren einen Punkt

---

[1]) „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen", Sitzungsber. der math.-phys. Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. XXV, p. 423 (1895).

$\xi_1 .. \xi_4$, also die Gleichungen (34) auch jetzt wieder ein Lösungensystem gemein haben. Dann aber geht durch jede Integral-M_1 eine Integral-M_2, die genau wie vorhin von den charakteristischen Curven der partiellen Differentialgleichung (35) erzeugt wird.

Wir können die Ergebnisse dieser Nr. so zusammenfassen: Damit durch jede Integral-M_1 des Pfaff'schen Systems (25) eine Integral-M_2 hindurchgehe, ist notwendig und hinreichend, dass entweder in der Matrix (29) alle dreireihigen Determinanten identisch verschwinden, oder dass die Gleichungen (34) ein Lösungensystem besitzen.

15. Indem wir nun dazu übergehen, für die noch übrigen Fälle, die sich unter der Annahme $\nu = 2$, $m = 4$ darbieten, das Problem A, d. h. die Möglichkeit einer Darstellung

$$(38) \qquad d f_{4+h} = F_h \, d f + \Phi_h \, d \varphi \quad (h = 1, 2, .. n - 4)$$

des Pfaff'schen Systems (25) zu erörtern, betrachten wir zunächst

1) den Fall $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ unter der Annahme, dass die Leitgeraden der ∞^2 speziellen Complexe der Schaar (28) nicht durch einen Punkt gehen, sondern in einer Ebene liegen, die im $R_3 (\xi_1 .. \xi_4)$ durch die Gleichung

$$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$

definirt werde. Dann sind die Relationen (37) mit den folgenden

$$\sum w_i \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = 0, \; \sum w_i \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = 0$$

algebraisch äquivalent, d. h. jede Integral-M_2 des Pfaff'schen Systems (25) erfüllt auch die Pfaff'sche Gleichung

$$(39) \qquad w_1 \, d x_1 + .. + w_4 \, d x_4 = 0.$$

Wenn wir von dem in Nr. 13 behandelten Fall absehen, dass das System (25) (39) unbeschränkt integrabel ist, und beachten, dass die bilinearen Gleichungen (33) vermöge der Relation (39) und der dazu congruenten identisch verschwinden, so erkennen wir in den Gleichungen (25) (39) ein $n - 3$-gliedriges

Pfaff'sches System mit n Variabeln, dessen bilineare Covarianten sich auf eine einzige

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k \beta_{ik}\, d x_i\, \delta x_k = 0 \quad (\beta_{ik} = A_i w_k - A_k w_i)$$

reduciren. In Nr. 10 wurde gezeigt, dass dieses System, und mithin auch das gegebene Pfaff'sche System (25) sich in unbegrenzt vielen Weisen auf eine Form mit $n-2$ Differentialelementen reduciren lässt. Diese Reduction verlangt die Integration einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die offenbar in der Gestalt:

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} 0, & \beta_{12}, & \beta_{13}, & \beta_{14}, & w_1, & A_1 f \\ \beta_{21}, & 0, & \beta_{23}, & \beta_{24}, & w_2, & A_2 f \\ \beta_{31}, & \beta_{32}, & 0 & \beta_{34}, & w_3, & A_3 f \\ \beta_{41}, & \beta_{42}, & \beta_{43}, & 0, & w_4, & A_4 f \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & 0 & 0 \\ A_1 f, & A_2 f, & A_3 f, & A_4 f, & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann; durch jede Integral-M_1 des Pfaffschen Systems (25) (39) geht eine und nur eine, von den Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (40) erzeugte Integral-M_2 hindurch.

2) Es sei $2\sigma = 4$, $\varkappa = 3$, und es werde ferner angenommen, dass die Leitgeraden der in der Schaar (28) vorhandenen ∞^1 speziellen Complexe eine allgemeine Regelschaar 2. Grads bilden. Die Leitschaar der letzteren besteht dann aus allen den Complexen (28) gemeinsamen Geraden, und möge durch die beiden Gleichungen:

$$(41) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^4 \mu_i \xi_i + \varrho \left(\sum_1^4 \nu_i \xi_i \right) = 0; \\ &\sum_1^4 \bar{\mu}_i \xi_i + \varrho \left(\sum_1^4 \bar{\nu}_i \xi_i \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

dargestellt werden, wo ϱ einen Parameter bedeutet. **Es ist** leicht, die μ, ν, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ als Funktionen der a_{ik}, **auszudrücken,**

doch ist die explicite Aufstellung der betreffenden Formeln für unsere Zwecke nicht nötig. Das allgemeinste Relationenpaar in $dx_1 \dots dx_4$, das mit dem congruenten zusammen alle bilinearen Gleichungen (33) identisch erfüllt, hat darnach die Form:

$$(42) \qquad \begin{cases} \sum \mu_i\, dx_i + \varrho\,(\sum \nu_i\, dx_i) = 0\,; \\ \sum \bar{\mu}_i\, dx_i + \varrho\,(\sum \bar{\nu}_i\, dx_i) = 0\,, \end{cases}$$

worin ϱ eine arbiträre Funktion der x bedeutet; diese ist jetzt so zu bestimmen, dass das n — 2-gliedrige Pfaff'sche System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird. Zu diesem Zweck betrachten wir die Gleichungen (25) (42) als ein Pfaff'sches System in $n+1$ Variabeln $\varrho, x_1 \dots x_n$. Die bilinearen Covarianten desselben reduciren sich auf die beiden folgenden:

$$\sum \sum (\mu_{ik} + \varrho\,\nu_{ik})\, dx_i\, \delta x_k + \sum \nu_i\,(d\varrho\, \delta x_i - \delta\varrho\, dx_i) = 0,$$

$$\sum \sum (\bar{\mu}_{ik} + \varrho\,\bar{\nu}_{ik})\, dx_i\, \delta x_k + \sum \bar{\nu}_i\,(d\varrho\, \delta x_i - \delta\varrho\, dx_i) = 0,$$

worin zur Abkürzung

$$A_i\, \mu_k - A_k\, \mu_i \equiv \mu_{ik} \text{ u. s. w.}$$

gesetzt wurde. Von diesen zwei Gleichungen ist keine eine Folge der andern; denn sonst wäre die Relation $\sum \nu_i\, \xi_i = 0$ eine Folge von $\sum \bar{\nu}_i\, \xi_i = 0$ und von (41), d. h. die Regelschaar (41) wäre ein Kegel oder ein ebenes Büschel.

Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, an, dass die Gleichungen (42), solange ϱ beliebig, nach dx_3, dx_4 auflösbar seien, so können wir das Pfaff'sche System (25) (42) in der Form schreiben:

$$(43) \qquad dx_{2+h} = b_{1h}\, dx_1 + b_{2h}\, dx_2 \quad (h = 1, \dots n-2),$$

wo die b_{ih} rationale Funktionen von ϱ bedeuten.

Setzen wir:

$$B_0 f \equiv \frac{\partial f}{\partial \varrho}; \quad B_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-2} {}^h\, b_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{2+h}} \quad (i = 1, 2);$$

$$b_{0h} \equiv 0; \quad B_i\, b_{kh} - B_k\, b_{ih} \equiv b_{ikh} \quad (i, k = 0, 1, 2),$$

so verschwinden nach dem eben gesagten in der Matrix

$$\begin{Vmatrix} b_{011} & b_{121} & b_{201} \\ b_{012} & b_{122} & b_{202} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

alle dreireihigen, aber nicht alle zweireihigen Determinanten identisch.

Um auf das Pfaff'sche System (43) die Methode der Nr. 11 anzuwenden, suchen wir zwei Funktionen v_1, v_2 der Variabeln x_i, ϱ so zu bestimmen, dass die Relation

$$(44) \qquad d\varrho = v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2$$

mit (43) zusammen ein unbeschränkt integrables System liefert. Nach Nr. 11 müssen die v den Gleichungen

$$(45) \qquad v_1\, b_{20h} + v_2\, b_{01h} = b_{12h} \quad (h = 1 \,.\,.\, n-2)$$

genügen, und sind hierdurch offenbar als rationale Funktionen von ϱ eindeutig bestimmt. Ferner muss man haben:

$$(B_1 f + v_1 B_0 f,\ B_2 f + v_2 B_0 f) \equiv 0,$$

oder also:

$$(46) \qquad (B_1 B_2) + v_2 (B_1 B_0) + v_1 (B_0 B_2) + \\ + B_0 f (B_1 v_2 - B_2 v_1 + v_1 B_0 v_2 - v_2 B_0 v_1) \equiv 0;$$

da aber die drei ersten Terme wegen (45) eine identisch verschwindende Summe haben, so folgt:

$$(47) \qquad B_1 v_2 - B_2 v_1 + v_1 B_0 v_2 - v_2 B_0 v_1 \equiv 0.$$

Es ist dies eine algebraische Gleichung in ϱ; ist sie für jedes beliebige ϱ erfüllt, dann und nur dann ist das Pfaff'sche System (43) (44) unbeschränkt integrabel. Bedeuten $f_1, f_2, \,.\,.\, f_{n-1}$ seine Integrale, so erhält man für das gegebene Pfaff'sche System (25) zunächst eine Darstellung der Form

$$(48) \qquad F_{1h}\, df_1 + \,.\,.\, + F_{n-1,h}\, df_{n-1} = 0 \quad (h = 1, \,.\,.\, n-4),$$

wo die F, f Funktionen von ϱ, $x_1 \,.\,.\, x_n$ bedeuten, und das Zeichen d sich auf diese $n+1$ Variabeln bezieht. Da aber

das unbeschränkt integrable System (43) (44) nach $d\varrho$ aufgelöst ist, so kann eine der Gleichungen $f_i = c$, etwa

$$f_{n-1}(\varrho, x_1 \,.\,.\, x_n) = c$$

(wo c eine arbiträre Constante bedeutet), nach ϱ aufgelöst werden. Substituirt man diesen Wert von ϱ in (48), so erhält man für das Pfaff'sche System (25) eine Form mit $n-2$ Differentialelementen, und es gibt, wie man sieht, einfach unendlich viele Darstellungen dieser Art.

Ist die Bedingung (47) nicht für jedes ϱ erfüllt, so kann die Grösse ϱ höchstens auf eine endliche Zahl von Arten als Funktion von $x_1, \,.\,.\, x_n$ so bestimmt werden, dass das Pfaff'sche System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird. In der That, damit die Funktion ϱ das genannte System unbeschränkt integrabel mache, ist notwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$B_1 b_{2h} - B_2 b_{1h} + B_0 b_{2h} \cdot B_1 \varrho - B_0 b_{1h} \cdot B_2 \varrho \equiv 0,$$

dass also ϱ den beiden nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen

$$B_1 \varrho = v_1, \quad B_2 \varrho = v_2 \tag{49}$$

genüge. Setzt man nun

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_i} = p_i; \quad B_1 \varrho - v_1 \equiv F; \quad B_2 \varrho - v_2 \equiv \Phi,$$

so muss die Funktion ϱ auch die folgende Identität befriedigen:

$$0 \equiv [F\,\Phi] \equiv \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right).$$

Diese Gleichung aber reducirt sich, wenn man die Relationen (49) berücksichtigt, auf eine in den p_i lineare Relation, die aus (46) dadurch entsteht, dass man darin $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ durch p_i und $B_0 f$ durch -1 ersetzt, m. a. W. auf die algebraische Gleichung (47).

Für jede einzelne Wurzel ϱ dieser Gleichung hat man jetzt zu prüfen, ob das System (25) (42) unbeschränkt integrabel wird; dabei kann indes auch noch die Annahme $\varrho = \infty$ in Betracht kommen, d. h. es können die Gleichungen

$$\sum \nu_i\, dx_i = 0\,, \quad \sum \bar{\nu}_i\, dx_i = 0$$

mit (25) zusammen ein unbeschränkt integrables System bilden, also zu einer Darstellung (38) Anlass geben.

3) Wir betrachten den Fall $2\,\sigma = 4$, $\varkappa = 3$ unter der Annahme, dass für die in $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ homogene quadratische Form, deren Quadrat mit der vierreihigen alternirenden Determinante (27) identisch ist, die Diskriminante identisch verschwindet, dass also die ∞^1 Geraden, die allen Complexen der Schaar (28) gemeinsam sind, in zwei ebene Büschel zerfallen. Ist das eine dieser Büschel durch das Gleichungspaar:

$$(50) \qquad \sum_1^4{}^i \mu_i\, \xi_i + \varrho \sum_1^4{}^i \nu_i\, \xi_i = 0\,, \quad \sum_1^4{}^i \bar{\mu}_i\, \xi_i = 0$$

definirt, so hat das allgemeinste Relationenpaar in $dx_1 \,..\, dx_4$, das mit dem congruenten zusammen alle bilinearen Gleichungen (33) erfüllt, die Gestalt:

$$(51) \qquad \sum \mu_i\, dx_i + \varrho \sum \nu_i\, dx_i = 0\,, \quad \sum \bar{\mu}_i\, dx_i = 0\,,$$

oder die analoge, aus dem Gleichungspaar des zweiten Büschels zu bildende Form. Damit dann eine Funktion ϱ der Variabeln $x_1 \,..\, x_n$ das $n-2$-gliedrige Pfaff'sche System (25) (51) unbeschränkt integrabel mache, ist notwendig und hinreichend, dass die beiden folgenden Identitäten stattfinden:

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{\mu}_{12} & \bar{\mu}_{13} & \bar{\mu}_{14}, & \mu_1 + \varrho\,\nu_1, & \bar{\mu}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{\mu}_{41} & \bar{\mu}_{42} & \bar{\mu}_{43} & 0 & \mu_4 + \varrho\,\nu_4, & \bar{\mu}_4 \\ \mu_1 + \varrho\,\nu_1 & \cdot & & \cdot & 0 & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 & \bar{\mu}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

$$(52) \qquad \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \mu_1 + \varrho\nu_1, & \bar{\mu}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0, & \mu_4 + \varrho\nu_4, & \bar{\mu}_4 \\ \mu_1 + \varrho\nu_1 & \cdot & \cdot & & 0 & 0 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 & \bar{\mu}_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

worin gesetzt ist:

$$A_{ik} \equiv \mu_{ik} + \varrho\,\nu_{ik} + \nu_k A_i \varrho - \nu_i A_k \varrho,$$

und die μ_{ik} u. s. w. die auf pag. 293 angegebene Bedeutung haben.

Die erste dieser Identitäten hat die Form

$$(53) \qquad A\varrho + B \equiv 0$$

wo A, B Funktionen von $x_1 \dots x_n$ bedeuten. Ist $A \equiv 0$, $B \equiv 0$, so liefert (52) für ϱ eine nichthomogene lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, und jedes Integral derselben macht das Pfaff'sche System (25) (51) unbeschränkt integrabel; es gibt für das gegebene Pfaff'sche System (25) unbegrenzt viele Formen mit $n - 2$ Differentialelementen. Ist $A \not\equiv 0$, so hat man zu prüfen, ob die durch (53) definirte Funktion ϱ die Relation (52) erfüllt; ist dies der Fall, so erhält man für das Pfaff'sche System (25) eine Form mit $n - 2$ Termen. Schliesslich hat man, wenn $A \equiv 0$, $B \not\equiv 0$, noch zu untersuchen, ob nicht etwa die Gleichungen

$$\sum \nu_i\, dx_i = 0, \quad \sum \bar{\nu}_i\, dx_i = 0$$

mit (25) zusammen ein unbeschränkt integrables System liefern.

Dieselben Untersuchungen sind natürlich auch für die Definitionsgleichungen des andern der beiden Geradenbüschel durchzuführen.

4) Ist $2\sigma = 4$, $\varkappa = 4$, so können die Complexe der Schaar (28) ein Geradenbüschel (50) gemein haben, dann ist die weitere Diskussion dieselbe wie vorhin; oder sie haben zwei Gerade gemein, d. h. es gibt nur zwei verschiedene (oder coincidirende) Relationenpaare

$$\Sigma \mu_i \, dx_i = 0, \quad \Sigma \bar{\mu}_i \, dx_i = 0 \tag{54}$$

die mit den kongruenten zusammen den bilinearen Gleichungen (33) genügen, also für das gegebene Pfaff'sche System (25) höchstens zwei verschiedene Formen mit $n - 2$ Differentialelementen. Ebenso erkennt man, dass im Falle $\varkappa = 5$ höchstens eine solche Darstellung, im Falle $\varkappa = 6$ aber überhaupt keine existirt.

Durch die vorstehenden Betrachtungen sind die Probleme A und B für $m = 3$ und $m = 4$ vollständig erledigt. Zugleich erkennt man, dass für diese Werte von m die in Rede stehenden Reduktionen stets auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückkommen, mit einziger Ausnahme des Falles Nr. 14, 2).

Die Behandlung der Fälle $m > 4$ erfordert ein genaueres Eingehen auf die Theorie der linearen Complexe in höheren Räumen, d. h. der Schaaren von alternierenden Bilinearformen mit mehr als vier Variabelnpaaren. Ich gedenke meine auf die Fälle $m = 5$ und $m = 6$ bezüglichen Untersuchungen demnächst an anderer Stelle ausführlich darzulegen.

Nachschrift.

Nach Ablieferung dieser Arbeit erhielt ich durch gütige Vermittelung der Herrn A. Mayer und F. Engel Kenntnis von einer Abhandlung des Herrn J. K. Russjan: „Sistema urawnenij Pfaff'a" (Odessa 1899). Herr Russjan versucht darin, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, dass ein Pfaff'sches System (1) sich auf die Form (2) bringen lasse; doch sind die Resultate seiner Untersuchung unrichtig. In unserer Bezeichnungsweise lauten die Russjan'schen Bedingungen so: Es müssen in der Matrix $\| \sum^s a_{iks} \lambda_s \|$ alle $2\varrho + 2$-reihigen[1]) Hauptunterdeterminanten identisch verschwinden, und das System linearer homogener partieller Differentialgleichungen I. Ordnung, das erhalten wird, wenn man ausdrückt, dass die Matrix:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \sum^s a_{12s}\lambda_s & \cdot\cdot & \sum^s a_{1ms}\lambda_s, & A_1 f \\ \sum^s a_{21s}\lambda_s & 0 & \cdot\cdot & \sum^s a_{2ms}\lambda_s, & A_2 f \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \sum^s a_{m1s}\lambda_s, & \sum^s a_{m2s}\lambda_s & \cdot\cdot & 0, & A_m f \\ A_1 f, & A_2 f, & \cdot\cdot & A_m f, & 0 \end{array} \right\|$$

höchstens den Rang 2ϱ besitzt, muss ϱ unabhängige Integrale $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ zulassen.

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen leuchtet nach Nr. 2 unserer Arbeit unmittelbar ein; Herr Russjan glaubt aber, dass sie auch hinreichen, und dies ist keineswegs der Fall. In der That, wären die genannten Bedingungen hinreichend, so müsste man (wie es auch Herr Russjan thut, l. c. p. 109 ff.), folgern, dass bei geradem m jedes $n - m$-

---

[1]) $\varrho = \tau - n + m$.

gliedrige Pfaff'sche System in m Variabeln auf eine Form mit $n - \frac{1}{2} m$ Differentialelementen reducirt werden kann, da ja in diesem Fall $\varrho = \frac{1}{2} m$, mithin das obige Schema, als alternirende Matrix der ungeraden Ordnung $m + 1$, für jedes beliebige f einen Rang $\leq 2 \varrho$ besitzt. Also müsste z. B. jedes $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System in n Variabeln auf $n - 2$ Differentialelemente reducirt werden können, was nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit nicht der Fall ist, schon deswegen nicht, weil mehr als vier lineare Complexe des R_3 im allgemeinen keine Gerade gemein haben.

Damit werden aber auch alle übrigen Schlüsse der Russjanschen Arbeit, soweit sie sich auf Systeme Pfaff'scher Gleichungen beziehen, illusorisch.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 141. Stiftungstages

am 28. März 1900.

Die Sitzung eröffnet der Präsident der Akademie, Geheimrat Dr. K. A. v. Zittel, mit folgender Ansprache:

Wir feiern heute den 141. Stiftungstag der k. bayer. Akademie der Wissenschaften. War es mir vergönnt in der letzten Festsitzung einen Rückblick auf die Gründung und Entwicklung unserer gelehrten Gesellschaft im vergangenen Jahrhundert zu werfen und zu zeigen, in welch hervorragendem Mass ihr Blühen durch die Fürsorge und das Wohlwollen unserer allerhöchsten Protektoren aus dem Hause Wittelsbach gefördert wurde, so möchte ich heute, einer Gepflogenheit meines hochverehrten Vorgängers folgend, die Aufmerksamkeit der hohen Festversammlung auf den gegenwärtigen Zustand und die Thätigkeit der Akademie und des damit verbundenen Generalkonservatoriums der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates lenken.

Die Akademie konnte im vergangenen Jahr ungestört ihre wissenschaftliche Thätigkeit fortsetzen. Die in den monatlichen Klassensitzungen vorgelegten Mitteilungen, welche grösstenteils von Mitgliedern der Akademie, teilweise aber auch von ausserhalb unserer Korporation stehenden Forschern herrühren, füllen je 2 Bände unserer Sitzungsberichte und Denkschriften und legen Zeugnis ab von der fleissigen und mannigfaltigen Arbeit, die im Jahre 1899 geleistet wurde.

—

Auch die historische Kommission hat im verflossenen Jahr mit dem 45. Band die allgemeine deutsche Biographie zum Abschluss gebracht und bereits mit einem neuen Band die Publikation der Nachträge begonnen. Von der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland ist ein Band, Die Geschichte der Geologie und Paläontologie von K. v. Zittel, erschienen, und damit geht auch dieses grosse Unternehmen seiner baldigen Vollendung entgegen. Von den Städtechroniken wurde der 27. Band, Die Chronik von Magdeburg von Professor Hertel, von den Deutschen Reichstags-Akten der XI. Band durch Herrn G. Beckmann und von den Monumenta Boica der 44. Band durch Herrn Reichsarchivdirector v. Oefele veröffentlicht. Mit dem 45. Band wird unter der Redaktion unseres Mitgliedes des Herrn Archivrat Baumann eine neue Serie dieser wichtigen Publikationen beginnen.

Im Laufe des Jahres 1899 fand eine Neuorganisation des Thesaurus linguae Latinae statt. Nach der Sammlung des Materiales, welche 5 Jahre in Anspruch nahm, beginnt nunmehr die Ausarbeitung unter dem neu aufgestellten verantwortlichen Generalredaktor Dr. Fr. Vollmer mit einem Sekretär und neun Assistenten. Der erste Halbband des Lexikons, das die ganze Geschichte eines jeden Wortes enthalten soll, wird noch im Laufe dieses Jahres erscheinen. Herr Geheimrat v. Wölfflin, der schon früher seinen für zehn Jahre festgesetzten Gehalt als Mitglied des Direktoriums zur Gründung eines Reservefonds schenkte, hat nunmehr seine Stiftung auf rund 15000 M. erhöht.

Die Kommission für Erforschung der Urgeschichte Bayerns konnte mit einer Summe von mehr als 4000 M. die meist ergebnisreichen Ausgrabungen der historischen Vereine von Niederbayern, Oberpfalz, Schwaben und Neuburg, der Pfalz, in Eichstätt und Dillingen wirksam fördern. Von Privatpersonen, welche Unterstützungen aus diesen Fonds erhielten, seien hervorgehoben Generalmajor a. D. Karl Popp zur Ausdehnung seiner Untersuchung der römischen Strassen auf die Rheinpfalz, Hauptmann a. D. v. Haxthausen für Untersuchungen prähistorischer Denkmale Unterfrankens, Dr. Max Schlosser,

Kustos an der geologischen Sammlung des Staates für Höhlenuntersuchungen bei Velburg und Pfarrer Dr. Georg Wilke in Hellmitzheim.

Aus der Etatsposition für naturwissenschaftliche Erforschung des Königreichs wurden wie in den Vorjahren eine beträchtliche Anzahl wissenschaftlicher Untersuchungen in Bayern und den angrenzenden Gebieten unterstützt und dadurch gleichzeitig die mineralogischen, geologischen, paläontologischen und prähistorischen Sammlungen des Staates nicht unerheblich bereichert. Nach Abschluss der Bodenseekarte und der damit zusammenhängenden topographischen, physikalischen und zoologischen Spezialarbeiten wurde auf Antrag des Herrn Kollegen Hertwig eine eingehende Untersuchung des Rheins und seiner bayerischen Nebenflüsse auf den Gehalt an tierischen Organismen in Aussicht genommen und Herrn Dr. Lauterborn in Ludwigshafen für mehrere Jahre eine nicht unerhebliche Subvention zu diesem Behufe zur Verfügung gestellt.

Aus den Renten des Mannheimer-Fonds konnte dem Konservator der ethnographischen Sammlung ein Zuschuss von 2000 M. zur Anschaffung einer höchst wertvollen repräsentativen Gruppe von Benin-Bronzen und dem Konservator des botanischen Gartens ein Zuschuss von 3000 M. zu Erwerbungen während seiner auf eigene Kosten ausgeführten Reise nach Ceylon, Australien und Neu-Seeland gewährt werden. Herr Professor Göbel ist im vorigen Frühjahr glücklich zurückgekehrt und hat den botanischen Garten, das pflanzenphysiologische Institut und das Herbarium durch eine Fülle von mitgebrachten, höchst wertvollen Materialien bereichert. Dem botanischen Garten wurde eine Anzahl lebender Pflanzen und Sämereien aus Australien und Neuseeland überwiesen, darunter eine Sammlung von Baumfarne, wie sie kein anderer deutscher botanischer Garten in gleicher Fülle und Schönheit besitzt. Es ist dadurch die Möglichkeit gegeben, eines der bemerkenswertesten Vegetationsbilder der Erde in unserem Garten lebend vorzuführen. Ferner hat Herr Göbel Orchideen aus Ceylon und einige in biologischer Hinsicht besonders interessante, bisher

überhaupt nicht in Kultur befindliche Wasserpflanzen und Insektivoren eingeführt und durch Anbahnung von Verbindungen mit australischen und neuseeländ'schen Naturforschern und botanischen Gärten die weitere Bereicherung des hiesigen Gartens mit Pflanzen jener Gebiete gesichert. Auch für das pflanzenphysiologische Institut konnte Herr Göbel eine grosse und sehr wertvolle Sammlung teils getrockneter, teils in Alkohol konservierter Pflanzen erwerben, welche teils zu wissenschaftlichen Untersuchungen, teils zu Demonstrationszwecken bestimmt ist. Schliesslich bereicherte Herr Professor Göbel auch das Herbarium durch eine Sammlung von 306 Arten westaustralischer getrockneter Pflanzen, die grösstenteils durch Herrn Professor Helms gesammelt wurden. Der Gesammtwert der von Herrn Göbel mitgebrachten botanischen Schätze beläuft sich auf mindestens 8—9000 M. Dieses Ergebnis liefert den Beweis, wie wertvoll derartige mit Umsicht und Sachkenntnis ausgeführte Reisen für unsere Anstalten werden können.

Die Münchener Bürger- und Cramer-Klett-Stiftungen, welche wir unserem verehrten Alters-Präsidenten v. Pettenkofer verdanken, gewährten wieder die Möglichkeit eine Anzahl wissenschaftlicher Untersuchungen zu unterstützen. Herr Professor Lindemann hat im vorigen Frühjahr die italienischen Städte Mantua, Este, Reggio, Piacenza, Padua, Genua, Turin, Mailand und Brescia besucht und dort seine interessanten Nachforschungen über die Verbreitung altägyptischer Stein-Gewichte nicht unerheblich vervollständigt. Herr Privatdozent Dr. Weinschenk hat seine mineralogisch-petrographische Studienreise in die Piemonteser- und Dauphinéer-Alpen ausgeführt und Herr Privatdozent Dr. Maas verweilte von Oktober vorigen Jahres bis Anfang März in Cypern, um daselbst Studien über die Entwickelung und Organisation der Spongien zu machen.

Für das laufende Jahr wurden aus den Renten der Münchener-Bürger-Stiftung bewilligt: 1) 600 M. dem ausserordentlichen Professor Dr. Tafel in Würzburg zur Fortführung seiner Arbeiten über den Verlauf der Elektrolyse organischer Substanzen. 2) 1500 M. an Herrn Dr. Ernst Stromer Freiherr von

Reichenbach in München für vergleichend anatomische und paläontologische Untersuchungen über die Wirbelsäule der Raubtiere. 3) 600 M. an Herrn Professor Dr. Ebert in München zur Untersuchung periodischer Seespiegelschwankungen im bayerischen Alpengebiet. Aus den Renten der Cramer-Klett-Stiftung erhielten: 1) Herr Professor Dr. Thiele 300 M. für Untersuchungen über die Natur der Bindungen von doppelten Kohlenstoffverbindungen. 2) Herr Professor Dr. Göbel 1000 M. als Beitrag zur Errichtung eines alpinen Versuchsgartens auf dem Schachen, in welchem wissenschaftliche Untersuchungen über die Lebensbedingungen der Alpenpflanzen, sowie über deren Zusammenhang zwischen den Gestaltungsverhältnissen und den äusseren Faktoren angestellt werden sollen. 3) Herr Ludwig Bach, Privatdozent in Würzburg, 500 M. für Untersuchungen der zentralen Beziehungen des Nervus opticus, besonders beim Affen.

Es gereicht mir zur besonderen Befriedigung mitteilen zu dürfen, dass die Bürger-Stiftung durch eine hochherzige Schenkung des Herrn Fabrikanten Dr. Siegmund Riefler um 10000 M. vermehrt wurde und dass der Betrag von 1500 M., welcher sich als Ueberschuss bei einer Sammlung zur Herstellung einer goldenen Medaille für Se. Excellenz den Herrn Geheimrat v. Pettenkofer ergeben hatte, von dem Comité der Akademie übergeben und mit dessen Zustimmung der Bürger-Stiftung beigefügt wurde. Dieselbe hat damit den Betrag von 90000 M. erreicht.

Eine neue Stiftung „zur Förderung chemischer Forschungen“ verdankt die Akademie ihrem Mitgliede Herrn Professor Wilhelm Königs. Die Zinsen eines Kapitals von 5000 M. sollen alljährlich durch den Vorstand des chemischen Laboratoriums im Einvernehmen mit dem Präsidenten der Akademie und dem Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse zu obigem Zweck verwendet werden.

Die Renten der im Jahre 1898 der k. Akademie zugefallenen Thereianos-Stiftung gelangten im vorigen Jahre zum

erstenmal zur Verteilung. Es erhielten Herr Dr. Papadopulos Kerameus in St. Petersburg einen Preis von 1600 M. für zwei hervorragende Sammelwerke, Herr Professor Krumbacher 1500 M. zur Herausgabe eines reich illustrierten Bandes seiner byzantinischen Zeitschrift, Herr Professor Furtwängler 2900 M. zur Veröffentlichung eines gemeinschaftlich mit Herrn Reallehrer Reichhold herauszugebenden Werkes über griechische Vasenmalerei. Es wurden im vergangenen Jahr 27 Vasen aus den Museen von Florenz, Paris und London durch Herrn Reichhold in vollendeter Weise gezeichnet und dadurch eine Grundlage für das wichtige Unternehmen geschaffen. Die übrigen unterstützten wissenschaftlichen Arbeiten der Herren Helmreich, Bitterauf, Fritz und Bürchner haben noch keinen Abschluss gefunden.

Für das laufende Jahr wurden durch Doppel-Preise von je 1600 M. ausgezeichnet: Herr Prof. Dr. G. N. Chatzidakis in Athen für seine bahnbrechenden Forschungen über die Geschichte der griechischen Vulgärsprache und sein Werk „Einleitung in die neugriechische Grammatik“, 2) Herr Professor Dr. Martin Schanz in Würzburg für die kritische und exegetische Bearbeitung platonischer Schriften und die von ihm herausgegebenen und geleiteten Beiträge zur griechischen Syntax. Für Unterstützung wissenschaftlicher Unternehmungen wurden bewilligt 1500 M. an Herrn Professor Krumbacher für Herausgabe seiner byzantinischen Zeitschrift, 1000 M. an Herrn Professor Furtwängler für Fortsetzung seines Werkes über griechische Vasenmalerei, 600 M. an Herrn Boll, Sekretär an der k. Hof- und Staatsbibliothek für seine Studien zur Astronomie und Astrologie der Griechen, 450 M. an Herrn Heisenberg, Gymnasiallehrer in München, zur Vergleichung von Handschriften in Turin, Venedig, Mailand und Rom zum Behuf einer Untersuchung, event. Herausgabe der sogenannten Turiner-Kompilation und der Biographie des Mesarites und des byzantinischen Kaisers Joannes Dukas Batatzes.

Es ist eine hocherfreuliche Thatsache, dass die Bestrebungen unserer Akademie seit einer Reihe von Jahren nicht

allein durch ihre hohen Protektoren und die Fürsorge der k. Staats-Regierung gefördert werden, sondern dass ihnen auch in weitern Kreisen warme Sympathie geschenkt wird. In ganz besonderem Mass kommt dies den unter dem General-Konservatorium vereinigten wissenschaftlichen Sammlungen und Anstalten zu gute. Diese ursprünglich der k. Akademie direkt unterstellten Attribute haben im Laufe der Zeit in mannigfacher Weise ihren Charakter geändert. Einige, wie das chemische Laboratorium, das physiologische Institut und die anatomische Anstalt sind mehr und mehr Lehranstalten geworden und in engere Verbindung mit der Universität als mit der Akademie getreten. Auch an die meisten übrigen wissenschaftlichen Sammlungen und Anstalten sind Lehr-Institute angegliedert worden, in welchen alljährlich zahlreiche Studierende der hiesigen Universität ihre wissenschaftliche Ausbildung erhalten. Daneben sind sie allerdings auch Werkstätten für selbständige Forschungen geblieben und erfreuen sich als solche durch die Zahl und die Gediegenheit der aus ihnen hervorgehenden wissenschaftlichen Arbeiten eines Weltrufes.

Aus den Jahresberichten der einzelnen Konservatoren kann ich, aus Furcht die Geduld der hohen Festversammlung zu ermüden, nur das Wichtigste herausgreifen. Ich muss namentlich darauf verzichten, die wissenschaftliche Thätigkeit in den verschiedenen Instituten zu schildern und mich auf die Erwähnung von aussergewöhnlichen Erwerbungen oder wertvollen Geschenken beschränken.

In dieser Hinsicht kommen das chemische Laboratorium, das physiologische Institut, die Sternwarte und die Anatomie naturgemäss am wenigsten in Betracht, da ihre Sammlungen vorzugsweise dem Unterricht oder der wissenschaftlichen Forschung dienen. Immerhin sind aber auch hier einige bemerkenswerte Bereicherungen zu verzeichnen. So hat das chemische Laboratorium eine sehr umfangreiche Sammlung neuer Farbstoffe von der Farbenfabrik vormals Friedrich Bayer u. Cie. in Elberfeld, ferner verschiedene Farbstoffe, künstlichen Indigo, Zwischenprodukte u. A. von der badischen Anilin- und Soda-

fabrik in Ludwigshafen, von der Anilinfabrik K. Oehler in Offenbach a. M. und von dem Farbwerk vormals Meister, Lucius und Brüning in Höchst a. M. zum Geschenk erhalten.

Das physiologische Institut hat seine Sammlung durch Erwerbung von mehreren grösseren Apparaten (Calorimeter nach Rubner, Federmyographion nach Blix, Projektions-Apparat) bereichert und die anatomische Anstalt ihre umfangreiche und viel besuchte Sammlung durch eine grosse Anzahl meist vom Personal selbst hergestellter, zum kleineren Teil gekaufter Präparate und Wandtafeln vergrössert. Das kostbarste Objekt, welches der anatomischen Sammlung im verflossenen Jahre einverleibt wurde, ist ein unter steter Aufsicht von einem Bildhauer in Holz geschnitztes, durchaus naturgetreues, zerlegbares Modell des menschlichen Schädels in fünffacher Vergrösserung.

Auf der Sternwarte wurden die Beobachtungen des Zenith-Sternkatalogs vollendet und mit dem grossen Refraktor zahlreiche Photographien hergestellt; auch die erdmagnetischen Beobachtungen wurden regelmässig fortgesetzt, doch machten sich bei diesen seit Anfang Dezember gewisse Störungen geltend, die offenbar durch den elektrischen Betrieb der Trambahn veranlasst sind. Die Kommission für internationale Erdmessung führte unter spezieller Leitung des Herrn General v. Orff durch Herrn Observator Anding Schweremessungen in Wien, München, Hohenpeissenberg, Berchtesgaden, Rosenheim und Traunstein und Breitenbestimmungen in Lichtenfels und Oettingen aus.

Das ethnographische Museum hat abgesehen von der bereits erwähnten Erwerbung von Benin-Altertümern durch I. K. Hoheit Prinzessin Therese zwei Mumien aus Peru und von Sr. K. Hoheit dem Prinzen Rupprecht von Bayern ein Buddabild aus Oberbirma nebst zahlreichen Photographien zum Geschenk erhalten. Eine sehr umfangreiche Sammlung ethnographischer Gegenstände (287 Nummern) aus dem Lande der Tschuktschen wurde von dem Weltreisenden Eugen Wolf geschenkt und dem Donator dafür die goldene Denkmünze unserer Akademie verliehen.

Im Museum für Abgüsse klassischer Bildwerke konnte, soweit es die Ungunst der dortigen Raumverhältnisse zuliess, die Aufstellung durch nicht unerhebliche Veränderungen verbessert und einige wertvolle neue Erwerbungen eingeordnet werden. Dem Tyrannenmörder Aristogeiton, dem Faustkämpfer des Louvre und der Penelope des Museo Chiaramonti wurden die bisher getrennten Köpfe aufgepasst; der Skulpturenschmuck des von Professor Furtwängler rekonstruierten Altars des Neptun-Tempels des Domitius in Rom wurde zum erstenmal in der ursprünglichen Weise aneinandergefügt und aufgestellt und die Porträt-Sammlung durch mehrere Erwerbungen vermehrt.

Auch das Antiquarium erhielt im vergangenen Jahr einige auserlesene Stücke. Das Beste verdankt es der Vermögensadministration Sr. Majestät König Otto's und zwar einen altetrurischen Cippus mit Reliefdarstellungen auf den Seiten, einen attischen Grabstein mit Inschrift aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. und zwei schöne antike Mosaiken. Aus der im vorigen Mai in München abgehaltenen Auktion Margarites wurden 20 wertvolle Terrakotten und Bronzen erworben, darunter ein Terrakotterelief aus praxitelischer Zeit mit der Darstellung eines Mädchens mit Kanne und Opferschale in den Händen. Als Geschenk erhielt das Antiquarium von Herrn Dr. Bulle eine Anzahl Thonabdrücke aus Griechenland und einige Richtertäfelchen aus Athen von Herrn Dr. Fröhner in Paris.

Ueber die reichen Zuwendungen, welche der botanische Garten, das pflanzenphysiologische Institut und das botanische Museum durch Herrn Professor Göbel erhielten, habe ich bereits berichtet. Es bleibt mir nur noch übrig einiger anderer wertvoller Geschenke und Erwerbungen zu gedenken. Durch Professor Bruchmann in Gotha erhielt das pflanzenphysiologische Institut eine überaus interessante Demonstrations-Sammlung der bisher unbekannten Prothallien von Lycopodium-Arten, wofür dem Schenker die silberne Medaille unserer Akademie zuerkannt wurde. Herr General-Konsul v. Zimmerer in Desterro (Brasilien) schickte für den botani-

schen Garten eine Sammlung ungewöhnlich schöner brasilianischer Orchideen. Das botanische Museum erwarb durch Kauf über 2300 Pflanzenarten aus Costarica, Kamerun, Portorico und Mexico und erhielt als Geschenk durch Herrn Apotheker Loher in Manila 498 Pflanzen von den Philippinen, von Herrn Apotheker Merkl in München 145 Arten aus Turkmanien, von der Direktion des botanischen Gartens in Calcutta 150 Arten aus Ost-Indien, von der Direktion des botanischen Gartens in Berlin 199 Arten aus Kamerun, vom botanischen Universitäts-Museum in Wien 1200 Arten der Flora exsiccata Austro-Hungarica. Die Ordnung und Bestimmung des Herbariums wurde fortgesetzt und von Herrn Professor Dr. Radlkofer die grosse Monographie der Sapindaceen vollendet, welche in der von Martius begonnenen Flora Brasiliensis in Bälde erscheinen wird.

Von den im Wilhelmin'schen Gebäude vereinigten Sammlungen und Instituten hat das Münzkabinet von Sr. Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten einige wertvolle numismatische Werke, von Sr. K. Hoheit Prinz Rupprecht eine grössere Anzahl orientalischer Münzen, von Herrn Banquier Th. Wilmersdörffer, von Fräulein Bettina Ringseis, von Herrn Rektor Ackermann in Cassel und Geh. Kommerzienrat Vogel in Chemnitz verschiedene Münzen zum Geschenk erhalten. Von sonstigen Erwerbungen verdienen eine Goldmünze der Dynastie von Axum in Aethiopien, ein Tetradrachmon Antiochus IX. von Syrien, verschiedene seltene Münzen von Makedonien, Kreta und Aegypten, ein Goldgulden Philipp I. von der Pfalz und eine prachtvolle Porträtmedaille Friedrich des Weisen von der Pfalz besonders erwähnt zu werden.

Das seit mehreren Jahren verwaiste Konservatorium der mathematisch-physikalischen Sammlung, eines unserer ältesten Attribute, aus welchem die klassischen Arbeiten von Fraunhofer, Steinheil, Ohm und Seidel hervorgegangen sind, hat in der vorigen Finanzperiode durch die Initiative unseres Alterspräsidenten von Pettenkofer vom Landtag einen ausserordentlichen Zuschuss von 40000 M. erhalten zur Vervollständigung der von Herrn Professor Ernst Voit in uneigennützigster

Weise geordneten und inventarisierten historischen Sammlung der vornehmlich von bayerischen Gelehrten und Mechanikern herrührenden wissenschaftlichen, physikalischen Apparate. Es ist dadurch möglich geworden, die bisher im Besitze des Herrn Mechanikers Dietz befindliche berühmte Reichenbach'sche Teilmaschine zu erwerben und dadurch dem bayerischen Staat ein Werk von unvergänglichem Wert zu erhalten. Weitere Erwerbungen für diese Sammlung stehen in Aussicht, sobald über deren definitive Gestaltung eine Entscheidung getroffen sein wird.

Von den naturhistorischen Sammlungen hat die zoologische durch Herrn Dr. Sapper in Coban (Guatemala) eine höchst wertvolle Sammlung von zentralamerikanischen Schlangen zum Geschenk erhalten. Es befinden sich darunter grosse Seltenheiten. Ein ehemaliger Schüler unserer Hochschule, Herr Dr. Haberer, sandte aus Japan eine grössere Sammlung von Naturalien, darunter vortrefflich präparierte Vogelbälge. Herr Eugen Wolf schenkte Schädel, Skelette, Bälge und Häute aus Nord-Asien und Herr Professor Grassi in Neapel eine trefflich konservierte Serie von Aal-Larven. Unter den Neuanschaffungen sind ein schön ausgestopfter Elch, ein weiblicher Ovibos sowie umfangreiche Sammlungen von Myriapoden und Insekten und Schmetterlinge von Anatolien hervorzuheben. Die seit langer Zeit einer Revision bedürftigen Landschneckensammlung wurde durch einen Spezialisten ersten Ranges Herrn Prof. Dr. Böttger in Frankfurt geordnet und bestimmt.

Im paläontologischen Museum ist die von Herrn Kommerzienrat Stützel geschenkte Säugetiersammlung aus Samos nahezu fertig präpariert, bestimmt und teilweise auch, soweit es der Raum gestattete, in die Sammlung eingereiht. Durch eine erneute Sendung des Herrn Otto Günther, Direktor der Fleisch-Extrakt-Fabrik in Fray Bentos (Uruguay) wurde unsere Sammlung von fossilen Pampassäugetieren durch eine Anzahl höchst wertvoller Stücke (einen Schädel von Mastodon Humboldti, Skelett von Mylodon, Ueberreste von Glyptodon, Toxodon u. A.) wesentlich bereichert. Ein Teil der durch Herrn Kommerzienrat Anton Sedlmayr für das paläontologische Mu-

seum zusammengebrachten Mittel wurde zur Ausrüstung einer seit Oktober in Patagonien thätigen Expedition verwendet, über deren Ergebnisse ich im nächsten Jahr zu berichten hoffe. Herr Dr. Haberer, welcher sich die Auffindung der Fundstätten fossiler Säugetiere im Innern von China zur Aufgabe gestellt hat, befindet sich seit Anfang dieses Winters im Yang-tse Kiang-Gebiet und hat mit grosser Energie und Umsicht seine Nachforschungen begonnen. Eine in Shanghai und Hangkow aufgekaufte Sammlung fossiler Zähne, Kiefer und Knochen, welche er unserem Museum gesandt hat, enthält bereits erheblich mehr Arten, als bisher auf dem chinesischen Tertiär bekannt waren, so dass wir mit berechtigten Hoffnungen seinen weiteren Forschungen entgegensehen dürfen. Ein überaus kostbares Geschenk verdankt die paläontologische Staatssammlung Herrn Obermedizinalrat Dr. Egger. Dieser ausgezeichnete Kenner fossiler Foraminiferen hat in den Denkschriften der Akademie im vorigen Jahr eine durch 27 Tafeln illustrierte Monographie der in den bayerischen alpinen Kreidebildungen vorkommenden Foraminiferen und Ostracoden veröffentlicht. Die Originalien dieser mühevollen und schwierigen Untersuchungen, welche den Autor mehrere Jahre lang fast ausschliesslich beschäftigt hatten, wurden in 6 Kästchen geordnet dem paläontologischen Museum übergeben und bilden eine Bereicherung unserer Foraminiferen-Sammlung von unvergänglichem Wert.

Die geologische Staatssammlung hat sich im Hinblick auf ihre höchst bescheidenen Mittel darauf beschränkt, ihre alpine Sammlung durch systematische Aufsammlungen zu ergänzen.

Auch in der mineralogischen Sammlung sind keine grösseren Erwerbungen zu verzeichnen, wohl aber wurde sie durch eigene Aufsammlung der Beamten und des Herrn Dr. Weinschenk, sowie durch eine Reihe von Geschenken nicht unerheblich bereichert.

Die anthropologisch-prähistorische Sammlung endlich hat im Vorjahr wichtige Vermehrungen erhalten. Durch

Herrn v. Haxthausen sind die steinzeitlichen Funde aus dem Spessart ergänzt worden; auch die Funde aus dem grossen Ringwall von Manching, welche der La Tène-Zeit angehören, wurden in erwünschter Weise vervollständigt und durch den städtischen Ingenieur Herrn Brug dem Museum eine schöne Sammlung von in der Widenmayerstrasse in München gefundener Bronzen überwiesen. Herr Professor Dr. Selenka vervollständigte seine schon früher der Akademie geschenkte Sammlung von 240 Orang-Utang- und 70 Hylobates-Schädeln durch Ueberweisung einer grossen Anzahl weiterer Schädel von Hylobates und von 58 niederen Affen. Die kraniologische Sammlung wurde durch Herrn Eugen Wolf durch 6 Tschuktschen-Schädel und um 32 von Ihrer K. Hoheit Prinzessin Therese von Bayern gesammelte deformierte Schädel aus den Gräberfeldern von Ancon und Pachakamac bereichert. Diese letztgenannte Sammlung ist besonders wichtig, weil sie alle Stadien der Deformation in geschlossener Reihe vorführt, wodurch die Art und Weise dieser Verunstaltung in einer bisher kaum erreichten Vollständigkeit demonstriert wird.

Diese Uebersicht zeigt allenthalben eine rege wissenschaftliche Thätigkeit in unseren Instituten und teilweise eine sehr bedeutende Vermehrung unserer Museen. Leider macht sich aber der schon seit Jahren empfundene Raummangel nicht nur bei allen im Wilhelminum untergebrachten Sammlungen, sondern auch in fast unerträglicher Weise beim ethnographischen Museum und der Sammlung für klassische Bildwerke geltend.

Von Jahr zu Jahr tritt das Bedürfnis nach Raumvermehrung dringender in Vordergrund. Umfangreichere Erwerbungen können in den meisten Museen nur mit der grössten Mühe eingereiht werden und müssen teilweise in Kisten verpackt im Magazin verbleiben. Der Umbau des Wilhelmin'schen Gebäudes in den achtziger Jahren hat uns eine Reihe vortrefflich eingerichteter und geräumiger Lehr- und Arbeitsinstitute verschafft; die Sammlungen selbst haben dabei verhältnismässig

wenig gewonnen. So grosse Vorzüge das für ganz andere Zwecke errichtete Wilhelminum in baulicher Hinsicht besitzt, so eignet es sich doch nicht für ein naturhistorisches Museum. Eine systematische, den neueren Anforderungen entsprechende Anordnung und Aufstellung der verschiedenen Sammlungen ist darin nicht zu erreichen und damit entfällt der hohe erzieherische und belehrende Einfluss, den naturhistorische Museen auf die weitesten Kreise der Bevölkerung und namentlich auf die heranwachsende Jugend auszuüben vermögen. Wenn überdies die Sammlungen gerade in der Jahreszeit, wo sie am leichtesten besucht werden könnten, wegen der Unmöglichkeit die Räume zu heizen, geschlossen werden müssen, so sind dies Missstände, an deren Abstellung erntlich gedacht werden muss.

Diese und manche andere Erwägungen haben den General-Konservator und die Vorstandschaft der Akademie zu einer eingehenden Prüfung der Museumsfrage veranlasst. In einer im November abgehaltenen Besprechung, an welcher sich die Klassensekretäre der Akademie und sämtliche Sammlungs-Vorstände des Generalkonservatoriums beteiligten, kam man einstimmig zu der Ueberzeugung, dass den bestehenden Missständen vollständig nur durch einen Neubau auf einem von dem chemischen Laboratorium, dem botanischen Garten, den medizinischen Anstalten, der Universität und Staatsbibliothek nicht allzu entfernten Platz abgeholfen werden könne. Am geeignetsten, sowohl was Lage als Grösse betrifft, erschien uns das jetzt von der Türkenkaserne eingenommene Areal gegenüber der alten Pinakothek. Auf diesem könnten nicht nur die Bedürfnisse der naturhistorischen, sondern auch aller übrigen dem General-Konservatorium unterstellten Museen befriedigt werden. In einer Denkschrift wurde dieser Plan unserem hohen Chef, Sr. Excellenz dem Herrn Staatsminister Dr. v. Landmann unterbreitet und fand dort eine warme und wohlwollende Aufnahme. Leider haben die Verhandlungen mit dem Kriegsministerium zu keinem befriedigenden Resultat geführt, weil die Türkenkaserne in absehbarer Zeit nicht aufgegeben werden könne.

Wir betrachten diese Entscheidung nicht als eine endgiltige, sind wir uns doch bewusst, dass Fragen von so grosser Tragweite, denen tausend Schwierigkeiten im Wege stehen, nicht auf die erste Anregung hin gelöst werden; allein für die wissenschaftlichen Sammlungen des Staates handelt es sich hier, wie bereits mein Vorgänger Herr von Pettenkofer von diesem Platze aus betont hat, um eine Lebensfrage, die in kürzerer oder längerer Frist gelöst werden muss. Wir vertrauen auf das vielfach bewährte Wohlwollen und die Einsicht der königlichen Staatsregierung und den übrigen in Frage kommenden Faktoren und hoffen, dass uns das neue Jahrhundert auch die Erfüllung unserer berechtigten Wünsche entweder in der von uns befürworteten oder in irgend einer anderen befriedigenden Weise bringen wird.

Ich erteile nunmehr den Herren Klassensekretären das Wort zur Verlesung der Erinnerungsworte auf die im verflossenen Jahre verstorbenen Mitglieder.

Der Classensekretär der mathematisch-physikalischen Classe, Herr C. v. Voit, theilt mit, dass die mathematisch-physikalische Classe im vergangenen Jahre 12 Mitglieder durch den Tod verloren hat,

zwei einheimische: den Chemiker Wilhelm v. Miller und den Physiker Eugen v. Lommel;

dann 10 auswärtige Mitglieder: die Mathematiker Sophus Lie in Christiania und Eugenio Beltrami in Rom; die Physiker Wilhelm Gottlieb Hankel in Leipzig und Gustav Wiedemann in Leipzig; die Chemiker Robert Bunsen in Heidelberg, Charles Friedel in Paris und Edward Frankland in Reigate (England) und die Mineralogen und Geologen Franz v. Hauer in Wien, Othniel Marsh in New Haven und Karl Friedrich Rammelsberg in Berlin.



Wilhelm v. Miller.[1])

Am 1. März 1899 ist das ausserordentliche Mitglied der Akademie, der Chemiker Wilhelm v. Miller, im Alter von 50 Jahren, nachdem er nur etwas über drei Jahre unserem Kreise angehört hatte, gestorben. Allzu früh ist er noch in voller Kraft aus seinem Wirkungskreise geschieden; die Wissenschaft verdankt ihm eine Anzahl bedeutsamer Untersuchungen auf verschiedenen Gebieten der organischen Chemie, wodurch er sich eine geachtete Stellung unter den Fachgenossen errungen hat.

Er wurde am 9. Dezember 1848 in hiesiger Stadt als Sohn des vortrefflichen Erzgiessers Ferdinand v. Miller geboren. Es war ihm eine ungemein glückliche Jugendzeit beschieden. Ein schönes patriarchalisches, von gläubiger Frömmigkeit getragenes Familienleben verband die zahlreichen Kinder mit Vater und Mutter; bei allen Gliedern war ein lebhafter Sinn für die damals in München unter König Ludwig I. Führung mächtig emporstrebende bildende Kunst entwickelt, der durch den Verkehr der bedeutendsten Künstler in dem angesehenen Bürgershause erweckt und ausgebildet wurde. Dadurch erhielt der Knabe vielfache geistige Anregung, die Lust zum Lernen und zum Erwerb von Kenntnissen, aber auch einen lebensfrohen Sinn, die Liebe zu heiterer Geselligkeit und ein feines Verständniss für die Schönheiten der Natur auf den herrlichen elterlichen Besitzungen in den bayerischen Vorbergen. Dabei wurde neben der Ausbildung des Geistes auch die des Körpers durch allerlei Leibesübungen gepflegt.

Zuerst besuchte er die Lateinschule in Metten, hierauf das hiesige Max-Gymnasium, und bezog dann die Universitäten zu München und Berlin, woselbst er sich auf den Wunsch seines Vaters während drei Jahren dem Studium der Rechtswissenschaft widmete. Aber er that dies nur aus Pflichtgefühl dem

[1]) Siehe die Nekrologe von A. Lipp in dem Bericht über die k. technische Hochschule zu München für das Studienjahr 1898/99 und in der Chemikerzeitung vom 8. März 1899.

Vater zu Liebe und nicht aus innerem Drange, denn sein lebhaftes Interesse an der Natur zog ihn zu den Naturwissenschaften. Er hörte, wie damals viele Juristen, auch die Vorlesungen über Chemie von Liebig, durch welche er so sehr angeregt wurde, dass er sich von da an ganz dieser Wissenschaft zuwandte. Da in dem Liebig'schen Laboratorium keine Schüler aufgenommen wurden, so trat er in das unter des ausgezeichneten Erlenmeyer's Leitung in vollster Blüthe stehende chemische Laboratorium der hiesigen technischen Hochschule ein und begann sich mit der Hauptaufgabe der heutigen chemischen Forschung, dem Aufbau der complizirten Kohlenstoff-Verbindungen, der Aufhellung deren innerer Struktur, zu beschäftigen.

Bald hatte er eine Arbeit „über die chemischen Verbindungen im flüssigen Storax", welches vanilleartig riechende Harz aus der Rinde des im Orient vorkommenden Storaxbaumes gewonnen wird, vollendet. Er wies darin mehrere bisher übersehene Verbindungen nach, so besonders Zimmtsäure-Phenylpropylester und Zimmtsäure-Aethylester und zwei sogenannte Storesine. Mit dieser Untersuchung, die ein Zeugniss für seine wissenschaftliche Reife lieferte, promovirte er an der hiesigen Universität (1874) als Doktor der Philosophie; er hatte seinen Vater von dem Wechsel des Studiums nicht unterrichtet, da er demselben zugleich einen Erfolg seiner Bestrebungen in der Chemie vorlegen wollte, und so überraschte er ihn mit der Einladung zu seiner Promotion, wornach ihm auch die freudige Zustimmung zu dem neuen Berufe zu Theil wurde.

Erlenmeyer, welcher durch den rastlosen Fleiss und das Talent für die Chemie auf Miller aufmerksam geworden war, machte ihn noch im gleichen Jahre zu seinem Assistenten im anorganischen Laboratorium. Ein Jahr darauf habilitirte er sich als Privatdozent für allgemeine Chemie an der technischen Hochschule mit einem Vortrage über die Alkohole und ihre Oxydationsprodukte.

Bei Behandlung einer Verbindung der Fettsäurereihe, der in der Baldrianwurzel vorkommenden Valeriansäure, mit Kalium-

permanganat in alkalischer Lösung erhielt er als Oxydationsprodukt die Hydrooxyvaleriansäure, welche bei der Destillation mit Schwefelsäure die mit der in der Angelikawurzel enthaltenen Angelikasäure isomere Dimethylacrylsäure lieferte.

Im Jahre 1879 gab er die Assistentenstelle auf, um andere Laboratorien kennen zu lernen. Er verweilte dabei längere Zeit in Berlin bei dem berühmten Chemiker A. W. Hofmann, der durch seine bahnbrechenden Arbeiten in erster Linie den Grund zu der farbenprächtigen Theerindustrie gelegt hat, wofür Miller grosses Interesse empfand. Es wurden daselbst von ihm zwei neue Farbstoffe, das sogenannte Rouge Français und der Biebericher Scharlach, untersucht, deren ziemlich verwickelte Zusammensetzung er aufklärte. Gemeinschaftlich mit Hofmann, der den jungen kenntnissreichen Chemiker schätzen lernte, stellte er durch Einwirkung von Salpetersäure mehrere Nitroverbindungen des Kresols, eines im Steinkohlentheer enthaltenen Stoffes, dar, drei Mononitrokresole und ein Dinitrokresol, so wie man schon früher aus den Phenolen die Nitrophenole erhalten hatte.

Mit reichen Erfahrungen nach München zurückgekehrt hielt Miller Vorlesungen über Farbstoffe und setzte seine wissenschaftliche Thätigkeit emsig fort. In Berlin war er mit dem jungen Chemiker Oskar Döbner, jetzt als Professor in Halle thätig, bekannt geworden und hatte eine innige Freundschaft mit demselben geschlossen; der Austausch der Gedanken führte die beiden zu gemeinsamer Arbeit über die synthetische Darstellung zahlreicher Chinaldinbasen, welche in naher Beziehung zu den für den Arzt so überaus werthvollen Alkaloiden der Chinarinde stehen. Skraup war es kurz vorher gelungen das Chinolin durch Behandlung von Nitrobenzol mit Anilin (Amidobenzol), Glyzerin und concentrirter Schwefelsäure darzustellen; indem die Beiden das Glyzerin durch Aldehyd ersetzten, gewannen sie eine Base, das methylirte Chinolin oder Chinaldin, dessen Constitution sie feststellten und das dadurch wichtig ist, dass das Methyl in demselben sich besonders leicht gegen andere Stoffe austauschen lässt.

Die Synthese des Chinaldins mit Döbner begründete Millers wissenschaftlichen Ruf; sie wurde der Ausgangspunkt für weitere umfassende Untersuchungen dieser Base nach den in der organischen Chemie gebräuchlichen Methoden, welche Miller theils noch mit Döbner, theils mit seinen Schülern ausführte. Bei Anwendung des dem Anilin homologen Toluidins erhielten sie die Methyl-Chinaldine; sie zeigten, dass ebenso wie das Anilin alle primären aromatischen Amidoverbindungen mit freier Orthostellung Chinaldine bilden. Indem sie weiterhin noch mit anderen Aldehyden die Chinaldin-Darstellung versuchten, wiesen sie nach, dass alle ungesättigten Aldehyde oder Aldole neue Chinaldine liefern. Es gelang ihnen ferner die Darstellung verschiedener Verbindungen des Chinaldins, z. B. von Nitro-Sulfo- und Hydroxyverbindungen sowie der Chinaldin-Carbonsäuren.

Mittlerweile war Miller nach dem durch Kränklichkeit veranlassten unerwarteten Rücktritt Erlenmeyers auf dringende Empfehlung des letzteren zum ordentlichen Professor der allgemeinen Chemie an der technischen Hochschule vorgerückt. Er erhielt dadurch die Gelegenheit mit Hilfe seiner Schüler den weiteren Ausbau des von ihm und Döbner erschlossenen Gebietes zu unternehmen.

Die Ergebnisse bei der Oxydation von Chinolinderivaten mit Chromsäure und mit Kaliumpermanganat lieferten einen werthvollen Beitrag zur theoretischen Chemie.

Indem er mit Kinkelin sich an die schwierige Ergründung des Chinins wagte, erhielt er die sogenannten Dichinoline; dann weitere Chinaldine aus bisher unbekannten Aldehyden und auch aus Gemischen zweier verschiedener Aldehyde. Bei Einwirkung von Chloral auf Chinaldin kam er mit Spady zu einer Chinolinacrylsäure.

Die fortgesetzten Untersuchungen über die Chinaldine führten ihn und Rohde zu einer weiteren Reihe werthvoller Aufschlüsse, nämlich zu der Darlegung der Bedingungen, unter denen sich die Verbindungen der sogenannten Inden-Gruppe bilden, welche Uebergangsglieder von dem Benzol zu dem

Naphtalin sind. Es wurde eine ganze Anzahl von Indenderivaten und verschiedene neue Zwischenprodukte hergestellt, wobei sich ergab, dass sowohl der Charakter der Seitenkette als auch die Art der Substitution einen ganz bestimmten Einfluss auf das Zustandekommen dieser Reaktion besitzen.

Eine weitere sich daran anschliessende Arbeit war die mit Plöchl über das Aldehyd-Grün. Dieser schwefelhaltige Farbstoff war schon früher durch Behandlung von Fuchsin in schwefelsaurer Lösung mit Aethyl-Aldehyd und unterschwefligsaurem Natrium gewonnen worden, aber die Natur desselben war bis dahin wegen der äusserst complicirten Zusammensetzung unaufgeklärt geblieben. Durch eine schwierige und mühevolle Untersuchung gelang es den beiden die Constitution des Farbstoffs festzustellen. Nach der Aufhellung der Chinaldinbildung war zu erwarten, dass auch bei der Herstellung des Aldehyd-Grün Chinaldingruppen sich bilden und dann noch Schwefel in die Verbindung eintritt. Miller und Plöchl zeigten, entgegen anderen Anschauungen, dass dabei nur e i n e der drei Amidogruppen zur Chinaldinbildung verwendet wird, die beiden anderen aber mit dem gleichzeitig entstehenden Aldol in Reaktion treten; in dem Aldehyd-Blau dagegen treten die drei Amidogruppen mit drei Aldol-Molekülen zusammen.

Die Arbeit über das Aldehyd-Grün gab den Anstoss zu einer Reihe aus Millers Laboratorium hervorgegangenen Untersuchungen über die Schiff'schen Basen, welche bei der Einwirkung von Aldehyden und Ketonen auf verschiedene primäre Amine entstehen. Aus ihnen gehen durch Aufnahme von Blausäure Amido- oder Aminonitrile hervor. Es wurden dabei wichtige Amidosäuren und die merkwürdigen Amidooxylsäuren, welche am Stickstoff ein Hydroxyl enthalten, gewonnen, sowie eine allgemeine Bildungsweise von substituirten Säureamiden gefunden. Indem sie die Blausäure zur Erkennung des symmetrischen und assymmetrischen Stickstoffs benützten, fanden sie neue stereoisomere Stickstoffverbindungen, nämlich die Anilverbindungen, wodurch sie wesentlich zur Kenntniss der Stereoisomerie der Stickstoffverbindungen beitrugen.

Daran schlossen sich mit Rohde ausgeführte bedeutsame Untersuchungen über die chemische Constitution des in der Chinarinde enthaltenen Cinchonins an, welche als Vorarbeiten für eine künftige Synthese des kostbaren Arzneimittels Beachtung verdienen. Mit Rohde lieferte er auch Beiträge zur Kenntniss des in gewissen Insekten entstehenden Cochenille-Farbstoffs; sie zeigten, dass die darin enthaltene Karminsäure ein Derivat des Methyl-di-oxy-α-naphtachinons sein müsse und legten damit den Grund für die Aufklärung der Constitution derselben. Mit Slunk wies er in der Cochenille das zu den Fäulnissprodukten des Eiweisses gehörige Tyrosin nach.

Miller interessirte sich lebhaft für die merkwürdige Wirkung des elektrischen Stroms auf die chemischen Verbindungen. Man ist bekanntlich im Stande durch denselben die letzteren in ihre Componenten zu zerlegen und dadurch einen Einblick in ihre nähere Zusammensetzung zu gewinnen. Nachdem ihm die Errichtung eines mit allen Hilfsmitteln ausgestatteten elektro-chemischen Laboratoriums gelungen war, wurden darin manche lehrreiche Elektrolysen ausgeführt. So hat er z. B. mit Hofer den elektrischen Strom auf einige substituirte organische Säuren, besonders auf Hydrooxysäuren einwirken lassen und, wie Andere schon vorher, gefunden, dass der elektrische Rest dieser Verbindungen zu Aldehyden oder Ketonen oxydirt wird; es gelang ihnen aber in einzelnen Fällen weiter, diesen Rest einer anderen Verbindung synthetisch zu vereinen: denn sie bekamen durch die Elektrolyse von glykolsaurem und essigsaurem Kalium in geringer Menge Aethyl-Alkohol oder durch die Elektrolyse der Gemische von fettsauren Salzen und von Estersalzen mehrbasischer Carbonsäuren eine Synthese höherer Fettsäuren.

Miller war auch bestrebt sein Wissen für gemeinnützige Zwecke zu verwerthen.

Die durch den Nonnenschmetterling für unsere Wälder drohende Gefahr erregte ihn tief und veranlasste ihn und Harz nach einem Mittel dagegen zu sinnen; er empfahl das von A. W. Hofmann und ihm früher dargestellte Orthodinitro-

kresolkalium, welches noch in grosser Verdünnung die Raupen tödtet, den Pflanzen aber nicht schaden soll, zur Bespritzung der Bäume. Es erwies sich zwar das von ihm Antinonnin genannte Mittel bei der kolossalen Ausbreitung des Insekts als ohnmächtig, aber es scheint, wie andere ähnliche Stoffe, z. B. die Pikrinsäure (das Trinitrophenol), als kräftiges Antiseptikum gegen Fäulniss und Vermoderung von Holz etc. Verwendung finden zu können.

Der Alterthumsforscher Dr. Franz Bock hatte in seiner Geschichte der liturgischen Gewänder des Mittelalters (1859) angegeben, dass der Urstoff der prächtigen mittelalterlichen platten Goldfäden nicht mehr bekannt sei und auch mit welchem Bindemittel die Vergoldung auf denselben aufgetragen worden sei; es wäre daher wichtig die im 15. Jahrhundert verloren gegangene Technik wieder zu finden. Diese „cyprischen" Goldfäden, mit denen die kostbaren Brokate des 13. bis 15. Jahrhunderts gefertiget wurden, zeichnen sich durch ihre Weichheit und ihren milden Glanz von den modernen, durch Vergolden steifen Silberdrahtes hergestellter Fäden aus. Der Kunstsinn Millers liess ihn die Aufgabe des Wiederauffindens der alten Verfertigung der Goldfäden lebhaft erfassen, und er stellte mit Harz (1882) eingehende Untersuchungen und Studien darüber an. Sie versuchten sich auch in der praktischen Ausführung der Fäden mit selbst ersonnenen Apparaten. Sie haben aber übersehen, dass der kunstverständige berühmte Wiener Physiologe und Mikroscopiker Ernst Brücke schon im Jahre 1865 (Mittheilungen des k. k. österreichischen Museums für Kunst und Industrie 1865 Bd. I S. 68—71) die genauesten Mittheilungen hierüber gemacht und dargethan hatte, dass die Fäden aus dem Bauchfell oder dem Peritonalüberzug (nicht der Submukosa) des Schlachtviehs als Grundlage für die Vergoldung bestehe, hie und da auch aus feinem Leder; aber das Bindemittel, durch welches das Gold auf dem Häutchen befestiget wurde, blieb ihm unbekannt. Es hat dann weiterhin der Professor Dr. Joseph Karabacek an der Wiener Universität in seinem Werke über die persische Nadelmalerei Süsandschird

(1881 S. 18—21) zuerst das historische Wesen dieser missverständlich „cyprische“ benannten Fäden beleuchtet; sie haben mit Cypern nichts zu thun, denn diese Insel war nur Durchgangsstation für das aus Egypten und der Levante kommende Gespinnste. Es war ihm auch das Bindemittel und die ganze Zubereitung der Fäden kein Geheimniss: er hat dieselben schon vor 19 Jahren nach den arabischen Quellen hergestellt.

Ueberblickt man die wissenschaftlichen Leistungen Miller's, so wird man sagen müssen, dass er durch seine Begabung für die Forschung in der Chemie der verwickelten Kohlenstoff-Verbindungen und durch seinen unermüdlichen Fleiss werthvolle Beiträge zum Ausbau dieses Theils der Chemie geliefert hat, wenn er auch dieselbe nicht in neue Bahnen lenkte. Indem er eine grosse Anzahl solcher Verbindungen dem Verständniss erschloss, hat er sich um die Wissenschaft Verdienste erworben, welche stets dankbare Anerkennung finden werden.

Er war ausserdem ein beliebter Lehrer an der technischen Hochschule von klarem, anregendem Vortrag und ein gewandter Experimentator. Durch persönliche Liebenswürdigkeit gewann er die Liebe seiner Schüler, denen er Berather und Freund war.

Das was ihn besonders auszeichnete, war die Energie seines Wesens, durch welche er erreichte, was er erstrebte, und seine Schaffenslust. Sein Vermögen gab ihm die Mittel seinen Sammeleifer zu befriedigen: so hat er die Bildnisse der berühmten Chemiker seit den ältesten Zeiten und von allen Ländern, weit über 1000, zusammengebracht, und er beabsichtigte an der Hand derselben einmal eine illustrirte Geschichte der Chemie zu schreiben.

Seit September 1898 zeigte er nicht mehr die gewohnte Frische. Es bildete sich ein Darmleiden aus, das ihn am Beginne der Vorlesungen hinderte. Nach einer vorgenommenen vorläufigen Operation erholte er sich anscheinend etwas und begann sogar am Anfang des Jahres 1899 seine Vorlesungen

wieder, aber seine Kraft war gebrochen. Am 21. Februar begab er sich, um seiner Familie den Schmerz des Abschieds zu ersparen, direkt vom Hörsaal weg in die Klinik zu der zweiten grösseren Operation, der er muthvoll entgegen gieng. Am dritten Tage erlag er einer rasch eingetretenen Herzschwäche. Am 3. März ist er unter grosser Betheiligung in dem Familiengrabe beigesetzt worden; sein Bild wird bei seinen Freunden in treuer Erinnerung fortleben.

Eugen v. Lommel.

Am 19. Juni 1899 verschied nach längerem Leiden im Alter von 62 Jahren das ordentliche Mitglied der mathematisch-physikalischen Classe unserer Akademie, der Physiker Eugen v. Lommel. Ein ungemein kenntnissreicher Gelehrter und feiner Forscher, der die Physik, besonders auf dem Gebiete der Lehre vom Lichte, um viele wichtige Beobachtungen und Erklärungen bereichert hat, ist mit ihm dahingegangen.

Er kam in Edenkoben in der Rheinpfalz am 19. März 1837 zur Welt. Sein Vater war daselbst als praktischer Arzt thätig, später als Bezirksarzt in Hornbach. Die Familie lebte mit den vier Söhnen, von denen Eugen der älteste war, in recht bescheidenen Verhältnissen. Er besuchte zuerst die Lateinschule in Edenkoben, dann das Gymnasium in Speier; man hatte ihn daselbst zu kleinen Bürgersleuten in Kost und Wohnung gegeben, und als der jüngere Bruder auch nach Speier kam, mussten die beiden mit einem Bette sich begnügen. Obwohl er schon früh ganz sich selbst überlassen war, kam er doch mit regstem Eifer seinen Verpflichtungen in der Schule nach; die Wissbegierde und der Fleiss, welche ihm Zeit seines Lebens blieben, zeichneten ihn damals schon aus und bewahrten ihn vor Ausschreitungen. Er nahm es ernst mit dem, was er betrieb, und gieng gerne seine stillen Wege; das ihm zukommende Taschengeld verwendete er zu dem Ankauf von Büchern, aus denen er lernen konnte.

Bald entwickelte sich bei ihm die Neigung zu den Naturwissenschaften, aber anfangs mehr für die beschreibenden, insbesondere für die Pflanzen und Thiere; um sich naturwissenschaftliche Kenntnisse zu verschaffen, besuchte er die Abendkurse an der Gewerbeschule. Bei dem lebhaften Interesse für die Formen und die Lebensweise der Thiere und Pflanzen zeichnete und malte er dieselben in seinen Freistunden. So hat er als 14 jähriger Knabe den grossen Atlas von Oken's Naturgeschichte des Thierreichs mit seinen 116 colorirten Tafeln in Grossquart auf das Sorgfältigste, von dem Original nicht unterscheidbar, abgezeichnet, da er die Mittel zur Anschaffung des theuern Werkes nicht besass; auch liegen von ihm noch zwei reichhaltige, grösstentheils nach der Natur charakteristisch und farbenprächtig gemalte Pflanzenbücher vor. Nur eine seltene Ausdauer und eine besondere Liebe zur Sache konnte die kolossale Aufgabe bewältigen; daher kam es auch, dass er die Pflanzen und Thiere genau kannte und über ihre Merkmale und Eigenschaften Bescheid zu geben wusste.

Dass er mit solchen Dingen seine übrigen Studien nicht versäumte, das geht daraus hervor, dass er bis an sein Lebensende zur Erholung und Erbauung die lateinischen und griechischen Klassiker in der Ursprache las und namentlich Homer ihm stets ein treuer Begleiter war. Der Physiker Lommel hat das humanistische Gymnasium, obwohl er manche Mängel an ihm erkannte, als die richtige Schule des Geistes angesehen, wie seine in Erlangen (1881) gehaltene Rektoratsrede: „über Universitätsbildung" darthut. Ich weiss noch von anderen Naturforschern das Gleiche; so hat mein väterlicher Freund, der Chemiker Schönbein in Basel, nach der strengen Arbeit des Tages geistige Erfrischung in den Oden des Horaz gesucht. Auch von dem Chemiker Bunsen wird berichtet, dass er bis in die letzte Zeit seines Lebens Cicero's Briefe und Sueton las. Es ist wahrlich ein gänzlich unbegründetes und gedankenlos gesprochenes Wort, dass die Naturforschung zu rohem Materialismus führe und ideale Auffassungen zerstöre; die solches sagen, wissen nicht, welches reine Glück in der Forschung nach der

Wahrheit und in der fortschreitenden Erkenntniss der Naturerscheinungen liegt und wie dabei die Gedanken auf Höheres gelenkt werden, wenn dadurch auch nach und nach manche ältere Vorstellungen der Menschheit über die Welt sich als unhaltbar erweisen.

17½ Jahre alt (1854) absolvirte Lommel mit der Note vorzüglich das Gymnasium zu Speier; durch den Einfluss des ausgezeichneten Professors der Mathematik Friedr. Schwerd, der sich durch seine hervorragenden Untersuchungen über die Beugungserscheinungen des Lichtes einen bedeutenden Namen gemacht hat und auch correspondirendes Mitglied unserer Akademie war, hatte er erst in der obersten Classe ein Interesse an der Mathematik bekommen, so dass er die mathematische Aufgabe bei der Prüfung glänzend löste und von seinem Lehrer besonders belobt wurde; er erzählte später öfters, wie er anfänglich nur wenig Neigung zu dieser Wissenschaft besass, aber durch die klare, fesselnde Darstellung Schwerd's zu der Ueberzeugung gekommen sei, dass die Kenntniss der Mathematik für die Erfassung der Naturerscheinungen nothwendig ist. Die häufig einseitige Uebung des Gedächtnisses in der Schule ohne das volle Verständniss des Gelernten ist vielfach die Ursache der späteren Klagen an der Universität; es soll in der ersteren nur der Geist befähiget werden, richtig zu denken; dabei kommt es nicht so sehr auf die Organisation der Schule oder das Lehrfach an, als viel mehr darauf, dass irgend ein guter Lehrer bei dem Schüler die Lust am Denken erweckt. In solcher Weise ist Lommel durch Schwerd zur Mathematik und Physik geführt worden, trotz seiner Neigung zur Zoologie und Botanik. Er ist ein ausgezeichneter Mathematiker geworden, der die Mathematik mit grösstem Geschick zur Lösung physikalischer Probleme anwandte.

Er bezog nun die Universität München, wo er im ersten Jahre als Candidat der Philosophie und dann als Candidat der Mathematik inscribirt war; er hörte Vorlesungen über Mathematik, Physik, Chemie und Astronomie bei Seidel, Jolly, Liebig, Kobell und Lamont. Wegen seiner beschränkten Mittel konnte

er zu dieser Zeit nicht daran denken die akademische Laufbahn einzuschlagen, er wollte sich nur für die Lehramtsprüfung aus der Mathematik und Physik vorbereiten; desshalb machte er auch nicht die Uebungen im physikalischen oder chemischen Laboratorium mit wie Jeder, der sich der Physik widmen will; nur das mathematische Seminar bei Seidel besuchte er eifrigst. Zu keinem seiner Lehrer trat er in nähere Beziehungen, auch nicht zu dem Physiker Jolly; gerne verkehrte er mit dem späteren Professor Philipp Zöller, der auch ein Rheinpfälzer war und auf Anregung Liebig's agrikulturchemische Untersuchungen in dessen Laboratorium machte. Lommel beschränkte sich jedoch nicht auf sein Fach, sondern suchte sich auch eine umfassende allgemeine Bildung zu verschaffen; er hörte Collegien über Philosophie z. B. bei dem geistreichen Lasaulx, erwarb sich ein feines Verständniss für die schöne Literatur, namentlich für die grossen deutschen Dichter, für die klassische Musik und für die bildende Kunst; auf der obersten Galerie des Hoftheaters, in den Concerten der musikalischen Akademie und in den Kunstsammlungen war er häufig zu finden. So konnte er sich sagen, dass er die vierjährige Studienzeit an der Universität gut angewandt habe, und er erinnerte sich später auch gerne daran.

Nachdem er im Herbst 1858 die Lehramtsprüfung mit der Note „sehr gut“ bestanden hatte, nahm ihn der vermögende Weingutsbesitzer und Landtags-Abgeordnete Buhl in Deidesheim als Hauslehrer für seinen jüngsten Sohn auf. Der unterrichtete junge Lehrer war in der Familie seines Schülers und in dem angeregten geselligen Kreise, der daselbst verkehrte, sehr freundlich aufgenommen und er lernte dort die angesehensten Männer der Pfalz und Politiker wie Heinrich v. Gagern, Bassermann etc. kennen.

Im Frühjahr 1860 erhielt er die Stelle eines Lehrers der Mathematik und Physik an der Kantonsschule in Schwyz, die er fünf Jahre inne hatte. Es war an dem herrlich gelegenen Orte eine schöne Zeit für ihn, er übte als Lehrer eine zusagende Thätigkeit aus und er fieng an wissenschaftlich zu arbeiten,

zumeist Mathematisches, aber auch Physikalisches über optische Probleme, wozu er wohl durch die Verpflichtung in der Physik zu unterrichten gebracht worden war.

Es wird erzählt, der damalige verdiente eidgenössische Erziehungsrath Kappeler habe erfahren, dass die aus der Kantonsschule zu Schwyz an das Züricher Polytechnikum kommenden Studirenden in der Mathematik und Physik besonders gut unterrichtet seien; dies habe ihn veranlasst den Lehrer Lommel aufzufordern nach Zürich zu kommen. Weil aber vorerst noch keine Stelle an der Hochschule frei war, nahm er einstweilen die Anstellung als Oberlehrer an der Kantonsschule in Zürich an und habilitirte sich, nachdem er vorher (1863) den Doktorgrad erworben hatte, an der Universität und dem Polytechnikum zu Zürich (1865). Besonders gerne war er in dieser Stadt mit ihren ausgezeichneten Hochschulen; er gewann das Zutrauen strebsamer Schüler und trat in anregenden Verkehr mit bedeutenden Männern: mit Gottfried Keller, Friedrich Theodor Vischer, Johannes Wislicenus, Theodor Billroth, Friedrich Emil Prym, Adolf Fick und Anderen; auch setzte er seine wissenschaftliche Thätigkeit fort.

Trotzdem nahm er im Herbst 1867 einen Ruf als Professor der Mathematik und Physik an die land- und forstwirthschaftliche Akademie zu Hohenheim in Württemberg an. In dem einsamen Orte fand er wohl eine lohnende Beschäftigung, jedoch nicht den gewohnten Umgang mit Männern anderer Richtung und nicht den Genuss der Kunst. Er wanderte daher jeden Samstag über die Höhen, welche das Schloss Hohenheim von Stuttgart trennen, dorthin und Montag Morgens wieder zurück; namentlich in der Familie des Physikers Zech, wo er wieder Vischer traf, war er als Freund des Hauses aufgenommen.

Lommel galt längere Zeit unter seinen Fachgenossen mehr als Mathematiker, obwohl er eine Anzahl bemerkenswerther physikalischer Arbeiten herausgegeben hatte, aber nach und nach entwickelte er sich durch eigene Kraft zum vollendeten Physiker.

Da kam im Herbst 1868 die Berufung als Professor der Physik an Stelle des vortrefflichen Beetz an die Universität Erlangen, die ihn innerlich beglückte, weil damit der Traum seiner Jugend sich erfüllte. Diese ruhige, aufstrebende, dem Lärm und den Anforderungen grosser Städte entrückte Universität war für ihn, den stillen Gelehrten, das richtige Arbeitsfeld. Er galt bald als eine der ersten Kräfte der Hochschule, entfaltete eine erfolgreiche Lehrthätigkeit, war geachtet und geliebt von seinen Schülern und Collegen, wie aus den ehrenden Worten, welche der Rektor der Universität Erlangen und der Dekan der philosophischen Fakultät derselben an seinem Grabe sprach, hervorgieng, und seine wissenschaftliche Arbeit war eine höchst fruchtbare. Die 18 Erlanger Jahre sind in letzterer Beziehung wohl als der Höhepunkt seines Schaffens anzusehen.

Und doch sollte er noch einmal den Ort seiner Wirksamkeit wechseln, nachdem er schon 1869 einen an ihn ergangenen Ruf an das Polytechnikum in Zürich abgelehnt hatte; er erhielt (1886) den ehrenvollen Ruf an die hiesige Universität als Nachfolger Jolly's, den er nicht ausschlagen zu dürfen glaubte. Er hat in den 13 Jahren der hiesigen Thätigkeit sein segensreiches Wirken als Lehrer und Forscher fortgesetzt; aber die vielen Abhaltungen an der grossen Universität, namentlich die die wissenschaftliche Arbeit geradezu lähmenden Prüfungen, hinderten auch ihn zu seinem Schmerze so viel Zeit der Forschung zu widmen als er wünschte. Er war ausserdem auch Conservator des physikalisch-metronomischen Instituts des Staates und technisches Mitglied der Normal-Aichungs-Kommission. Ein werthvolles Erbe hat er uns hinterlassen in dem 1894 fertig gestellten physikalischen Institut, das, nach seinen Angaben erbaut, als eine vortreffliche Anstalt bezeichnet werden muss. —

Ueber die wissenschaftlichen Errungenschaften, welche wir Lommel verdanken, habe ich einen competenten Physiker, den verehrten Collegen Hermann Ebert, um genauere Angaben gebeten; er hat sie mir in Folgendem in klarer, allgemein verständlicher Weise zusammengestellt, wofür ich ihm besten Dank schulde.

Im Vordergrunde des Interesses stehen Lommels optische Untersuchungen. Die mannigfachen Probleme der Lichterscheinungen, deren Lösung die bahnbrechenden Arbeiten eines Fraunhofer, Fresnel, Cauchy und anderer grosser Forscher der Nachwelt noch in grosser Zahl überlassen mussten, übten auf Lommel vom Beginn seiner Laufbahn an einen besonderen Reiz aus. Den grössten Erfolg errang er auf dem Gebiete, welches am längsten einer vollkommenen theoretischen Durchdringung widerstanden hatte, demjenigen der Erscheinungen der Zerstreuung oder der Dispersion und der Absorption des Lichtes. Seit Newton kannte man die verschiedene Brechbarkeit der verschiedenen Farben, welche bei der Brechung durch ein Prisma oder durch einen Wassertropfen zu der farbenprächtigen Farbenzerlegung in ein Spektrum oder zum Regenbogen führen. Man wusste auch, dass die Stärke der farbenzerstreuenden Kraft, die Dispersion, bei verschiedenen Substanzen eine sehr verschiedene ist, und hatte bemerkt, dass dieselbe mit dem innersten molekülaren Baue der brechenden Substanz irgendwie zusammenhängen müsse. Zwar hatte Cauchy eine Formel angegeben, welche gestattete mit Hilfe mehrerer für jede Substanz besonders zu bestimmender Constanten die Dispersion für die verschiedenen Farben mit einer gewissen Annäherung wirklich darzustellen; die Cauchy'sche Dispersionsformel war indessen mehr nur als Interpolationsformel zu betrachten, welche keinen näheren Aufschluss über die Mechanik des in Rede stehenden Phänomens gestattete. Noch weniger gelang es eine andere Erscheinung in die bereits hoch entwickelte Undulationstheorie des Lichtes einzuordnen, nämlich die der Absorption des Lichtes, welche in so ferne wiederum auf ein Miteingreifen der kleinsten Bausteine der lichtver-

schluckenden Medien hinwies, als jede Substanz vorwiegend nur gewisse Strahlengattungen absorbirt, andere aber mehr oder minder ungeschwächt durch sich hindurchgehen lässt. Schon hierdurch war ein gewisser Zusammenhang zwischen Dispersion und Absorption angedeutet, der noch überraschender hervortrat durch die Entdeckung der sogenannten „anomalen Dispersion“ durch Christiansen und Kundt bei Substanzen, welche engbegrenzte Spektralbezirke besonders stark absorbiren, d. h. eine elektive Absorption zeigen, auch ganz abweichende Ablenkungen der der absorbirten Farbe benachbarten Bestandtheile des Spektrums aufwiesen, wenn man aus der absorbirenden Substanz ein Prisma fertigt und mit dessen Hilfe das Licht analysirt. Was bei den nur das Ultraviolett stark absorbirenden Glasprismen undeutlich angedeutet war, trat hier klar hervor: ein Erklärungsprinzip, welches die Dispersionserscheinungen deuten sollte, musste auch über die Erscheinungen der Absorption, über die anomale Dispersion und die elektive Lichtabsorption gleichzeitig Rechenschaft geben.

Dieses Prinzip gefunden, es nach allen Seiten hin ausgestaltet und die in Rede stehenden Phänomene sämmtlich mit einem Minimum von Grundannahmen einwandfrei erklärt und damit der Theorie eine neue Provinz erobert zu haben, ist das ausserordentliche Verdienst Lommel's. Sein Ruhm wird nicht dadurch verdunkelt, dass er Vorläufer hatte, welche dem Ziele nahe waren, wie namentlich Sellmeier, noch dadurch, dass nur wenig vor ihm Hermann v. Helmholtz und wenig nach ihm Ketteler auf ähnlichem Wege zum gleichen Ziele gelangten. Die genannten Forscher haben vollständig unabhängig von einander und mit verschiedenen Methoden gearbeitet.

Das Prinzip der neuen Dispersionstheorie führt zum ersten Male das körperliche Molekül selbst rechnend in die optische Theorie ein und trägt damit der individuellen Beschaffenheit des die Lichtschwingungen übermittelnden Mediums Rechnung; es bewegen sich also darnach nicht die Aethertheilchen allein, sondern es wirken überall die Körpertheilchen mit. Tritt eine Lichtwelle aus Luft in ein Glasprisma ein, so findet sie hier

nicht mehr die gleichen Bedingungen wie in der Luft vor; in jeder Raumeinheit sind in den alles durchdringenden Lichtäther materielle kleinste Theile in viel grösserer Dichte eingelagert als vorher in der Luft; diese müssen die Bewegungen in der ankommenden Lichtwelle beeinflussen, sie werden selbst zum Theil mit in diese Bewegungen hineingezogen werden. Nun werden aber die Moleküle verschiedener Körper die einzelnen an sie herantretenden Schwingungen in sehr verschiedenem Grade aufnehmen, und ebenso werden die Moleküle ein und desselben Körpers die verschieden raschen Schwingungen, welche in einem Wellenzuge weissen Lichtes enthalten sind, je nach ihren „Eigenschwingungen", aufnehmen, ganz ähnlich wie eine Stimmgabel aus einem Tonwellenzuge nur auf diejenige Schwingung anspricht, welche ihrer Eigenschwingung entspricht. Die Moleküle werden also gewisse Schwingungen aufnehmen und deren Energie zu ihrer eigenen Anregung verwenden d. h. die entsprechende Lichtart absorbiren. Jetzt haben wir aber nicht mehr freien Aether, welcher schwingt, sondern Aether, welcher mit mitschwingenden Molekülen beladen ist, d. h. gewissermassen ein Medium von geänderter optischer Dichte. Von dieser hängt aber die Farbenablenkung, welche bei der Brechung eintritt, und damit die Dispersion ab. Wir sehen hier schon den Zusammenhang zwischen dem elektiven Absorptionsvermögen und der Farbenzerstreuung hervorleuchten. Der genauere Einblick in denselben ist natürlich nur an der Hand der von Lommel mit wunderbarer Klarheit und Eleganz entwickelten Formeln möglich. Das Resultat derselben, die Lommel'sche Dispersionsformel, hat sich allen experimentellen Prüfungen gegenüber selbst für weit abgelegene Spektralgebiete bewährt. Auch werden die Errungenschaften der Lommel'schen Untersuchungen nach dieser Richtung hin nicht dadurch in Frage gestellt, dass man heute aus guten Gründen die Vorstellungen der elastischen Optik hat fallen lassen und an Stelle der Verrückungen und Zugspannungen, mit denen diese operirte, elektrische und magnetische Zwangs- oder Polarisationszustände setzt, welche sich, periodisch mit Ort und

Zeit veränderlich, durch das Feldmedium hindurch fortpflanzen. Neuere Untersuchungen haben gezeigt, dass die meisten Ergebnisse der älteren Optik von diesem Wandel der Vorstellungen unberührt bleiben, da die Formen der Differentialgleichungen, auf die man in beiden Fällen geführt wird, die gleichen sind und nur die eintretenden Constanten verschiedene Bedeutung haben. —

Die Lommel'sche Grundvorstellung von der Wechselwirkung der Moleküle und dem Lichtäther hatte sich schon vor der Arbeit über die Dispersion noch nach einer anderen Richtung hin in Lommel's eigenen Händen als höchst fruchtbar erwiesen: gegenüber den von Stokes untersuchten Erscheinungen der Fluorescenz und Phosphorescenz, sowie später in den Arbeiten über die Lichtzerstreuung und Lichtreflexion bei diffus zerstreuenden und reflektirenden Körpern. Schon in seiner ersten physikalischen Publikation aus Schwyz wurde die Fluorescenz in Analogie mit den Resonanz-Erscheinungen des Schalls gebracht. Hier waren zunächst die Beobachtungsthatsachen selbst erst noch nach den verschiedensten Richtungen hin zu klären und zu vervollständigen; gerade in diesen Gebieten verdanken wir Lommel eine grosse Fülle von neuem Beobachtungsmaterial über fluorescirende Substanzen, darunter die Entdeckung der Fluorescenz von Dämpfen und die Anwendung von Platten aus phosphorescirendem Material zum Studium und zur Photographie des infrarothen, unser Auge nicht erregenden, unsichtbaren Theils des Spektrums. Das Nachleuchten z. B. von Bodmain'scher Leuchtfarbe wird in eigenthümlicher Weise beeinflusst durch die besonders durch ihre Wärmewirkungen ausgezeichnete infrarothe Strahlung, so dass, wenn Lücken in dem entsprechenden Spektralgebiete sich finden, wie sie z. B. im Sonnenspektrum durch die Absorption des Wasserdampfes in der Erdatmosphäre hervorgerufen werden, dieselben durch den Leuchtschirm direkt angezeigt werden; wird dieser auf eine photographisch empfindliche d. h. für die sichtbaren Strahlen des Schirmes, nicht aber für die infrarothen der den Schirm erregenden Strahlen empfänglichen

Platte aufgelegt, so kann man das infrarothe Spektrum, wenn auch nur indirekt, sogar photographiren. Die Theorie dieser complicirten Erscheinungen der Fluorescenz muss immer von gewissen vereinfachenden Annahmen ausgehen; soweit diese zutreffen, ist die Lommel'sche Theorie der Fluorescenz- und Phosphorescenz-Erscheinungen unzweifelhaft richtig.

Bezüglich dieser Annahmen selbst scheint aber heute nur diejenige einer Dämpfung der erregten Schwingungen im Moleküle selbst, die der Geschwindigkeit proportional ist, eine weiter tragende Bedeutung zu haben; die sehr merkwürdigen Analogien, auf die Lommel dabei geführt wurde, zwischen akustischen und optischen Erscheinungen, seine Ergebnisse über optische Resonanz- und Differenz- oder Combinationsschwingungen, zeigen sich nach neueren Beobachtungen nicht in allen Stücken mit den Versuchen in Uebereinstimmung. Indessen fragt es sich dabei immer, in wie weit die nachmessende experimentelle Forschung auch wirklich im Stande war, die von der Theorie geforderten Versuchsbedingungen genau zu realisiren. Jedenfalls wird auch von den Gegnern der Lommel'schen Theorie der Fluorescenz-Erscheinungen anerkannt, dass der von Lommel zuerst in die Lehre vom Leuchten eingeführte Gedanke einer Dämpfung, welche die Moleküle beim Schwingen erfahren, bereits die schönsten Früchte gezeitiget hat und von fundamentaler Bedeutung für alle hierher gehörenden Erscheinungen ist. —

In einem dritten grossen Gebiete der Optik sehen wir Lommel nicht als Bahnbrecher, wohl aber als einen mit seinen Arbeiten ein ganzes grosses Gebäude abschliessenden und vollendenden Forscher thätig; er war es, welcher in die Lehre von den Beugungserscheinungen gewissermassen die Schlusssteine einfügte und dieses Gebiet einer Vollkommenheit in der Ausgestaltung und Klarheit entgegenführte, dass es heute als Musterbild eines abgeschlossenen Lehrgebäudes dasteht, wie wir ihm nur wenige in den exakten Wissenschaften zur Seite zu setzen haben. Auch hier leistete Lommel nicht nur als Theoretiker Vollendetes, sondern er hat auch gleichzeitig mit

unermüdlicher Sorgfalt und durch feinste Messungen jedes einzelne Ergebniss der Theorie an den Erscheinungen selbst experimentell nachgeprüft. Bis zu dem Jahre 1884 musste die Theorie der Beugungserscheinungen vor Schwierigkeiten Halt machen, die unüberwindlich erschienen. Für den Fall, dass die einfallende Lichtwelle eine ebene ist, und der auffangende Schirm in unendlicher Entfernung von dem beugenden Objekte entfernt ist, also für parallele Strahlen, hatten schon Fraunhofer, Schwerd und Airy das Problem für den Fall einer kreisförmigen Oeffnung oder eines kreisförmigen undurchsichtigen Beugungsschirmes gelöst. Für die allgemeineren Fälle eines nicht parallelen Strahlenganges und für endliche Entfernungen der Auffangfläche war Fresnel auf eine Bemerkung von Poisson hin wenigstens für die axial im Beugungsraum gelegenen Punkte zu überraschenden Ergebnissen gelangt. Für den allgemeinsten Fall, den der Berechnung der Intensität des gebeugten Lichtes für irgend einen Punkt, wurden indessen die Formeln so verwickelt, dass vor Einführung eines neuen Gedankens jeder weitere Fortschritt als aussichtslos erscheinen musste. Vollends fehlte es an einer einheitlichen umfassenden Theorie, welche nicht nur die genannten Spezialfälle, sondern auch den viel allgemeineren der Herrschaft des Calküls hätte unterwerfen können, bei dem der beugende Schirm irgend welche von geraden Linien umgrenzte Figuren bildete. Da erschienen die beiden grossen Arbeiten von Lommel in den Abhandlungen unserer Akademie vom Jahre 1884 und 1886, welche die bezeichneten Probleme in einer solchen Weise lösten, dass sie für alle Zeiten erledigt erscheinen, d. h. in den genannten Gebieten wohl kaum Nennenswerthes der Nachwelt zu thun mehr übrig gelassen ist. Wenigstens stimmen die Ergebnisse der Theorie so genau mit der Wirklichkeit zusammen, als man nur irgend erwarten kann, was Lommel durch seine Messungen nachwies; und dabei haben die Formeln eine Eleganz, welche verblüffend wirken, wenn man auf die langathmigen Reihenentwickelungen früherer Versuche das Problem zu lösen zurückblickt. Lommel zeigt sich hier nicht

nur als vorzüglicher Physiker, sondern auch als höchst gewandter Mathematiker, besonders durch seine genaue Kenntniss der sogenannten Bessel'schen Funktionen.

Es sei gestattet an dieser Stelle einen kurzen Blick auch auf seine mathematischen Arbeiten zu werfen. Die Analysis war ihm mehr als nur Mittel zum Zweck bei seinen physikalischen Forschungen. Zahlreiche Abhandlungen sind rein mathematischen Fragen gewidmet. Namentlich sind es die überaus merkwürdigen Funktionsgebilde der erwähnten Bessel'schen oder Cylinderfunktionen, die ihn mit ihren fruchtbaren Recursionseigenschaften, den auch praktisch wichtigen Differentialgleichungen, die durch sie gelöst werden, sowie mit ihren merkwürdigen Integraleigenschaften immer aufs neue fesselten, denen er auch eine besondere kleine Monographie widmete. Wenn auch die moderne Funktionentheorie bei der Betrachtung der genannten Eigenschaften wesentlich andere Wege einschlägt, so wird doch auch der Mathematiker die zahlreichen Tafeln willkommen heissen, welche Lommel mit ausdauerndem Fleisse für diese Funktionen berechnete. Was er trieb, trieb er gründlich bis aufs Letzte. Seine grosse Vertrautheit mit diesem schwierigen Hilfsmittel liess ihn nun aber auch umgekehrt die der Weiterentwicklung der Beugungstheorie den Weg sperrenden, scheinbar unüberwindlichen Schwierigkeiten mit einer erstaunlichen Sicherheit besiegen. —

Mit den genannten Hauptarbeiten sind die Lommel'schen Untersuchungen aus dem Gebiete der Optik noch bei weitem nicht erschöpft; es wäre jetzt eine grosse Reihe von Einzelforschungen über Interferenzerscheinungen, Doppelbrechung, Polarisation und Cirkularpolarisation, Oberflächenfarben, Dichroismus, scroboscopische und entoptische Erscheinungen zu nennen, welche alle dauerndes Gut der Wissenschaft bleiben werden und die der Fachmann überaus schätzt, deren Besprechung im Einzelnen aber zu weit führen würde.

Es mag nur erwähnt werden, dass er seine optischen Lehren auch auf die Lichterscheinungen in der Atmosphäre anwandte: zur Erklärung des Regenbogens, der Dämmerungs-

farben, des sogenannten Heiligenscheins. Unter dem Einfluss seines Freundes Philipp Zöller entstand die Arbeit über die Beziehungen zwischen dem Lichte und dem grünen Farbstoff der Pflanzen, dem Chlorophyll, wobei sich zeigte, dass die mittleren rothen Strahlen das vegetative Wachsthum noch zu unterhalten im Stande sind, die äusseren aber nicht mehr.

Bemerkt sei noch, dass sich Lommel hier auch als sehr geschickter Construkteur von Apparaten zeigte; eine Reihe der von ihm eingeführten optischen Untersuchungsmittel wird für immer zu dem Bestande eines wohl eingerichteten physikalischen Laboratoriums gehören. —

Wer auf einem Gebiete der Physik so hervorragendes geleistet hat, von dem kann man billiger Weise nicht verlangen, dass er auf anderen Gebieten ebenfalls bahnbrechendes vollbringe. So sind die Arbeiten Lommel's über elektrische und magnetische Gegenstände geringer an Zahl gegenüber seinen optischen Untersuchungen. Da sich gerade diesen Problemen das Interesse der neueren Zeit aber besonders zuwendete, so mag es damit zusammenhängen, dass Lommel's wissenschaftliche Persönlichkeit in den letzten Jahren seines Lebens etwas zurücktrat, wobei freilich auch nicht zu vergessen ist, dass eine immer mehr anwachsende Amtsthätigkeit, sowie das unheilvolle Leiden, welches an seiner Schaffenskraft zehrte, ihm die Sammlung und Vertiefung, welche nun einmal zur Forscherarbeit unerlässlich ist, mehr und mehr verminderten. Aber regsten Antheil auch an der neuen Entwickelung der Elekricitätslehre hat er unzweifelhaft genommen, und wir haben in seinen wundervollen Versuchen über Magnetkraftlinien und über die äquipotentiellen Linien stromdurchflossener Platten ein treffliches Zeugniss hierfür noch aus dem Jahre 1893. Werden durch plattenförmig gestaltete metallische Leiter vermittelst zweier an zwei beliebigen Punkten angebrachten Zuleitungen galvanische Ströme hindurchgeleitet, so verbreiten sich die Stromfäden nach Gesetzen, welche schon das Interesse von Kirchhoff wachriefen und deren Verfolgung diesen selbst sowie Carl Neumann und Andere zur Entwickelung eines folgenreichen

Zweiges der Abbildungslehre des logarithmischen Potentials und anderer wichtigen Theorien anregten. Ein jeder Strom bildet um sich herum magnetische Kraftlinien aus, welche sich bei genügender Stromstärke bis an die Oberfläche des Leiters heran durch die schönen Ketten darstellen lassen, zu welchen Eisenfeil-Theilchen durch die magnetische Kraft zusammengefügt werden. Lommel wendete dieses Prinzip mit Erfolg auch auf die Plattenströme an und vermochte dadurch den Verlauf der Stromvertheilung in diesen zweidimensionalen Leitern dem Auge direkt wahrnehmbar zu machen. Ein kleines Bedenken der Theorie auf Maxwell'scher Grundlage, in wie weit die Lommel'schen Linien auch den Linien gleichen Potentialabfalles, den äquipotentiellen Linien der Plattenströme selbst folgen, wurde bald behoben. Sollte auch die Anwendung, welche Lommel von seiner Erscheinung auf das sogenannte Hall'sche Phänomen machte, der Ablenkung der Stromlinien in plattenförmigen Leitern durch vertikal dazu verlaufende Magnetkräfte, der weiteren Aufklärung auf diesem schwierigen Gebiete nicht Stich halten, so ändert dies nichts an der Einfachheit und Eleganz seiner Methode der Sichtbarmachung der genannten Linien. —

Eine Würdigung der Leistungen Lommel's für die Wissenschaft wäre gänzlich unvollkommen, wollte man nicht auch seiner lehrenden Thätigkeit in Schrift und Wort gedenken. Selten hat ein ernster Forscher und gründlicher wissenschaftlicher Arbeiter, wie es Lommel war, so gut verstanden, sein Wissen auch weiteren Kreisen mitzutheilen. Lommel war ein Meister der populären Darstellung. Seine zahlreichen allgemein verständlichen Vorträge über physikalische und meteorologische Gegenstände sind wahre Perlen einer einfachen und doch eindringlichen Klarheit. Sein Lehrbuch der Experimentalphysik erlebt noch immer jedes Jahr eine neue Auflage und mit Recht. Was dieses Buch unter den zahlreichen anderen guten Lehrbüchern dieses Wissenszweiges besonders auszeichnet, ist die schlichte Einfachheit, mit der der Lernende auf die grosse Tragweite der physikalischen Gesetze im alltäglichen Leben sowie bei den wichtigsten und gewaltigsten Naturphänomenen hingewiesen wird. —

Ueberblickt man das arbeitsreiche Leben und die Bedeutung der Arbeiten Lommel's, so erkennt man, dass er einer der fruchtbarsten und um die Wissenschaft verdientesten Physiker unserer Zeit war. Es sind nicht Entdeckungen, welche dem grossen Publikum bekannt geworden sind und ihm einen berühmten Namen bei letzterem verschafft haben; auch selbst unter den Fachgenossen haben nur solche, die seine mit feinster Beobachtungsgabe angestellten Versuche und seine scharfsinnigen Erklärungen der Erscheinungen genau verfolgt haben, den ganzen Werth des echten Gelehrten erkannt. Ein edler Mensch, bescheiden und schlicht, hat er sich nicht vorgedrängt; sein ganzes Denken erfüllte die Erkenntniss in seiner Wissenschaft, die ihm volle Befriedigung gewährte. Indem der seltene Forscher sich viele Jahre hindurch dem gleichen Problem widmete, bis es, so weit es zur Zeit möglich erschien, erschöpft war, giebt er uns das wohlthuende Gefühl einer ruhigen und tiefgehenden Geistesthätigkeit gegenüber den gar zu häufig hastigen und daher bald überholten Mittheilungen unserer Zeit. Wenn längst so manche momentan glänzende Entdeckungen in der Naturwissenschaft auf ihren wirklichen Werth für die Wissenschaft zurückgeführt sein werden, wird man die Schriften Lommel's noch lesen und daraus stets reiche Belehrung und einen wahren Genuss schöpfen.

Sophus Lie.[1])

Die mathematische Wissenschaft hat durch den am 18. Februar 1899 in Christiania erfolgten Tod des Norwegen Sophus Lie einen sehr schweren Verlust erlitten: er war einer der Führer in seinem Fache in der Gegenwart und einer der bedeutendsten und eigenartigsten Gelehrten, welche Norwegen in diesem Jahrhundert hervorgebracht hat. Er wurde nur 57 Jahre alt und gehörte unserer Akademie erst seit vier Monaten an.

Sophus Lie wurde am 17. Dezember 1842 auf Nordfjordeid

---

[1]) Rede von Prof. Elling Holst zum Andenken an Lie.

in dem Stift Bergen, wo sein Vater damals Pastor war, geboren; den ersten Unterricht erhielt er in der Bürgerschule in Moss, einer Insel im Christianiafjord, wohin sein Vater versetzt worden war; von da kam er in die Nissen'sche Privat-Lateinschule und dann (1859) an die Universität zu Christiania.

Der 17 jährige, ungemein kräftig entwickelte Jüngling hatte sich zu dieser Zeit noch nicht für einen bestimmten Beruf entschieden, ja nicht einmal ein besonderes Talent für irgend ein spezielles Fach gezeigt; er war allgemein begabt und in allen Gegenständen des Unterrichtes gleichmässig vorgebildet, und Niemand konnte damals vermuthen, dass er sich zu einem hervorragenden Mathematiker entwickeln werde. Er schwankte anfangs, ob er sich der Philologie oder der Naturwissenschaft, die sein älterer Bruder gewählt hatte, zuwenden sollte. Nach 6½ jährigem Universitätsstudium, wo Broch, Bjerknes und Sylow seine Lehrer waren, unterzog er sich (1865) mit grossem Erfolge der Prüfung als Reallehrer in der Mathematik und den Naturwissenschaften. Er half darnach eine Zeit lang dem Astronomen bei seinen Beobachtungen in der Sternwarte, wirkte als Privatlehrer und als Lehrer der Mathematik an Schulen und hielt auch im Studentenverein höchst lebendige und anziehende Vorträge über Astronomie; aber er war sich noch immer nicht im Klaren, zu welchem Zweige der Wissenschaft ihn seine noch schlummernden Fähigkeiten bestimmten. Obwohl er sich seiner Tüchtigkeit wohl bewusst war und seine geistige Kraft fühlte, hatte er doch noch nicht das Feld gefunden, auf dem er dieselbe offenbaren konnte. Zu dieser Zeit peinigten ihn Zweifel, ob er je seinen rechten Beruf finden werde und es befiel ihn die Sehnsucht nach einer seinem Talent entsprechenden Thätigkeit; er war darüber tief unglücklich, so dass seine Freunde, welche sehr wohl seinen hohen Werth erkannten, in Sorge um ihn waren.

Da kam zwei Jahre nach dem Bestehen der Reallehrer-Prüfung fast plötzlich, wie die Blüthen eines Baumes sich an einem warmen Frühlingstage entfalten, die Hilfe aus der Noth. Es waren Lie zufällig unter vergessenen Büchern der Uni-

versitäts-Bibliothek die die moderne Geometrie begründenden Arbeiten von Poncelet, Monge und Plücker in die Hand gefallen, welche ihn mächtig erschütterten. In einer derselben war am Schlusse ein Problem ungelöst geblieben, das der Autor einem grösseren Geiste vorbehielt; in kürzester Zeit hatte Lie die Lösung gefunden und zu seiner unsagbaren Freude sein Talent und seine Lebensaufgabe erkannt.

Nun begann bei seiner kraftvollen und stürmischen Natur mit elementarer Gewalt ausbrechend ein rastloses Studium der Geometrie, aus dem ihm alsbald neue Ideen erwuchsen und aus deren Verfolg er in erstaunlich kurzer Zeit sich zum vollendeten, die schwierigsten Theile der modernen Geometrie meisternder Mathematiker entwickelte. Bei seiner grossen Produktivität wünschte er seine Entdeckungen sich zu wahren. Er gab daher in der ersten Zeit kleine Flugblätter heraus, welche nur kurze Thesen ohne den Beweis enthielten; diese losen Blätter sammelte er (1869) zu einer 16 Seiten umfassenden Abhandlung, Repräsentation des Imaginären der Plangeometrie, in der schon seine originalen Ideen in der modernen Geometrie, seine Imaginärtheorie, enthalten waren, aus denen sich nach und nach seine späteren denkwürdigen Arbeiten auf diesem Gebiete ableiteten; die Abhandlung erschien auch in Crelle's mathematischem Journal, wurde aber wegen des Mangels an Beweisen vielfach nicht verstanden und nicht genügend gewürdiget. Namentlich fand er in der Heimath noch nicht das volle Zutrauen in seine Fähigkeiten, da seinem Fluge die etwas älteren einheimischen Mathematiker nicht zu folgen vermochten.

Die Arbeit verschaffte ihm aber doch durch die Befürwortung von Broch ein Staatsstipendium zu einer Studienreise nach Berlin und Paris, wo er (1869 und 1870) mit den dortigen hervorragenden Mathematikern zusammentraf und seine letzte Durchbildung förderte.

Die berühmte Berliner Schule unter Weierstrass, Kummer und Kronecker, welche besonders die Funktionentheorie und

andere algebraische Theorien ausgebildet hatte, fesselte ihn nicht so sehr, er fühlte sich durch seine Neigung zu geometrischen Anschauungen mehr zu der geometrischen Schule von Clebsch in Göttingen hingezogen.

In Berlin und Paris hatte er das Glück mit dem talentvollen jungen Mathematiker Felix Klein zusammenzutreffen, welcher die gleiche Neigung zur Geometrie hatte und sein Freund sowie mehrere Jahre sein Mitarbeiter auf diesem Gebiete wurde. Der Pariser Aufenthalt wurde jedoch jäh unterbrochen durch den deutsch-französischen Krieg; Klein musste nach Deutschland zurückkehren, und Lie wurde 30 Tage lang in Fontainebleau gefangen gehalten, da man die Zeichen in seinen mathematischen Papieren für die geheime Chiffreschrift eines preussischen Spions hielt; es befreite ihn daraus nur das Zeugniss eines jungen französischen Mathematikers, des jetzigen berühmten Geometers Darboux, der den beiden Freunden nahe getreten war und später viel that, um Lie's Bedeutung für die Geometrie darzuthun. Der Umgang mit Klein war für Lie von besonderer Bedeutung; die beiden in der neueren Geometrie völlig Bewanderten ergänzten sich gegenseitig in glücklicher Weise, Lie durch die Fülle der Ideen und Klein durch die Feinheit und Klarheit der Darstellung. Sie bearbeiteten gemeinsam die Ueberführung der Gruppentheorie in der Gleichungslehre auf geometrische Probleme, kurze Zeit in Paris und dann in der Abhandlung: „Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“ (1871) bei Zusammenkünften in Göttingen, Erlangen und Düsseldorf; darnach theilten sie die Arbeit, indem Klein die Anwendung der Theorie auf diskontinuirliche Gruppen in der Geometrie übernahm, Lie die kontinuirlichen Gruppen, in denen er bald seine grösste Leistung vollbringen sollte. Lange aber unterrichtete Lie den Freund von seinen neuen Ideen in einem lebhaften wissenschaftlichen Briefwechsel. Nach seiner Rückkehr in die Heimath promovirte er und habilitirte sich alsbald als Privatdozent an der Universität Christiania,

woselbst für ihn in Anerkennung seiner wissenschaftlichen Verdienste (1872) wesentlich auf Befürwortung von Clebsch und Cremona ein besonderer Lehrstuhl der Mathematik an der Universität gegründet wurde, um ihm die Möglichkeit zu geben, sich ganz seinen Studien widmen zu können. In wenigen Jahren hatte sich Lie zu einem der berühmtesten und verdientesten Mathematiker seiner Zeit emporgeschwungen.

Lie's erste grössere Abhandlung enthält eine Fortsetzung seiner Imaginärtheorie mit Betrachtungen über eine merkwürdige Transformation gerader Linien in eine Kugel, welche zu seiner Kugelgeometrie führte. Er kam bald bei weiterer Verfolgung dieser seiner Curventheorie zu zwei anderen neuen Gebieten der Mathematik, nämlich zu der Lehre von den geometrischen Transformationen und zu der berühmten Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Er hat diese Untersuchungen in zwei Abhandlungen niedergelegt; in seiner 1870 erschienenen Dissertation, welche in schwedischer Sprache geschrieben ist, und in einer zweiten Schrift, die wie alle seine übrigen Mittheilungen in deutscher Sprache erschienen ist. Und daran reihte sich endlich die Gründung und Ausbildung eines weiteren mathematischen Gebietes, die Theorie der kontinuirlichen Transformations-Gruppen, womit Lie's Wirken seinen Höhepunkt erreichte. Diese grosse fundamentale Theorie, welche für die Behandlung der verschiedensten Gebiete der Mathematik bestimmend geworden ist, hat er nicht nur in allen wesentlichen Theilen entworfen und ausgebaut, sondern auch in den verschiedensten Gebieten: in der Lehre von den totalen und partiellen Differentialgleichungen, in der Geometrie und Invariantentheorie wie in der Mechanik angewendet. Seine Arbeiten haben eine völlig neue Fragestellung eröffnet und behandelt, deren Weiterentwicklung heute ein umfangreiches Gebiet der modernen mathematischen Literatur bildet. Es gehören dazu: die Berührungstransformationen und seine Behandlung der Minimalflächen. In den drei Jahren von 1871—1873 concentriren sich diese seine grossen Theorien und er verbrachte sein ganzes übriges Leben in rastloser Arbeit, um dieselben durchgearbeitet

darzustellen. Aber selbst der ungewöhnlichen Kraft von Lie wurde die Arbeit zu viel; er suchte nach Hilfe bei der begonnenen Herausgabe seiner Werke, welche er in dem durch die Vermittlung der Leipziger Mathematiker Klein und Mayer mit einem Staatsstipendium (1884) zu ihm gesandten Dr. Friedrich Engel fand, der sich in dem neuen Fache ausbilden sollte. So kam in den Jahren 1888—1893 die Theorie der Transformationsgruppen in drei starken Bänden heraus; 1891 die Vorlesungen über die Differential-Gleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen; 1893 die Vorlesungen über kontinuirliche Gruppen; 1896 die Geometrie der Berührungstransformationen und seit 1883: die Untersuchungen über die Theorie der Differential-Invarianten und ihre Anwendung auf die Theorie der höheren partiellen Differentialgleichungen.

Mittlerweile hatte Lie (1886) einen höchst ehrenvollen Ruf als Klein's Nachfolger für den geometrischen Unterricht nach Leipzig erhalten. Es war dies ein grosser Verlust für Christiania, jedoch erschien ihm der Wirkungskreis an einer der grössten und ruhmreichsten deutschen Universitäten ein bedeutenderer zu sein. Sein Aufenthalt gestaltete sich daselbst jedoch nicht so glücklich als er und seine Freunde für ihn gehofft hatten, trotz der bedeutenden Wirksamkeit und der grossen Anzahl lernbegieriger Schüler aus allen Ländern. Es begann in Folge der rastlosen aufreibenden Arbeit seine sonst so eiserne Gesundheit zu wanken. Trübe Lebensanschauungen bemächtigten sich seines so klaren Geistes, die sich zeitweise bis zur Melancholie steigerten; er wurde bitter gegen Andere, was sich namentlich in allzuscharfem Urtheile gegen deutsche Mathematiker, besonders gegen Helmholtz, in dem Vorwort zum dritten Bande der Transformations-Gruppen äusserte. Eine tiefe Sehnsucht nach den einfacheren Verhältnissen der Heimath, deren Berge und Thäler er über alles liebte, befiel ihn. Als man diesen Jammer in Christiania erfuhr, stellte eine Anzahl der bedeutendsten Männer den Antrag an die Nationalversammlung Lie einen Ehrengehalt zu bewilligen, damit er in der Heimath leben könne. Er kam 1898 nach 12jährigem Aufent-

halt in Leipzig zurück, aber nicht um sich zu erholen, sondern um zu sterben.

So ist denn der geniale Mathematiker von seltener reicher Begabung und Tiefe der Gedanken zu früh für die Wissenschaft dahingegangen. In der Begeisterung für sein Fach hat der lebendige energische Mann, in unerschütterlichem Glauben an bedeutende Leistungen und eine ehrenreiche Zukunft, in kürzester Zeit eine wahrhaft kolossale Arbeit bewältigt. Cremona sagte bewundernd von seinem Wirken: „manchmal habe ich mir selbst gesagt, dass ich mit Freude auf alle meine Arbeiten verzichten würde, wenn ich so glücklich gewesen wäre, das entdeckt zu haben, was Lie entdeckt hat.“ Seine Arbeiten werden noch auf lange Zeit hinaus befruchtend auf die verschiedensten Gebiete der mathematischen Forschung wirken.

Eugenio Beltrami.[1])

Der berühmte italienische Mathematiker Eugenio Beltrami, der Präsident der k. italienischen Akademie der Wissenschaften dei Lincei in Rom, ist am 18. Februar 1900, 64 Jahre alt, gestorben.

Er ist geboren zu Cremona am 16. November 1835. Nachdem er in seiner Vaterstadt das Lyzeum besucht hatte, trat er an die Universität zu Pavia über, woselbst er sich während drei Jahren mit dem grössten Eifer mathematischen Studien hingab. Da er nicht in glänzenden Verhältnissen lebte, war er genöthiget, sich alsbald nach dem Verlassen der Universität eine Stellung zu suchen und in die Administration der Eisenbahnen einzutreten. Jedoch beschäftigte er sich in seinen Freistunden mit mathematischen Problemen und wurde schon in einigen Jahren durch seine vortrefflichen Arbeiten so bekannt, dass die italienischen Universitäten sich den ausgezeich-

---

[1]) Gedächtnissrede gehalten von Enrico D'Ovidio, in der physikal.-math.-naturwiss. Classe der k. Akademie der Wiss. zu Turin (Jahrgang 1899—1900).

neten Gelehrten streitig machten. Er vertrat nach einander die Lehrfächer der Analysis, der Geodäsie, der Mechanik und der mathematischen Physik an den Universitäten zu Bologna und Pisa, darnach wiederum zu Bologna, dann zu Rom und Pavia; zuletzt war er Professor der mathematischen Physik und höheren Mechanik an der Universität zu Rom.

Beltrami hat in fast allen Zweigen der Mathematik Glänzendes geleistet. Ich entnehme dem Wahlvorschlage meines verehrten Collegen W. Dyck vom Jahre 1899 die folgende Schilderung der wissenschaftlichen Verdienste Beltrami's.

Die wichtigsten Arbeiten Beltrami's gehen auf die sechziger Jahre zurück und beziehen sich auf Differentialgeometrie und auf Nichteuklidische Geometrie. Besonders durch die fundamentalen Untersuchungen Riemann's „über die Axiome, welche der Geometrie zu Grunde liegen", waren die Fragen der Nichteuklidischen Geometrie in den Vordergrund des mathematischen und philosophischen Interesses gerückt. Beltrami gab in seinem „Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea", in der Abhandlung über eine gewisse Abbildung der Flächen von constanter Krümmung auf die Ebene („Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette") und in der „Teoria fundamentale degli spazii di curvatura costante" eine überaus anschauliche Darlegung der sogenannten Lobatschewskyschen Geometrie in der Entwicklung der Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen, und verallgemeinerte diese Untersuchungen in der zuletzt genannten Abhandlung auf dreidimensionale und weiter auf n-dimensionale Gebilde, deren geometrische Resultate für drei Dimensionen Helmholtz in einer bekannten populären Darstellung weiteren Kreisen zugänglich gemacht hat.

Die Arbeiten Beltrami's zur Nichteuklidischen Geometrie sind für immer mit der Geschichte dieser Theorie verknüpft.

Die Untersuchungen über die Differentialparameter gehen auf Lamé zurück, welcher im Gebiete von drei Dimensionen die Bedeutung dieser Invarianten für die mathematische Physik,

wie für die Theorie der krummlinigen Coordinaten entwickelt hat. Beltrami hat zuerst in der Arbeit „Sulle teorica dei parametri differenziali“ die Theorie der Differentialparameter für ein zweifach ausgedehntes Gebiet entworfen und insbesondere unter Zugrundelegung der Invarianteneigenschaft dieser Gebilde für eine grosse Reihe zunächst von geometrischen Fragen verwerthet. — Auch in den späteren physikalischen Arbeiten Beltrami's ist es die Lehre von den Differentialparametern, welche ihn naturgemäss zu Anwendungen in der Potential-Theorie, in Hydrodynamik und Elasticitätstheorie, in der Elektricitätstheorie und der Lehre vom Magnetismus, kurz in allen Gebieten, wo der Ausdruck $\Delta_2 u$ eine Rolle spielt, führt. Dabei legte Beltrami seinen Untersuchungen mit Vorliebe krummlinige Coordinaten zu Grunde unf formulirt sie für n-dimensionale und nichteuklidische Räume. Im besonderen hat Beltrami die Sätze von Green und Gauss mit ihren mannigfachen Anwendungen verallgemeinert, präcisirt und ausgebaut.

Endlich hat Beltrami eine grosse Reihe von Einzelarbeiten aus fast allen Gebieten der Geometrie und der mathematischen Physik veröffentlicht, in denen er theils durch elegante Zusammenfassung bekannter Resultate, theils auf Grund durchaus neuer Ideen und Betrachtungen fördernd gewirkt hat. Hierher gehören insbesondere die Untersuchungen über die Biegung der Regelflächen, über Minimalflächen, über die Kinematik der Räume von konstantem Krümmungsmaass, über geodätische Linien; dann auf dem Gebiete der mathematischen Physik Arbeiten zur Potentialtheorie (Anziehung elliptischer Ringe), zur Hydrodynamik (über schraubenförmig fortschreitende Wirbel), zur Elektrostatik (über gewisse Analogien zwischen den Problemen der Elektrostatik und Thermodynamik) und Andere mehr.

Beltrami hat ohne Frage mit Cremona und Brioschi am nachhaltigsten unter allen älteren italienischen Mathematikern auf die Entwicklung der Mathematik in Italien eingewirkt.

Durch seine wissenschaftliche Thätigkeit, durch den Scharfsinn und die vollendete Reife seiner Arbeiten, war er eine Zierde der Universität und der Akademie zu Rom. In seiner

hohen Stellung, auch als Mitglied des obersten Rathes für den öffentlichen Unterricht, lebte er ganz für die Wissenschaft und war stets bereit dieselbe zu fördern, wo es ihm möglich war. Es ist sehr zu beklagen, dass der ausgezeichnete Mathematiker so bald nach seinem ebenso hervorragenden Vorgänger Francesco Brioschi, der am 14. Dezember 1897 starb, aus dem Leben geschieden ist; die mathematische Wissenschaft in Italien hat durch den Heimgang dieser beiden Gelehrten einen höchst empfindlichen Verlust erlitten.

Wilhelm Gottlieb Hankel.[1])

Mit Wilhelm Hankel ist der älteste der deutschen Physiker, dessen Arbeiten bis in die dreissiger Jahre zurückreichen, aus dem Leben geschieden. Er hat mehrere Generationen an sich vorüber gehen sehen und der Entwicklung der Physik durch sechs Jahrzehnte folgen können. Er ist als Senior der Universität Leipzig und der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, zu deren Zierden er einst gehörte, am 18. Februar 1899, 85 Jahre alt, gestorben. In unablässiger Arbeit hat er sich bedeutende Verdienste um die Physik, insbesondere um den Ausbau der Lehre von der Elektricität, erworben. Seit dem Jahre 1859 gehörte er als auswärtiges Mitglied unserer Akademie an.

Sein Lebensgang war der eines einfachen stillen Gelehrten. Am 17. Mai 1814 zu Ermsleben, einem kleinen Städtchen am Fusse des Harzes, als der Sohn eines Cantors und Lehrers geboren, besuchte er das Gymnasium in Quedlinburg und dann die Universität zu Halle um Naturwissenschaften zu studiren. Er schloss sich daselbst besonders dem verdienstvollen Physiker Schweigger an, bei dem er zu arbeiten begann. Da seine

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von Paul Drude, Rede im Auftrage der k. sächs. Ges. der Wiss. am 14. November 1899; und C. Neumann, Worte zum Gedächtniss an W. Hankel, gesprochen an seinem Grabe am 21. Februar 1899. (Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. 1899 Bd. 51).

Eltern bald starben, musste er sich anfänglich durch Ertheilung von Privatstunden durchbringen, bis ihn, den 21 jährigen, eine Anstellung als Assistent für Physik und dann (1836) die Ernennung als Lehrer an der Realschule der Francke'schen Stiftungen aus seiner misslichen Lage befreiten. In der letzteren Anstalt trat schon seine grosse Lehrergabe hervor.

Im Jahre 1839 erwarb er in Halle den Doktorgrad und habilitirte sich ein Jahr darnach als Privatdozent für Chemie und Physik. Eine schwere Rippenfellentzündung, deren Folgen er lange Zeit spürte, nöthigte ihn die Chemie aufzugeben und sich sorglich zu schonen.

Seine mittlerweile begonnene wissenschaftliche Thätigkeit veranlasste seine Beförderung zum ausserordentlichen Professor an der Universität Halle (1847); 1849 bekam er den Ruf als ordentlicher Professor der Physik und Leiter des physikalischen Instituts der Universität Leipzig, wo er sein langes Leben über verblieb und bis 1887 getreu seines Amtes waltete und, obwohl fast erblindet, bis in die letzten Monate seines Daseins wissenschaftlich thätig war.

Schon seine im Jahre 1839 erschienene Doktordissertation sowie seine Habilitätsschrift handelte von den merkwürdigen Erscheinungen, welche ihn während seines ganzen Lebens beschäftigten und vor Allem sein Ansehen in der Wissenschaft durch die unübertroffene Genauigkeit der Beobachtung begründeten, nämlich von der durch Erwärmen von Krystallen entstehenden Elektricität oder der Pyroelektricität der Krystalle. Er kam dabei zu wichtigen Aufschlüssen über die Beziehungen der Elektricitätsentwicklung zu den Formen der Krystalle; so entdeckte er einen Zusammenhang der pyroelektrischen Erregbarkeit eines Krystalls mit seiner Fähigkeit die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen; dann fand er, dass hemimorph ausgebildete Krystalle wie der Turmalin stark pyroelektrisch erregbar sind; ferner, dass sich der ganze Krystall pyroelektrisch anders verhält, wie Bruchstücke desselben. Zum Nachweis dieser Eigenschaften erfand er sein Elektrometer, ein äusserst bequemes und genaues Messinstrument, da das ge-

wöhnlich angewandte Bohnenberger'sche Goldblatt-Elektroscop für seine Zwecke nicht ausreichte. Seine Arbeiten in dieser Richtung gaben die Anregung zu vielen Untersuchungen prinzipiell wichtiger Fragen.

Der Besitz des feinen Elektrometers veranlasste ihn zu weiteren elektrischen Versuchen. Zunächst zu einer Arbeit über Piezoelektricität, d. i. die beim Zusammendrücken eines Krystalls zwischen isolirenden Backen stattfindende Entwicklung elektrischer Ladungen. Er entdeckte ferner (1877) die wichtige Thatsache, dass durch Bestrahlung mit Licht die Krystalle elektrisch werden können (Photo-Elektricität), besonders der farbige Flussspath. Beim Bergkrystall glaubte er eine besondere Erregung durch die schwächer brechbaren Wärmestrahlen, die er Actino-Elektricität nannte, gefunden zu haben.

Indem er mit seinem Elektrometer die Spannungen, wie sie bei der Berührung verschiedener Metalle mit einander und von Metallen mit Flüssigkeiten entsteht, genau bestimmte (1861—65), lieferte er werthvolle Beiträge zur quantitativen Aufstellung der Spannungsreihe und zur Theorie der galvanischen Kette.

Er untersuchte weiterhin, ebenfalls mit seinem Elektrometer, die Entwicklung von elektrischen Strömen durch Erwärmung und zwar zwischen Metallen und erhitzten Salzen; dann das elektrische Verhalten der Flamme, die bei einigen Gasentwicklungen auftretenden Elektricitäten, und die bei Einwirkung des Lichts auf in Wasser und Salzlösungen eintauchende Metalle entstehenden elektrischen Ströme. Er beschäftigte sich auch mit der atmosphärischen Elektricität, welche er (1852) durch Anwendung der Drehwage auf absolutes Maass zurückführte.

In das Gebiet der Elektrokinematik gehören die Untersuchungen über die thermo-elektrische Spannungsreihe der Metalle, bei der sich ergab, dass die thermoelektrische Potential-Differenz bei grösseren Temperaturdifferenzen eine ganz andere ist wie bei geringen Temperaturdifferenzen. Ferner die Untersuchungen über die Abhängigkeit des elektrischen Leitungs-

widerstandes von der Temperatur. Dann der Nachweis, dass bei Durchleiten eines Wechselstroms durch einen Elektrolyten ein Richtungswechsel des Polarisationsstroms nach Oeffnung des primären Stroms eintritt. Von Interesse ist auch die Beobachtung, dass der spitze negative Pol eines Induktions-Apparates unter geeigneten Umständen nur positive Elektricität an die Luft austreten lässt.

Auch aus dem Gebiete des Magnetismus liegen einige bedeutsame Arbeiten von ihm vor. Er verfolgte die von Savary (1827) entdeckten Erscheinungen der wechselnden Polaritäten an Stahlnadeln, welche durch den Entladungsschlag der Leidener Batterie magnetisirt werden; er erkannte die bedeutenden Kräfte des Magnetfeldes des elektrischen Stromes, welche zum Betrieb starker Arbeitsmaschinen genügen; er machte Messungen über die Kräfte, welche das Wismuth im Magnetfelde erfährt, und Untersuchungen über das magnetische Verhalten von Nickel und Kobalt.

Auch optische Erscheinungen erregten seine Aufmerksamkeit. Es wurde die farbige Reflexion des Lichtes von mattgeschliffenen Flächen beschrieben; Messungen über die Absorption der chemisch wirksamen Strahlen des Sonnenlichts in Quarz, Glas etc. gemacht; die Umkehr der Natriumlinie untersucht; und nachgewiesen, dass zum phosphorigen Leuchten des Fleisches die Gegenwart von Sauerstoff nöthig ist.

Ausser dem Elektrometer gab er noch mehrere sehr brauchbare Messinstrumente an: so den Hitzdraht-Strommesser, dann einen Apparat zur Messung kleiner Zeiträume, den er zur Bestimmung der persönlichen Fehler bei verschiedenen Beobachtungsmethoden sowie zum Nachweis der Verzögerung der Ausbildung des elektrischen Sromes bei vorhandener grosser Selbstinduktion benützte.

Das grösste Verdienst hat sich Hankel zwar als Experimentator durch Auffinden von Thatsachen erworben; er hat aber auch eine für die damalige Zeit sehr beachtenswerthe „neue Theorie der elektrischen Erscheinungen“ aufgestellt, durch welche er eine einheitliche Erklärung für das Wesen der

Elektricität zu geben versuchte. Er ersetzte die gebräuchliche Annahme zweier elektrischer Fluida durch die Vorstellung von kreisförmigen Wirbelbewegungen des Aethers unter Betheiligung der materiellen Theilchen des Leiters; die positive und negative Elektricität unterscheiden sich durch die Richtung der Wirbel. Es werden dadurch auch die Fernwirkungen zwischen elektrisirten Körpern oder elektrischen Strömen in mechanischer Weise durch Vermittlung eines Zwischenmediums, eventuell des Lichtäthers, erklärt. Diese seine Theorie der elektrischen Erscheinungen unterscheidet sich wesentlich von der älteren besonders dadurch, dass in ihr die elektrischen Massen fehlen und durch Geschwindigkeiten ersetzt sind. Sie hat in einigen Stücken Aehnlichkeit mit der neueren Maxwell'schen Anschauung. — Er wandte seine Theorie auch auf die Gesetze der Elektrokinematik in einer vom Ohm'schen Gesetz abweichenden Form an, und suchte ferner daraus die Bewegung des Crookesschen Radiometers abzuleiten.

Die Arbeiten Hankel's finden sich grösstentheils in Poggendorff's Annalen und den Berichten der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften; seine elektrischen Untersuchungen sind in einem Werke gesammelt worden. Mit Freunden hat er eine deutsche Ausgabe der Werke Arago's in 16 Bänden (1854 bis 1860) herausgegeben.

So hat der vortreffliche Gelehrte in seltener Uneigennützigkeit sein ganzes Leben hingebracht, um mit staunenswerther Ausdauer die Kenntniss in einzelnen Theilen der Physik durch das Experiment und die Beobachtung zu erweitern. Er war sich bewusst, dass er im Wesentlichen nur Vorarbeiten liefere, aber auch, dass diese zu einer späteren weiteren Erkenntniss nöthig sind.

Er war ausserdem ein begeisterter und seine Schüler für die Vorgänge in der Natur begeisternder Lehrer; ein edler schlichter Mensch von lauterem Charakter und voll Eifers für die Wahrheit, ein echter Gelehrter alten Schlages, den man ob seiner stillen glücklichen Arbeit bei dem nicht selten unlauteren Getriebe unserer Tage beneiden könnte.

Gustav Wiedemann.[1])

Wenige Tage nach dem Ableben von Hankel ist sein Nachfolger auf dem Lehrstuhle für Physik an der Universität Leipzig, Gustav Wiedemann, gestorben. Er hat sich als experimenteller Forscher durch die Auffindung zahlreicher wichtiger Thatsachen, dann als Schriftsteller durch die Herausgabe eines grossen Werkes „die Lehre von der Elektricität" und als Redakteur der angesehensten deutschen physikalischen Zeitschrift um die Physik und Chemie hohe Verdienste erworben. Er war der letzte der alten Garde von Physikern, welche sich in Berlin um Magnus geschaart und so glänzende Erfolge hatten.

Er wurde am 2. Oktober 1826 als Sohn eines Kaufmanns in Berlin geboren. Er besuchte das Köllnische Realgymnasium daselbst, in welchem die Schüler neben der humanistischen Bildung auch einen vorzüglichen Unterricht in den Naturwissenschaften und der Mathematik erhielten; es sind mehrere bedeutende Naturforscher aus dieser Schule hervorgegangen, z. B. der Physiker Beetz. Der Rektor war damals der verdiente Physiker E. F. August, der Erfinder des nach ihm benannten Psychrometers, auch lehrte daselbst der jüngere Seebeck die Physik und Robert Hagen die Chemie. Diese drei Männer haben offenbar die Neigung Wiedemann's zur Naturwissenschaft erweckt und ausserdem auch sein Oheim, der Mechaniker Gruel, der allerlei einfache Apparate für den physikalischen Unterricht herstellte und bei dem sich der Neffe in Zusammensetzung derselben übte.

An die Universität Berlin übergetreten, studirte er von 1844—1847 Chemie, Mathematik und Physik. Er erwarb sich ein umfassendes Wissen hierin bei den Chemikern Heinrich Rose, Sonnenschein und Mitscherlich, bei den Mathematikern

---

1) Mit Benützung der Rede zur Erinnerung an G. Wiedemann von W. Ostwald in der Leibniz-Sitzung der k. sächs. Ges. d. Wiss. am 14. Nov. 1899; des Nachrufs auf G. Wiedemann von F. Kohlrausch in der deutschen physikal. Ges. am 30. Juni 1899; und des Lebensbildes von H. Helmholtz in den Annalen der Physik und Chemie. N. F. Bd. 50. 1893.

Joachimsthal und Dirichlet, und den Physikern Dove und Magnus.

Der letztere übte auf die aufstrebenden Talente einen grossen Einfluss aus, indem er einen Kreis begabter junger Physiker zur Besprechung der neueren physikalischen Untersuchungen in seinem gastlichen Hause Abends um sich versammelte, und auch einzelne derselben in seinem Privatlaboratorium physikalische und chemische Arbeiten ausführen liess. Es entstand daraus die so einflussreich gewordene Berliner physikalische Gesellschaft und die Herausgabe der „Fortschritte der Physik“. Zu den Stiftern der Gesellschaft gehörten: Beetz, du Bois Reymond, Brücke, Clausius, Heintz, Karsten, Knoblauch, denen sich dann Baeyer, Brunner, Halske, Helmholtz, Pistor, Radicke, Siemens, Traube, Werther und Wiedemann anschlossen. Es wird wohl nicht leicht wieder eine so grosse Anzahl von für die Wissenschaft begeisterten Jüngern sich zusammenfinden, welche nicht nur die reine Physik, sondern auch die physikalischen Vorgänge im Organismus und die Technik gefördert haben.

Wiedemann schloss namentlich mit Helmholtz, welcher Eleve der militärärztlichen Bildungsanstalt war, eine enge Freundschaft; sie studirten gemeinsam die Werke der theoretischen Physik, von Poisson und Anderen, da der Einfluss von Magnus nur die experimentirende Physik zuliess und die Theorie aus Furcht vor dem Wiederaufleben der eben überwundenen unseligen Naturphilosophie abwies.

Im Jahre 1847 erwarb Wiedemann den Doktorgrad mit einer in dem Magnus'schen Laboratorium ausgeführten chemischen Arbeit: „de novo quodam corpore ex urea producto“; dann habilitirte er sich 1851 an der Universität zu Berlin als Privatdozent für Physik unter Vorlage einer physikalischen Schrift: „über elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes“.

Der junge Gelehrte lenkte durch seine schönen experimentellen Arbeiten bald die Aufmerksamkeit auf sich, und es begann eine glänzende akademische Laufbahn. Schon vier

Jahre nach seiner Habilitation erhielt er einen Ruf als Professor der Physik an die Universität Basel; dort trat er zu dem ausgezeichneten Chemiker Schönbein in nahe Beziehungen, dessen Bedeutung erst spät erkannt wurde, weil er bei seinen denkwürdigen Forschungen über die Katalyse seine besonderen Bahnen einschlug; unsere Akademie war wohl die erste, die ihn verstand und auszeichnete.

Es kam dann (1863) die Berufung an das Collegium Carolinum nach Braunschweig; 1866 wurde er Nachfolger des trefflichen Eisenlohr an dem Polytechnikum in Karlsruhe; 1871 erhielt er die Stelle als Professor der physikalischen Chemie an der Universität Leipzig und endlich nach dem Rücktritt von Hankel die Professur für Experimental-Physik daselbst.

Die wissenschaftliche Thätigkeit von Wiedemann lieferte eine grosse Anzahl zum Theil grundlegender Arbeiten, bei denen seine Ausdauer und seine Geschicklichkeit in der Anordnung der Versuche den Erfolg brachten. Sie sind sämmtlich in den Annalen der Physik veröffentlicht.

Nach der erwähnten chemischen Doktor-Dissertation über das Biuret, ein durch Erhitzen von trockenem Harnstoff unter Ammoniakentwicklung entstehendes Zersetzungsprodukt, wandte er sich physikalischen, grösstentheils auf dem Gebiete der Elektricitätslehre und des Magnetismus liegenden Problemen zu.

Noch bei Magnus machte er (1849) die schöne Entdeckung, dass die durch Staubfiguren sichtbar gemachte Ausbreitung einer elektrischen Entladung auf einer Krystallplatte in Kreisen oder Ellipsen, je nach der krystallographischen Beschaffenheit der Platte, erfolgt.

Es kamen dann die ebenfalls schon erwähnten Messungen über die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes von verschiedener Wellenlänge durch die magnetischen Kräfte des galvanischen Stroms.

Zum Theil in Gemeinschaft mit Dr. R. Franz folgten (1853) die Arbeiten über die relative Wärmeleitungsfähigkeit der Metalle, wobei die Temperaturmessung mit dem Thermoelement und der von ihm construirten bequemen Bussole gemacht wurde;

es zeigte sich der merkwürdige enge Zusammenhang zwischen der Leitung der Elektricität und der Wärme.

Noch als Privatdozent begann er Versuche über die elektrische Endosmose und über die anderen Eigenschaften der elektrolytischen Lösungen, welche so viel zur Erkenntniss auf diesem Gebiete beigetragen haben (1852); es wurde dadurch die Abhängigkeit des endosmotischen Druckes von der Stromstärke, der Natur der Diaphragmen und dem Gehalt der Lösungen aufgefunden.

In Basel förderte er seine elektrochemischen Untersuchungen durch Messungen der Leitvermögen von Lösungen (1856), verbunden mit Bestimmungen der Zähigkeit derselben und mit dem Hinweis auf den Zusammenhang der beiden Eigenschaften. Auch beschäftigten ihn die durch Hittorf's Arbeiten angeregten Beobachtungen der Jonen-Wanderung.

Von grösster Bedeutung sind seine umfangreichen Arbeiten über den Magnetismus der Körper, denen er sich fast die ganze Zeit seiner wissenschaftlichen Thätigkeit mit besonderer Vorliebe hingab. Er begann mit Messungen des temporären und permanenten Magnetismus von Stahl- und Eisenstäben verschiedener Gestalt; es folgten mühsame und sinnreiche Untersuchungen über die gegenseitigen Analogien und Einwirkungen der Magnetisirung von Stahl und Eisen und der Torsion derselben, über den Einfluss der Temperaturveränderungen etc. auf beide Arten von Zustandsänderungen und ihre Nachwirkungen, wodurch enge Beziehungen zwischen dem magnetischen und dem mechanischen Verhalten der Körper dargethan wurden. Da man sich die Magnetisirung des Eisens als einen mechanischen, durch die Drehung der kleinsten Theilchen bedingten Vorgang vorstellte, so waren die Folgen bei der mechanischen Aenderung in der Lage der Theilchen von grösstem Interesse.

In Braunschweig begann er äusserst interessante Untersuchungen über die Magnetisirung der Salze, welche später in Karlsruhe und Leipzig fortgeführt wurden; er fand das additive Gesetz des magnetischen Verhaltens der chemischen Verbindungen; zuletzt zog er aus dem Unterschied im Magnetismus

des colloidalen Eisenoxyds von dem der Ferrisalze Schlüsse über die chemischen Gleichgewichtsverhältnisse, woraus der Dissociationszustand der Stoffe in Lösung in einem bestimmten Falle quantitativ ermittelt werden konnte. In diese Zeit fallen auch seine ersten Versuche über den Dampfdruck krystallwasserhaltiger Salze; dieser Dissociationsdruck des Wasserdampfs bei verschiedenen Temperaturen zeigte sich nur von der Temperatur und nicht von den relativen Mengen der anwesenden Stoffe abhängig.

In Karlsruhe machte er mit Rühlmann die ersten messenden Versuche über Funkenentladung durch verdünnte Gase, welche für Andere eine reiche Quelle wichtiger Entdeckungen geworden sind.

Der Physiker Wilhelm Weber hatte bei seinem Weggange von Leipzig einen grossen Induktionsapparat zurückgelassen, mit welchem er die elektromagnetische Widerstandseinheit nach absolutem Maass bestimmen wollte. Wiedemann hat in einer grossen, ausserordentlich sorgfältigen Arbeit mit diesem Instrumente den Widerstand des Quecksilbers, den Werth des Ohm, ermittelt.

Obwohl sich Wiedemann als Forscher einen sehr bedeutenden Namen gemacht hat, so liegt darin doch nicht sein hauptsächlichstes Verdienst um die Wissenschaft; dasselbe hat er sich vielmehr durch die Bearbeitung seines mustergiltigen grossen Werkes: „die Lehre von der Elektricität" erworben. Durch die Beschäftigung mit den Erscheinungen des Galvanismus und des Elektromagnetismus hatte er das Bedürfniss empfunden der Literatur näher nachzugehen, und schon in Berlin eine Sammlung aller einschlägigen Arbeiten begonnen; nach zehnjähriger Thätigkeit gab er dieselbe, kritisch gesichtet und methodisch geordnet, 1861 von Basel aus als Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus in zwei Bänden heraus. Es war dadurch für die strömende Elektricität ein ähnliches Hilfsmittel entstanden wie vorher für die Reibungselektricität durch Peter Riess. Da die scheinbaren durchgreifenden Unterschiede zwischen der reibenden und der strömenden Elektricität immer

mehr sich verwischten, so bearbeitete er das gesammte Gebiet der Elektricität und veröffentlichte (1882—1885) sein vierbändiges grosses Werk: „die Lehre von der Elektricität"; er hat sich mit demselben vierzig Jahre lang, bis an das Ende seines Lebens, beschäftigt und es sind von ihm vier Auflagen (1898) erschienen. Durch dieses sein eigentliches Lebenswerk, gleich hervorragend durch Vollständigkeit und Zuverlässigkeit, hat er dem Forscher in dem grossen, fast unübersehbaren Gebiete ein unentbehrliches Hilfsmittel geliefert und einen mächtigen Einfluss auf die Entwicklung der Wissenschaft ausgeübt; man kann wohl sagen, dass das Werk an der grossartigen Entwicklung der wissenschaftlichen und technischen Elektrik in den letzten Dezennien einen reichlichen Antheil hat. Wir besitzen dadurch eine musterhafte Geschichte der Lehre von der Elektricität im 19. Jahrhundert.

Endlich liegt noch ein drittes, nicht minder geringes Verdienst von Wiedemann vor, nämlich durch die Leitung der Annalen der Physik und Chemie nach dem Tode des verdienten Poggendorff seit dem Jahre 1877. Durch seine ausgebreiteten Kenntnisse und seine Erfahrungen in der experimentellen Physik sowie durch seine Unpartheilichkeit war er ganz besonders dazu befähigt diese für die Physik so wichtige Zeitschrift zu übernehmen. Er hat das verantwortungsvolle Amt in ausgezeichneter Weise im Sinne Poggendorff's fortgeführt; es mussten in Einigem, entsprechend den Erfordernissen der neueren Zeit, Aenderungen vorgenommen werden: der Inhalt musste gegenüber den der Physik nahe stehenden Zweigen der Naturwissenschaft, die früher in den Annalen vertreten waren, schärfer abgegrenzt werden; die Uebersetzungen von Arbeiten in nichtdeutscher Sprache fielen weg, zu umfangreiche Abhandlungen konnten nicht mehr aufgenommen werden; es wurden endlich die werthvollen Beiblätter mit seinem Sohne Eilhard ins Leben gerufen, in denen alle neuen Erscheinungen auf dem Gebiete der Physik rasch zur Kenntniss der Fachgenossen gebracht werden. Wiedemann hat 65 Bände der Annalen herausgegeben. Der im Jahre 1893 veröffentlichte 50. Band wurde ihm mit

einer von Helmholtz geschriebenen Skizze seiner Verdienste um die Wissenschaft gewidmet und an seinem 50 jährigen Doktorjubiläum im Jahre 1897 dankten ihm abermals die Physiker durch Ausgabe eines besonderen Bandes der Annalen (dem 63 ten).

Im Jahre 1897 zog er sich wegen Kränklichkeit von der Lehrthätigkeit zurück; am 23. März ist er dahingeschieden.

Der Name des berühmten Gelehrten wird in der Wissenschaft noch lange fortleben.

Robert Bunsen.[1])

Am 16. August 1899 ist Robert Bunsen im Alter von 88 Jahren in Heidelberg gestorben. Er war wohl die ehrwürdigste Gestalt unter den deutschen Naturforschern; nicht nur die, welche sich mit der Naturwissenschaft beschäftigen, sondern auch alle Gebildeten brachten ihm die grösste Verehrung und Dankbarkeit entgegen wegen seiner ganz ausserordentlichen Verdienste um das Wissen und um die Menschheit; denn er hat durch seine Arbeit viele Gebiete, die Chemie, die Physik, die Mineralogie, die Geologie, die Astronomie und selbst die Medizin mit wichtigen Kenntnissen bereichert, aber auch noch viel weiter gewirkt, indem seine Schöpfungen der Wissenschaft neue fruchtbare Bahnen eröffnet, ja die Grenzen unseres Naturerkennens hinausgeschoben haben.

Er war einer der genialsten und eigenartigsten Forscher von der feinsten Beobachtungsgabe, ein Gelehrter, der durch unablässige Arbeit sich einen enormen Schatz von Kenntnissen angesammelt und die grössten Erfolge errungen hat. Es ergreift uns Wehmuth, dass ein so glänzender Geist, zu dem man seit über 60 Jahren mit Stolz als auf einen der Führer aufsah, nicht mehr unter den Lebenden weilt, aber man blickt doch mit freudigem Gefühl auf das schöne, ungestört verlaufene Leben

---

[1]) Heinz, Münchener mediz. Wochenschrift 1899 Nr. 44.
Landolt, Berichte der deutschen chem. Ges. 1899 Nr. 14.
Curtius, Akademisches Gedenkblatt, Heidelberg 1900.
Chemiker-Zeitung 1895 I. S. 523.

zurück, wie es nur selten einem Sterblichen beschieden war, voll köstlicher Arbeit und im Drange nach Erkenntniss nur dem Dienste der Wissenschaft gewidmet.

Robert Bunsen wurde am 31. März 1811 in Göttingen geboren, woselbst sein Vater Bibliothekar und Professor der Sprachwissenschaften an der Universität war. An den Gymnasien zu Göttingen und Holzminden hatte er sich eine gute klassische Bildung erworben, denn er las noch später gerne lateinische Schriftsteller, Cicero's Reden und Sueton, und schrieb ein elegantes Latein. Trotz dieser jetzt nach der Ansicht Vieler für die Ausbildung in den Naturwissenschaften verkehrten Vorbildung ist er ein Naturforscher ersten Ranges von den grössten praktischen Erfolgen geworden, weil er denken gelernt hat. Mit 17 Jahren bezog er die Universität Göttingen, wo er sich mit Vorliebe mit Physik, Chemie, Geologie und Mineralogie, auch mit Mathematik beschäftigte. In der Chemie war Friedrich Stromeyer, der vortreffliche analytische Chemiker, sein Lehrer, in der Mineralogie und Geognosie der verdienstvolle Hausmann. Schon als Knabe nahm er lebhaftes Interesse an der Geognosie, welches durch Fusswanderungen in der Umgebung Göttingens und im Harz geweckt worden war. Im Jahre 1830 erwarb er im Alter von 19 Jahren den philosophischen Doktorgrad mit einer Dissertation: „enumeratio ac descriptio hyrometrorum“, was in unserer Zeit, in der zu unserem Unglück viel zu viel gelernt, aber nur wenig verstanden wird, eine Unmöglichkeit wäre. Es folgten (1832) ausgedehnte Reisen, zu denen er ein Stipendium erhalten hatte, um sich in den praktischen Zweigen der Chemie durch Besichtigung industrieller Etablissements weiter auszubilden. Dabei arbeitete er in Berlin einige Zeit bei dem Mineralogen Weiss und lernte Heinrich Rose und Mitscherlich kennen. In Giessen traf er den jungen Liebig und Wöhler, die ihre berühmte gemeinschaftliche Untersuchung über das Radikal der Benzoesäure ausführten. Grosse geognostische Exkursionen, namentlich eine mit Mitscherlich in die Eifel gemachte, schärften seinen Blick. Er ging dann nach Paris, wo der Deutsche

damals immer noch seine Ausbildung holen musste; er kam mit Pelouze zusammen, an den er einen Empfehlungsbrief von Liebig erhalten hatte, dann mit Regnault und Reiset, mit Depretz und Anderen; vielfache Anregung brachte der Besuch von Fabriken, besonders der berühmten Porzellanmanufaktur zu Sevres. Von Paris sollte die Reise nach Wien und Oesterreich durch die Schweiz gehen. Er durchwanderte in weiten Touren zu Fuss das schöne Land mit hohem Genuss und kehrte Ende 1833, nachdem er seine physikalischen, chemischen und geognostischen Kenntnisse vervollständigt und auf chemisch-technischem Gebiete viel gesehen hatte, nach Göttingen zurück.

An der Universität daselbst begann Bunsen jetzt seine akademische Laufbahn; mit 22 Jahren habilitirte er sich als Privatdozent für Chemie; er hielt während drei Semestern Vorlesungen und wurde dann (1835) gewürdiget die Vorlesungen des verstorbenen Stromeyer über theoretische und praktische Chemie zu vertreten. Im Jahre 1836 kam der aufstrebende Wöhler, der Professor der Chemie an der höheren Gewerbeschule in Kassel war, als Nachfolger Stromeyer's nach Göttingen und Bunsen ersetzte ihn in Kassel. Bald erhielt er von dort einen Ruf als ausserordentlicher Professor an die Universität Marburg, an der er 1841 zum Ordinarius vorrückte. Nach fast 13 jähriger bedeutsamer Wirksamkeit in Marburg kam er (1851) an die Universität Breslau, wo nach seinen Angaben ein Laboratorium erbaut wurde; aber schon ein Jahr darauf erfolgte die glückliche Berufung an das schöne Heidelberg als Nachfolger Gmelin's. Er konnte im Jahre 1855 das neue grosse Laboratorium, damals das grösste und am besten eingerichtete in Deutschland, eröffnen, in dem er nun seine segensreiche Wirksamkeit als Lehrer und Forscher begann. Im Jahre 1889 trat er im Alter von 78 Jahren vom Lehramt zurück.

Seine wissenschaftlichen Arbeiten begann Bunsen als Privatdozent; eine rein chemische Arbeit über die Doppelcyanüre in ihrem Verhalten zu Ammoniak hatte er mit Himly gemacht und dann eine weithin bekannt gewordene von praktischer Bedeutung mit Berthold über ein Gegengift gegen die arsenige

Säure. Er suchte die in den Magen meist in Schweinfurter Grün gelangte arsenige Säure in eine unlösliche Verbindung überzuführen, als welche sich die mit Eisenoxydhydrat am besten eignete; er empfahl ein frisch bereitetes Gemisch von Eisenvitriol mit gebrannter Magnesia, wobei sich die ausfallende Eisenbase der arsenigen Säure und Bittersalz bildet.

In Kassel begann er seine einzige grössere, rein chemische Arbeit: es sind die von 1837—1842 fortgeführten denkwürdigen Untersuchungen über die Kakodylreihe, die ihn, den 26 jährigen, alsbald in die erste Reihe der Chemiker erhoben. Dieselben sind von grösster Bedeutung für die Entwicklung der Radikal-Theorie und der Chemie der Kohlenstoffverbindungen geworden. Man hatte bei der Destillation von Arsenik mit essigsaurem Kali die sogenannte Cadet'sche Flüssigkeit von grosser Giftigkeit, eckelhaftem Geruch und leichter Selbstentzündlichkeit gewonnen, deren Zusammensetzung unbekannt war. Trotz der Gefährlichkeit der Substanz gieng Bunsen an die Untersuchung, bei welcher in Folge der Explosion eines Glasrohrs durch einen Splitter sein eines Auge erblindete und die entströmenden giftigen Dämpfe sein Leben gefährdeten. Es war damals die Radikal-Theorie aufgestellt worden; es sollten nämlich in den organischen Verbindungen gewisse Gruppen von Elementen, die bei den Reaktionen unverändert bleibenden zusammengesetzten Radikale, die Rolle der Elemente der unorganischen Verbindungen spielen; als solche Radikale hatte man das Cyan und das der Benzoesäure erkannt. Bunsen gewann aus der Cadet'schen Flüssigkeit ein aus Arsen, Kohlenstoff und Wasserstoff bestehendes Radikal, das Kakodyl, das sich mit Sauerstoff verbindet (Alkarsin) und viele andere Verbindungen eingeht wie das Natrium. An die Entdeckung dieses neuen Radikals, und noch dazu eines so merkwürdigen arsenhaltigen, knüpften sich lebhafte Erörterungen der Chemiker. Aber Bunsen blieb dem Streite fern, ja er kümmerte sich nicht um die davon ausgehende umgestaltende Bewegung in der organischen Chemie. Er, der den grössten Anstoss gegeben und von dem man hätte erwarten sollen, dass er alle Kraft aufbieten würde, die Sache

zu verfolgen, stand theilnahmslos da und hat niemals mehr sich mit einer Aufgabe der organischen Chemie beschäftigt. Hat er geglaubt, dass in dieses dunkele Gebiet nicht so bald ein erhellender Lichtstrahl dringen werde? Jedenfalls erschienen seinem universellen Geiste andere Dinge interessanter zu sein. Er gieng an die Untersuchung der bei dem Hochofenprozess sich entwickelnden Gase, der Gischtgase, und zeigte, dass ein grosser Theil der Wärme dadurch verloren gehe und wie man dieselbe für die Hüttenindustrie wieder nutzbar machen kann. In diese Zeit fällt die Construktion seiner Zink-Kohlenbatterie für starke elektrische Wirkungen, die er dann zu seinen elektrochemischen Versuchen benutzte und die lange für die Gewinnung elektrischen Lichtes und für die Galvanoplastik Anwendung fand.

Von Marburg aus unternahm er (1846) eine merkwürdige und für die Wissenschaft fruchtbare Reise nach der Insel Island, indem er sich an der von dem Geologen Sartorius von Waltershausen veranstalteten Expedition mit dem Mineralogen Bergmann betheiligte; er sollte dabei die chemische Thätigkeit der dortigen Vulkane, insbesondere deren gasförmige Emanationen, untersuchen. Er kehrte nach 6 Monaten nach grossen Entbehrungen und Anstrengungen mit einem reichen Material für wissenschaftliche Arbeit, namentlich an in Glasröhren eingeschlossenen Gasproben, zurück, dessen Abarbeitung ihn bis zum Jahre 1854 in Anspruch nahm. Die Resultate der Reise, welche er in einem gedruckten Schreiben an Berzelius vorläufig zusammenfasste, waren für die Geologie höchst bedeutsame: aus der Beschaffenheit der vulkanischen Gase ergaben sich wichtige Aufschlüsse, die chemischen Analysen der Eruptivgesteine zeitigten eine Theorie der plutonischen Erscheinungen, er beschreibt die eigenthümlichen Veränderungen der Gesteine durch den Einfluss der Hitze und des Wassers, und erklärt die Geysir-Phänomene d. i. das periodische Auftreten von heissen Wassermassen aus der Erde.

In Marburg und Breslau machte er seine elektrochemischen Untersuchungen über die Abscheidung der Metalle durch den

elektrischen Strom, zu denen seine kräftige Zink-Kohlenbatterie Veranlassung gegeben hat; aus den Lösungen der Chloride stellte er reines Chrom und Mangan, aus den geschmolzenen Chloriden Magnesium, Aluminium, Natrium, Barium, Calcium und Lithium dar. Auch gab er eine Erklärung der Vorgänge bei der Elektrolyse. Die wissenschaftliche Chemie und die Technik haben dadurch gleichermaassen gewonnen. Indem er das metallische Magnesium zu Draht presste und diesen verbrannte, erhielt er das glänzende Magnesiumlicht, dessen chemisch wirkende Strahlen er zur Photochemie anwandte. Die rein dargestellten Metalle dienten dazu ihre specifische Wärme mittelst seines sinnreichen Eis-Calorimeters zu bestimmen und auch die noch unbekannten Atomgewichte derselben festzustellen.

In die erste Heidelberger Zeit (1852—1862) fallen die mit Roscoe gemeinschaftlich ausgeführten äusserst mühevollen photochemischen Untersuchungen. Sie bedienten sich zur quantitativen Bestimmung der chemischen Wirkungen des Sonnenlichtes eines Gemisches von gleichen Raumtheilen Wasserstoff und Chlor, das bei Einwirkung des Lichtes in Salzsäure übergeht. Durch viele, mit den sinnreichsten Apparaten angestellten Beobachtungen haben sie die chemischen Wirkungen des in der Atmosphäre zerstreuten Lichtes und des direkten Sonnenlichtes ermittelt. Auch haben sie dabei die ungeheure chemische Kraft berechnet, welche die Sonne durch ihr Licht in den Weltraum sendet.

Um dieselbe Zeit machte er eine maassanalytische Methode von allgemeiner Verwendbarkeit, die Jodometrie, bekannt, welche die höheren Oxydationsstufen der Elemente mit Sicherheit erkennen lässt.

Jahre lang hat er sich mit der Analyse von Gasgemischen abgegeben, schon bei der Untersuchung der Hochofengase und der Geysirgase; im Jahre 1857 erschien sein abschliessendes klassisches Buch „gasometrische Methoden“, durch das er die Gasanalyse, unter Erfindung zahlreicher Hilfsmittel, zu der gleichen Vollkommenheit wie die Gewichts- und Maassanalyse erhob. Es findet sich in dem Büchlein ausserdem eine Fülle

werthvollster Angaben: die Bestimmung des specifischen Gewichts der Gase, ihrer Diffusions- und Absorptions-Erscheinungen, sowie ihrer Verbrennungserscheinungen. Er erwähnt darin auch der Hilfe, welche ihm der leider zu früh verstorbene, zu den grössten Hoffnungen berechtigende Dr. August Pauli aus München bei den Absorptions-Versuchen der Gase geleistet hat. Die Methoden von Bunsen wurden zuerst von seinem Schüler Lothar Meyer zur genauen Untersuchung der Blutgase angewendet, sowie auch vielfach zur Ermittlung der Zusammensetzung der ausgeathmeten Luft, wodurch in diese Vorgänge ein helles Licht geworfen worden ist.

Zu allen diesen Verdiensten gesellte sich nun seine bekannteste und glänzendste Schöpfung, die mit Kirchhoff gefundene Spektralanalyse. Im Jahre 1861 erschien ihr epochemachendes Werk: „chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen". Es ist wohl kaum eine Entdeckung von gleicher Tragweite für die ganze Wissenschaft gemacht worden als diese und zwar nicht durch eine zufällige Beobachtung, sondern durch systematische, die Erscheinungen erklärende Untersuchungen. Zuerst wurden mit Hilfe der nicht leuchtenden Flamme des Bunsen-Brenners in dem in der optisch-astronomischen Werkstätte von C. A. Steinheil in München entstandenen ersten Spektroscop die merkwürdigen farbenprächtigen Spektren der einzelnen, von Bunsen rein dargestellten Metalle festgestellt. Glühende feste Körper geben ein continuirliches Farbenspektrum ohne dunkle Linien, glühende Gase senden Licht von bestimmter Farbe aus und geben daher unterbrochene, aus einzelnen farbigen Linien bestehende Spektren. Dabei fiel es auf, dass die gelbe Natronlinie mit der Fraunhofer'schen dunkeln D-Linie des Sonnenspektrums zusammenfiel. Es zeigte sich ferner, dass wenn man Drummond'sches Kalklicht mit einem continuirlichen Spektrum ohne dunkle Linien durch glühenden Natriumdampf gehen lässt und dann durch ein Prisma zerstreut, an Stelle der gelben Natriumlinie eine schwarze Linie auf hellem farbigen Grund auftritt. Diese auffallende Erscheinung fand durch Kirchhoff's eindringenden Verstand ihre Deutung: ein gas-

förmiger Körper absorbirt diejenigen Strahlen, welche er im leuchtenden Zustande aussendet. Da das Sonnenspektrum die Fraunhofer'schen dunkeln Linien giebt, so mussten die beiden Forscher folgern, dass vor dem festen leuchtenden Kern der Sonne eine Gasatmosphäre sich befindet, welche glühende Natriumdämpfe enthält; auch die übrigen Fraunhofer'schen Linien stimmen mit den hellen Linien irdischer Stoffe überein. Dadurch waren die bis dahin unverstandenen Fraunhofer'schen dunkeln Linien erklärt. Indem sie die Spektra der Himmelskörper untersuchten, fanden sie, aus welchen Urstoffen ihre Gashülle oder Photosphäre besteht; es sind auf unserer Erde vorkommenden Stoffe, denn das in der Sonne gefundene neue Element Helium that später Ramsay in einigen seltenen norwegischen Mineralien dar. So entstand eine neue Wissenschaft, die Astrophysik: die Planeten geben reflektirtes Sonnenlicht und liefern daher das Sonnenspektrum, die Fixsterne haben drei verschiedene Spektren, eines mit dem der Sonne übereinstimmend. Die Protuberanzen der Sonne wurden als glühende Wasserstoffdämpfe erkannt; die Nebelflecken als glühendes Stickstoff- und Wasserstoffgas.

Mit Hilfe der Spektralanalyse lehrte er die geringsten Mengen der in den Flammen verflüchtigten Elemente und ihrer Verbindungen zu erkennen. Zuerst führte sie zur Entdeckung zweier neuer Elemente, des Rubidiums und Cäsiums, aus der Dürkheimer Salzsoole und aus kalihaltigen Urgesteinen; er zeigte dann dadurch das weit verbreitete Vorkommen des Lithiums und die Spektren seltener Erden, z. B. der Erbin- und Yttererde, des Rhodiums, der Cergruppe, woran sich eine Untersuchung des Didyms, eines Gemisches der Elemente der seltenen Erdmetalle, deren Oxyde mit Thorerde als Hauptbestandtheil das Material zur Herstellung der Auer'schen Glühstrümpfe liefern. Wer weiss nicht, welchen Gewinn die Untersuchung der Absorptionsstreifen gefärbter Stoffe, z. B. des Blutes, für die Chemie und die Physiologie gebracht hat?

Aus seinen Versuchen zur leichten Erkennung der Metalle bei höheren Temperaturen entstanden die an Feinheit und Sorg-

fältigkeit der Beobachtung einzig dastehenden „Flammen-Reaktionen“, mit denen er die analytische Chemie beschenkte.

Es müssen noch erwähnt werden seine Anleitung zur Analyse der Aschen und Mineralwässer, die Methode zur Analyse der Silikate, die Trennung von Antimon und Arsen, seine Bestimmung des Harnstoffs, seine Untersuchung über die Natur der Gase.

Die drei letzten Untersuchungen des 75 jährigen Forschers handelten von der Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen, von der kapillaren Gasabsorption und von einem Dampfcalorimeter zur Bestimmung der specifischen Wärme des Platins, des Glases und Wassers.

Bunsen hat ausserdem eine grosse Anzahl brauchbarer sinnreicher Apparate erfunden, ohne die man sich heut' zu Tage kein Laboratorium denken kann: den Gasbrenner, die Wasserluftpumpe zum Auswaschen der Niederschläge, das Photometer. Er war ein praktisches Genie von ausserordentlicher manueller Geschicklichkeit; zu der Zeit, wo der Chemiker die Apparate selbst herstellen musste, hatte er sich alle Kunstgriffe dazu zu eigen gemacht, er war ein Meister im Glasblasen, ein Experimentator sonder gleichen, der stets die einfachsten Mittel und kürzesten Wege zur Erreichung des Zwecks fand. Alle seine zahllosen Apparate und feinen Messinstrumente stammten von seiner Hand.

Nicht minder gross wie als Forscher war Bunsen als Lehrer. Nie hat wohl ein Lehrer sich seinen Schülern so hingegeben wie er. Unzählige Schüler, die meisten der jetzigen Physiker und Chemiker, haben seine Vorlesungen gehört und in seinem Laboratorium gearbeitet; sie sind alle voll von Dankbarkeit für das, was er ihnen für ihre wissenschaftliche Ausbildung gewesen ist, und für die geistige Anregung, die sie von ihm empfangen haben. Sein Vortrag war einfach und ohne rhetorischen Schmuck, aber von vollendeter Klarheit, begleitet von den instruktivsten Experimenten. In der ersten Zeit hat er die Schüler noch an seinen Arbeiten Theil nehmen lassen und an ihren wissenschaftlichen Beschäftigungen Interesse ge-

nommen, späterhin gab er sich immer mehr dem Unterricht talentvoller Anfänger in der unorganischen Chemie hin und leitete sie in der qualitativen und quantitativen Analyse unermüdlich aus der Fülle seiner Erfahrungen an, ihnen alle die Kunstgriffe, die man nicht aus Büchern lernen kann, zeigend; er lehrte sie die kleinsten Dinge beachton und scharf zu beobachten. Der Entwicklung der organischen Chemie sowie dem Lehren derselben stand er seit seiner Heidelberger Zeit ablehnend gegenüber; die physikalische und analytische Chemie nahmen sein ganzes Sein und Denken in Anspruch.

So liegt das Leben eines der grössten Denker und Experimentatoren aller Zeiten abgeschlossen vor uns, reich an Ergebnissen für die Wissenschaft und für das Wohl der Menschheit. Was ihn vor Allem auszeichnete, das war seine nie ermüdende Lust zum Forschen und zum Lehren, seine scharfe Beobachtungsgabe, welche ihn das Kleinste beachten und anscheinend fern liegende Dinge mit seinen Gedanken verknüpfen liess, seine ausserordentliche Geschicklichkeit in der Ueberwindung experimenteller Schwierigkeiten und sein enormes Wissen und seine Erfahrung auf allen Gebieten der Naturwissenschaft. Indem er mit aller geistigen Anstrengung durch seine wunderbaren Versuche möglichst einwurfsfreie Resultate zu erhalten suchte, war er ein Muster eines echten Naturforschers, der rastlos nach Erkenntniss strebte und die Wahrheit nur um der Wahrheit willen suchte. Ein charakteristischer Zug von ihm ist, dass als im Jahre 1870 seine sämmtlichen Notizen über Spektralbeobachtungen, die Arbeit von Jahren, verbrannten, er nach wenigen Tagen die gleichen Beobachtungen rüstig wieder aufnahm.

Sein Schüler Sir Henry Roscoe hat ihm aber wohl das schönste Denkmal gesetzt durch die Worte: er war gross als Forscher, grösser als Lehrer, aber am grössten als Mensch und Freund. Dass ein so grosser Forscher auch als Mensch gross und geliebt sein kann, dass auch die höchsten Gaben des Geistes mit einer edlen reinen Menschlichkeit verbunden sein können, das ist es, was das Leben des unvergleichlichen Mannes zu

einem so vollendeten und harmonischen macht. Trotz der Höhe seiner Stellung und aller ihm erwiesenen Ehren blieb er, bei aller Vornehmheit seines Wesens, bescheiden und schlicht. Jede Eitelkeit, alles Scheinwesen und das Haschen nach Popularität war ihm im Innersten zuwider. Völlig gleichgültig gegen äussere Anerkennung floh er öffentliche Ehrenbezeigungen, ja er konnte sich trotz der Bitten seiner Freunde nicht entschliessen einem Maler oder Bildhauer zu sitzen. Liebenswürdig und mild im Urtheil war ihm zugleich ein köstlicher Humor und eine gewisse Schalkhaftigkeit eigen; er wollte ein einfacher Mensch und kein Uebermensch sein; Niemand konnte sich dem Zauber seiner Person entziehen.

Er hatte eine grosse Liebe zur Natur; in ihr erholte er sich von der Arbeit, in jüngeren Jahren auf Reisen durch grosse Fusswanderungen, dann durch Spaziergänge und Wagenfahrten in die geliebten Berge und Wälder um Heidelberg. Sein grosser Geist hat es verstanden zu finden, wie man leben muss, um seine Pflicht auf der Erde in wahrer Lebensfreude zu erfüllen.

Charles Friedel.[1]

Am 20. April 1899 ist das correspondirende Mitglied unserer Akademie, der verdiente französische Mineralog und Chemiker Charles Friedel in Paris im Alter von 67 Jahren gestorben. Er war Professor an der Sorbonne und Mitglied der französischen Akademie (1878). Seine zahlreichen Arbeiten auf den Gebieten der Mineralogie, der anorganischen Chemie, besonders aber der organischen Chemie haben zur Förderung dieser Wissenschaften beigetragen. Er hat ferner in seinem Laboratorium, welches längere Zeit das besuchteste in Paris war und in dem der chemische Unterricht nach den von Liebig in Deutschland eingeführten Grundsätzen gegeben wurde, viele Schüler, auch deutsche, ausgebildet und dadurch zur Verbreitung chemischer Kenntnisse in Frankreich gewirkt.

---

[1]) Nekrolog von A. Ladenburg, in den Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft, 1899, Jahrgang 32. S. 3721.

Er wurde am 12. März 1832 in Strassburg geboren, wo sein Vater ein Bankgeschäft leitete; die Mutter war eine Tochter des bekannten Mineralogen G. L. Duvernoy, Professor am Collège de France, woher wohl seine Neigung zu der Mineralogie stammt. Nach Absolvirung des protestantischen Gymnasiums seiner Vaterstadt trat er an die Universität daselbst über, an welcher er naturwissenschaftliche Vorlesungen bei dem Chemiker Pasteur, bei dem Mineralogen Daubrée u. A. hörte. Er war eigentlich für das Geschäft seines Vaters bestimmt, aber seine Vorliebe für die Naturwissenschaft war so mächtig, dass er sich ganz derselben zuwenden durfte.

Als 20 jähriger gieng er nach Paris zu seinem Grossvater Duvernoy; er bildete sich namentlich an der Sorbonne weiter aus und erwarb sich bald den Grad eines Lizentiaten der mathematischen und dann der physikalischen Wissenschaften.

Anfangs war sein Interesse besonders der Mineralogie zugewandt; seine Kenntnisse in dieser Wissenschaft verschafften ihm auch das Conservatorium der Mineraliensammlung der Ecole des Mines (1856—1870), an welcher ihm später ein kleines Laboratorium eingerichtet wurde.

Daneben fieng er an, sich tiefer in die Chemie einzuarbeiten und zwar bei dem auch aus dem Elsass stammenden, hervorragenden Professor der medizinischen Chemie an der Ecole de Médicine, später (1874) der organischen Chemie an der Sorbonne, Adolphe Wurtz; durch die gemeinsame wissenschaftliche Thätigkeit wurden die beiden Landsleute innige Freunde und Friedel war lange Zeit eine wesentliche Stütze für Wurtz im Laboratorium. Nach dem Rücktritt des Mineralogen Des Cloizeaux erhielt Friedel die Vorlesungen an der Ecole normale, dann (1876) die Professur der Mineralogie an der Sorbonne, an deren Laboratorium er eine grosse Anzahl von Schülern der Wissenschaft zuführte, und nach dem Tode von Wurtz (1884) als dessen Nachfolger die Professur für organische Chemie an der Sorbonne. Er war bei seinen Schülern äusserst beliebt und ihr stets bereiter Berather und uneigennütziger Helfer.

Die wissenschaftliche Thätigkeit Friedel's begann mit mineralogischen und krystallographischen Untersuchungen; seit dem Jahre 1856 hat er fast ununterbrochen bis an sein Lebensende eine Reihe werthvoller Arbeiten auf diesem Gebiete veröffentlicht. Es würde zu weit führen dieselben alle hier aufzuzählen. Er hat eine Anzahl neuer Mineralien entdeckt; so z. B. den Wurtzit, ein hexagonales Schwefelzink, dann den Adamit, ein Zinkarseniat. Von vielen Mineralien hat er die chemische Zusammensetzung ermittelt, die des Tellurgoldsilbers, des Adamins, des Nesquehonits, des Delafossits aus Jekaterinburg im Ural, den er als ein Kupferoxydsalz des Eisenhydroxyds erkannte. Es wurden ferner viele krystallographische Bestimmungen von ihm ausgeführt; auch die pyroelektrischen Eigenschaften der Mineralien ermittelt. Die grössten Verdienste erwarb er sich aber mit den Synthesen zusammengesetzter Mineralien; so hat er den Atacamit, Rutil, das Kupfer- und Zinkarseniat, den Hopeït, Mellit, Quarz, Tridymit, Feldspath, Leadhillit, Calciumcarbonat, Wollastonit, Topas, Leucit, Percylith etc. künstlich hergestellt.

Seine ersten grösseren rein chemischen Untersuchungen betreffen die den Aldehyden verwandten Ketone (1857—1866), die man durch Oxydation von Alkoholen oder durch trockene Destillation von zwei einbasischen Fettsäuren erhält. Es gelang ihm die vorher nur ungenügend bekannte Constitution dieser Stoffe sowie des Acetons aufzuklären. Er entdeckte ferner dabei den Aceton-Alkohol, studirte die complizirten Produkte, welche sich neben diesem Körper bei der Reduktion des Acetons bilden und fand das Methylchloracetal auf, welches er in ein gechlortes Propylen verwandelte.

Es folgten (von 1863 – 1870) die wichtigen Arbeiten über die organischen Silicium- und Titan-Verbindungen, die er zum Theil mit Crafts und Ladenburg in eingehender Weise und mit glänzendem Erfolge untersuchte, so dass dieses von ihm allein bebaute Feld heute eines der interessantesten Kapitel der Chemie ausmacht. Bei Beginn seiner Untersuchungen war das Atomgewicht des Siliciums noch nicht sicher bekannt; er war

im Stande das von Dumas und Marignac angenommene Atomgewicht (Si = 28) festzustellen. Es ergab sich aber vor Allem eine völlige Analogie in dem chemischen Verhalten des Siliciums und des Kohlenstoffs, indem von ersterem organische Verbindungen gewonnen werden, in welchen ein Theil des Kohlenstoffs durch Silicium ersetzt ist; er entdeckte die Aethylreihe des Siliciums und that dar, dass das Silicium, ebenso wie der Kohlenstoff, sich mit sich selbst verbindet und dass es vierwerthig ist.

Von Bedeutung war auch der synthetische Aufbau des einen Componenten der Fette, des Oelsüsses oder Glyzerins, aus den Elementen mit Silva (1871—73).

Von der grössten Tragweite und weitester Anwendungsfähigkeit war die mit Crafts gemachte Auffindung (1877—1890) einer Reaktion, welche die Einführung der verschiedenen Radikale in das Benzol und seine Homologen gestattet bei Behandlung derselben mit den Halogenverbindungen jener Radikale bei Gegenwart von Aluminiumchlorid; auch ermöglicht sie die aromatischen Kohlenwasserstoffe bei Gegenwart von Aluminiumchlorid mit Sauerstoff, Kohlensäure und anderen Säureanhydriten direkt zu verbinden. Er und viele andere Chemiker haben mit Hilfe dieser neuen allgemeinen Methode der Synthese in der aromatischen Reihe eine sehr grosse Anzahl vorher schwer zugänglicher Körper mit Leichtigkeit dargestellt und Fragen von grosser allgemeiner Bedeutung gelöst, so dass ihr ganz wesentlich die rapide Entwicklung der organischen Chemie in den letzten Zeiten zu verdanken ist.

Ausser den genannten grösseren Arbeiten rühren von Friedel zahlreiche kleinere Untersuchungen her, welche zum Theil mit seinen Schülern ausgeführt worden sind und wichtige Beiträge zur Chemie geliefert haben.

Friedel hat sich auch an nützlichen literarischen Unternehmungen betheiliget: er war lange Zeit Redakteur des Bulletin de la société chimique, lieferte zahlreiche Beiträge zu dem von Wurtz herausgegebenen Dictionnaire de Chimie, gab eine Sammlung von Vorträgen in der Revue: „les Actualités chimiques“

heraus und gründete die Revue générale de Chimie pure et appliquée.

Viele Ehrenstellen wurden dem verdienten Manne übertragen; er war Präsident der internationalen Nomenklatur-Commission und auch Vorsitzender des chemischen Comités zur Vorbereitung für die Pariser Weltausstellung vom Jahre 1900. Er war ein glühender Patriot und konnte die Niederlage von 1870 nicht verschmerzen und er suchte Alles zu thun, um das geliebte Vaterland wieder aufzurichten. In diesem Bestreben rief er die Ecole alsacienne ins Leben, eine Schule für den Sekundär-Unterricht, durch welche die Jugend eine bessere moralische und körperliche Erziehung erhalten sollte; er führte ferner einen praktischen Curs der angewandten Chemie an der Sorbonne ein, um der Technik in Frankreich wissenschaftlich und praktisch durchgebildete Leute zuzuführen, damit sie die Conkurrenz des Auslandes besser überwinden können.

Friedel war reich an Gedanken und Kenntnissen und von scharfer Beobachtungsgabe, aber auch ein lauterer Charakter, gütig und von tief religiösem Sinne.

Sir Edward Frankland.[1])

Der berühmte englische Chemiker Sir Edward Frankland ist am 9. August zu Golaa in Gudbrandsdahl in Norwegen, wo er gerne Erholung suchte, nach kurzer Krankheit im 74. Lebensjahre gestorben.

Derselbe nimmt in der Geschichte der Chemie einen hervorragenden Platz ein, denn er gehört zu den ausgezeichneten Gelehrten jener klassischen Zeit in der Mitte des Jahrhunderts, in der die Grundlagen für die heutigen so fruchtbaren Anschauungen über die Constitution der Kohlenstoffverbindungen gelegt wurden; er hat durch seine Untersuchungen viel zu der Entwicklung der Lehre von der Werthigkeit der Elemente bei-

---

[1]) Mit Benützung des Nekrologs in Leopoldina 1899 Nr. 11 und des Nekrologs von Liebermann in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft 1899 Nr. 14.

getragen und ist dadurch einer der Mitbegründer des jetzigen chemischen Systems geworden. Er hat dies, wie Liebig in seinem Wahlvorschlage für unsere Akademie sagte, erreicht durch seine scharfsinnige Combinationsgabe und sein seltenes Talent für die Ausführung schwieriger Operationen, die ihm die Durchführung von Untersuchungen ermöglichte, deren Schwierigkeiten für viele Andere unüberwindbar gewesen wären.

Frankland wurde am 18. Januar 1825 zu Churchtown bei Lancaster geboren; nach Absolvirung der Lateinschule daselbst widmete er sich alsbald dem Studium der Chemie am Museum of Practical Geology, welches damals unter der Leitung des Chemikers Lyon Playfair stand, zu. Im Jahre 1847 wandte er sich zu seiner Ausbildung in der Chemie nach Giessen in Liebig's Laboratorium, wo er in die grosse Schaar talentvoller junger Chemiker aus allen Ländern eintrat. Darauf gieng er nach Marburg zu Bunsen, der wohl den grössten Einfluss auf ihn ausübte; mit dem etwas älteren Assistenten Bunsens, Hermann Kolbe, verband ihn bald eine innige Freundschaft; er führte mit ihm seine ersten wissenschaftlichen Arbeiten aus. Nach der Rückkehr in sein Vaterland wurde der erst 26 jährige, viel versprechende Gelehrte (1851) zum Professor der Chemie am Owens-College in Manchester ernannt, dann (1857) zum Professor der Chemie am St. Bartholomäus-Hospital in London und hierauf (1863) an der Royal Institution of Great Britain in London an Stelle des berühmten Faraday. Als A. W. Hofmann (1865) seine Professur an der Royal School of Mines, einer Abtheilung des Royal-College of Chemistry, aufgab, wurde er sein Nachfolger an dieser Schule; zuletzt bekam er (1881) noch die Professur an der Normal School of Science im South Kensington-Museum. Er hat an diesen Stellen eine äusserst fruchtbare Lehrthätigkeit entwickelt.

Die bedeutendsten und zahlreichsten wissenschaftlichen Leistungen Frankland's liegen auf dem Gebiete der organischen Chemie.

Bunsen hatte damals in Marburg eine der geistvollsten und fruchtbarsten Untersuchungen in der Chemie gemacht.

Es war damals die Theorie von den zusammengesetzten Radikalen aufgestellt worden, indem man annahm, in den organischen Verbindungen spielten gewisse Gruppen von Elementen die Rolle der Atome in den anorganischen Verbindungen. Ein solches Radikal isolirte Bunsen in dem äusserst widerlich riechenden Kakodyl, einer aus Arsen und 2 Molekülen Methyl bestehenden Gruppe, welche zahlreiche Verbindungen, wie die Atome der anorganischen Verbindungen, bilden.

Bunsen's Kakodyl-Arbeit war von befruchtendem Einfluss auf Kolbe's theoretische Anschauungen und auf die gemeinsame Untersuchung von Kolbe und Frankland über die Cyanüre und auch auf des Letzteren Entdeckung der metallorganischen Verbindungen.

Bei der ersteren liessen sie Kalium auf Cyanäthyl einwirken und glaubten dabei die entsprechenden organischen Radikale isolirt zu haben. Wenn dies auch nicht der Fall war, so hat die Untersuchung doch einen tieferen Einblick in den Aufbau der Säuren und Nitrile gebracht.

Daraus erwuchs die wichtige Entdeckung der beiden Forscher von der Spaltung der Nitrile — der Verbindungen der Alkoholradikale mit der Cyangruppe — in Ammoniak und Fettsäuren. Diese Reaktion wurde für die Synthese organischer Verbindungen von grosser Bedeutung, indem sie zum ersten Mal den systematischen Aufbau von einem Alkohol zu der nächst kohlenstoffreicheren Säure ermöglichte. Insbesondere war es ihre Elektrolyse der Essigsäure mit der Bunsen-Batterie, aus der sich neue Anschauungen über die Zusammensetzung der Kohlenstoff-Verbindungen entwickelten.

Im Verfolg der Untersuchungen über die organischen Radikale entdeckte nun Frankland das Zink-äthyl und Zink-methyl und dann eine ganze Reihe von neuen höchst merkwürdigen metallorganischen Verbindungen. Es war dies seine bedeutendste Entdeckung, welche den grössten Einfluss auf die Entwicklung der organischen Chemie gehabt hat; man zählt ihn daher mit Recht zu einem der Vorläufer der später von Kekulé begründeten Theorie von der Werthigkeit der Elementar-Atome.

Die Kenntniss der metallorganischen Verbindungen führte ihn zu wichtigen synthetischen Herstellungen zahlreicher Kohlenstoffverbindungen. Mit B. F. Duppa gelang ihm der Aufbau der Leucinsäure aus Oxalsäureester und Zinkäthyl, dann der der mono- und dialkylirten Essigsäuren, der Mono- und Dialkylacetonkohlensäureester, der alkylirten Glieder der Milch- und Acrylsäurereihe und der homologen Ketone.

In Folge seiner engen Beziehungen zu den deutschen Fachgenossen ist ein grosser Theil seiner grundlegenden chemischen Arbeiten zuerst in deutschen Zeitschriften, namentlich in Liebig's Annalen, erschienen.

Später hat er seine Kraft gemeinnützigen Bestrebungen zugewandt, indem er ausgedehnte Untersuchungen über die Versorgung der Stadt London mit Wasser anstellte, und die von acht privaten Gesellschaften aus verschiedenen Orten der Stadt zugeführten Trinkwasser chemisch analysirte sowie auf ihren Gehalt an Bakterien prüfte und die Verunreinigung des dortigen Flusswassers feststellte. Als einem der Her Majesty's Commissioners war ihm die Ueberwachung dieser für die Sanität der englischen Hauptstadt so wichtigen Angelegenheit übertragen. Ueber 30 Jahre hat er zum Theil mit X. E. Armstrong diese Arbeiten geführt und in seinen Jahresberichten einen wahren Schatz von Erfahrungen hierüber niedergelegt. Man hat dadurch in England praktisch zuerst den Werth der Beschaffung reinen Wassers und der Kanalisation für die Gesundheit der Bevölkerung erkannt; zahllose Einzelheiten über die Analyse des Wassers, seine Härte, die Verunreinigungen desselben und die Reinigung wurden von ihm festgestellt. Noch wenige Monate vor seinem Tode hat der unermüdlich thätige Mann mit seinem Collegen Crookes werthvolle Untersuchungen über die Londoner Wasserversorgung veröffentlicht.

Im Jahre 1877 erschien eine Gesammtausgabe seiner Arbeiten unter dem Titel: „Experimental Researches in pure, applied and physical chemistry", in der sich auch Abhandlungen aus anderen Gebieten vorfinden: z. B. über die Eiszeit,

die Sonnenwärme, die Schattentemperatur, die Quelle der Muskelkraft, über den Einfluss des atmosphärischen Drucks auf die Verbrennungs-Erscheinungen, über das Leuchten der Flamme etc. Diese Gesammtausgabe hat er seinem Lehrer und Freund Bunsen, für den er die grösste Verehrung hegte, gewidmet.

Schon vor einiger Zeit ist er von seiner Professur zurückgetreten und lebte auf seinem Gute The Yews in Surrey. Der verdienstvolle Gelehrte stand in seinem Vaterlande und auch ausserhalb desselben in hohem Ansehen; es wurden ihm viele Ehren von gelehrten Gesellschaften erwiesen; er war eines der wenigen Ehrenmitglieder der Deutschen chemischen Gesellschaft, unserer Akademie gehörte er seit dem Jahre 1869 an.

Franz v. Hauer.[1])

Die Reihen der unserer Akademie angehörigen Geologen, denen wir die Entwicklung dieser Wissenschaft in dem zweiten Dritttheil des vergangenen Jahrhunderts verdanken, lichteten sich in den beiden letzten Jahren: wir haben den Tod von Gümbel und von Sandberger betrauert und nun ist auch Franz v. Hauer, der frühere Direktor der geologischen Reichsanstalt und Intendant des naturhistorischen Museums, am 20. März 1899 in Wien, 77 Jahre alt, aus dem Leben geschieden. Er war der Nestor und der Führer der österreichischen Geologen und Paläontologen, einer der bedeutendsten Gelehrten in seinem Fache durch die Bedeutung, den Umfang und die Tiefe seiner wissenschaftlichen Arbeiten, der sich namentlich um die geologische Durchforschung seines Heimathlandes die grössten Verdienste erworben hat. Im Gebiete der Alpengeologie war er nach dem Urtheile Gümbel's unbestreitbar der allseitigste,

---

[1]) Dr. M. Weinberg in Wien in der Illustrirten Zeitung vom 6. April 1899.

Dr. August Böhm, Privatdozent an der technischen Hochschule in Wien in den Abhandlungen der geographischen Gesellschaft in Wien I. 1899.

gelehrteste und erfahrungsreichste, so dass sein Name sich unmittelbar an jene eines Studer und Escher von der Linth anreiht; er hat durch seine geologischen Aufnahmen die Grundlage zur neuen Alpengeologie gelegt und eine Schule von tüchtigen Feldgeologen gebildet, durch deren Thätigkeit allein es möglich wurde, dass Oesterreich in erstaunlich kurzer Zeit sich zu einem der geologisch am besten durchforschten Länder erhob.

Franz v. Hauer wurde am 30. Januar 1822 zu Wien als der Sohn des Geh. Raths und Vicepräsidenten der Hofkammer im Münz- und Bergwesen, Joseph v. Hauer, geboren. Der Vater hatte eine der grössten paläontologischen Sammlungen in Wien angelegt und die fossilen Foraminiferen des tertiären Beckens von Wien entdeckt. Dadurch wurde der junge Franz v. Hauer frühzeitig zu dem Studium der Geologie und Paläontologie angeregt.

Nach Vollendung seiner Studien am Gymnasium und der Universität zu Wien gieng er (1839) an die Bergakademie zu Schemnitz im ungarischen Erzgebirge, um sich als Berg- und Hütteningenieur auszubilden. In dieser damals in hoher Blüthe stehenden Frei- und Bergstadt war eine vorzügliche Gelegenheit zur Ausbildung im Bergwesen; die seit Anfang des 12. Jahrhunderts betriebenen und um die Mitte des 16. Jahrhunderts der Augsburger Familie Fugger gehörigen reichhaltigen Gold- und Silberbergwerke sowie die berühmte Mineralien-Sammlung boten vortreffliches Material zu emsigem Studium. Von da kam er (1843) auf kurze Zeit als Bergwesens-Praktikant an die Bergverwaltung in Eisenerz, wurde aber dann noch im nämlichen Jahre zu den Vorlesungen des hervorragenden Mineralogen Wilhelm Haidinger in Wien berufen und nach Vollendung des einjährigen Lehrkurses demselben zur Dienstleistung am damaligen montanistischen Museum zugetheilt, wo er auch gut besuchte Vorlesungen über Paläontologie, damals die einzigen zu Wien, hielt. Haidinger erkannte das Talent des 22 jährigen jungen Bergpraktikanten und war bemüht ihn der Wissenschaft zu erhalten, indem er beantragte, ihn nochmals

einem Jahreskurse zuzutheilen und nach demselben ihn zum Assistenten am montanistischen Museum für drei Jahre zu ernennen; so hat Hauer seinem Lehrer Haidinger die Einführung in die Wissenschaft, aber auch die Ebnung seiner wissenschaftlichen Laufbahn zu verdanken.

Denn nach Ablauf der drei Assistentenjahre (1849) stellte Haidinger das Ansuchen, am montanistischen Museum eine Professur für Paläontologie zu schaffen und Hauer, der durch fünf Jahre hindurch eine nützliche Thätigkeit entwickelt hatte, dafür zu ernennen. Dem wurde zwar zunächst nicht stattgegeben, wohl aber gab es die Veranlassung, dass der erleuchtete Minister v. Thinnfeld, der die hohe Bedeutung einer geologischen Durchforschung des Landes erfasste, in einem für andere Regierungen lesenswerthen Erlass weiter gieng und die so berühmt gewordene und grossartige geologische Reichsanstalt gründete (1849). Sie sollte eine selbständige Anstalt sein, welche zunächst die Aufgabe hatte die geologische Aufnahme der Monarchie zu besorgen; Haidinger wurde zum Sektionsrath und Direktor, Hauer zum Bergrath und ersten Geologen der Anstalt befördert. Als Haidinger (1866) in den Ruhestand trat, kam Hauer an seine Stelle, welche er während 18 Jahren inne hatte; er brachte sie zu grosser Blüthe und zur Entwicklung eines höchst segensreichen wissenschaftlichen Lebens, indem er seine Mitarbeiter zu freier wissenschaftlicher Thätigkeit anspornte und die Verhandlungen der geologischen Reichsanstalt (1867) begründete. Von 1874—1885 war er auch Honorardozent für Geologie an der Wiener Hochschule für Bodenkultur. Im Jahre 1885 wurde er der Nachfolger Ferdinand v. Hochstetter's als Intendant des naturhistorischen Hofmuseums, als welcher er die Uebersiedelung (1889) der zum Theil zerstreuten Schätze der naturhistorischen Sammlungen des Kaiserhauses in den Prachtbau am Burgring leitete. Auch das Hofmuseum erlangte unter ihm eine angesehene wissenschaftliche Stellung, besonders auch durch die (1886) Schaffung der Annalen des naturhistorischen Hofmuseums.

Im Jahre 1896 trat er nach redlich gethaner Arbeit in

den Ruhestand und am 20. März 1899 machte der Tod dem thatenreichen Leben ein Ende.

Der Anfang der wissenschaftlichen Laufbahn Hauer's fiel in die Zeit, wo durch die Sammlungen von Mohs, Haidinger und Joseph Hauer eine systematische geologische Durchforschung der österreichischen Lande angezeigt war. Durch das eingehende Studium derselben erwarb er sich die dafür nothwendigen paläontologischen Kenntnisse. Die Lösung der grossen Aufgabe und die Entwicklung der berühmten Schule für Geologie gieng von der gemeinsamen rastlosen Thätigkeit in dem montanistischen Museum und der geologischen Reichsanstalt aus.

Die Arbeiten Hauer's, welche grössten Theils in den Jahrbüchern der geologischen Reichsanstalt und den Schriften der Akademie enthalten sind, sind vorwiegend stratigraphischer und paläontologischer Natur.

In ersterer Beziehung beschäftigte er sich frühzeitig mit der Untersuchung der so verwickelten geschichteten Ablagerungen der Alpen, des früher so genannten Alpenkalkes, sowie der in ihnen enthaltenen thierischen und pflanzlichen Einschlüsse, zunächst in den Ostalpen (von 1850—53) und dann (1857) in den Nordtiroler Alpen. Auf Grund derselben hat er als Erster eine sichere, unübertroffene Gliederung der geschichteten Gesteine in den östlichen Alpen geschaffen; diese Arbeit legte den ersten festen Grund für die richtige Auffassung der geognostischen Verhältnisse der Ostalpen und stellte sein Talent als beobachtender und vergleichender Geologe in das glänzendste Licht. Er traf dabei im Westen mit den schweizerischen Geologen, mit Bernhard Studer und Arnold Escher von der Linth, zusammen und in Nordtirol mit unserem unvergesslichen Gümbel, der von 1854 an die bayerischen Alpen bearbeitete. Der letztere hatte die grosse Genugthuung, dass die österreichischen Gelehrten, Hauer, Richthofen, Pichler, Cotta, zum Theil in gemeinschaftlichen Begehungen, die wesentlichen Ergebnisse seiner Forschung bestätigen konnten; und Hauer hat in neidloser Anerkennung das Alpenwerk Gümbel's als die wichtigste und ausführlichste Monographie,

welche bisher überhaupt über einen Theil der Kalkalpen erschienen ist, als die Frucht der mit unermüdlicher Ausdauer und begeisterter Hingebung durchgeführten geologischen Landesaufnahme und als ein wahres Grundwerk bezeichnet. Später (1858) hat Hauer die Verhältnisse am Südabhang der Alpen studirt, nachdem er schon 1857 in grossen Zügen einen geologischen Durchschnitt quer durch die Alpen von Passau bis Duino ausgeführt hatte; auch bei den Aufnahmen in Ungarn, Siebenbürgen und Dalmatien war er betheiligt. Dadurch erlangte er die umfassendsten Kenntnisse des geologischen Baues und der Bodenbeschaffenheit von Oesterreich, welche er in einem Meisterwerke: „Die Geologie und ihre Anwendung auf die Kenntniss der Bodenbeschaffenheit der österreichisch-ungarischen Monarchie“ in klarster, allgemein verständlicher und doch streng wissenschaftlicher Darstellung zusammenfasste.

Nachdem schon 1843 und 1844 von den zu den Lehrkursen in das montanistische Museum eingerufenenen Bergwerkspraktikanten unter Haidinger's Leitung und unter Hauer's Mitwirkung die erste grössere Uebersichtskarte Oesterreichs in 9 Blättern im Maassstabe 1 : 864000 zusammengestellt worden war, erfolgte von der geologischen Reichsanstalt unter Hauer die ganz hervorragende geologische Uebersichtskarte der österreichisch-ungarischen Monarchie in 12 Blättern im Maassstabe 1 : 576000 (1867—73), eine Zusammenfassung der Ergebnisse aller bis dahin ausgeführten Aufnahmsarbeiten in Oesterreich-Ungarn, welche alle ähnlichen Darstellungen an Gründlichkeit der Ausarbeitung, Klarheit der Darstellung und Harmonie der Durchführung als wahres Muster- und Meisterwerk zur Seite, wenn nicht voran steht; dann die geologische Uebersichtskarte von Siebenbürgen (1 : 576000) im Jahre 1861 und im Jahrbuch der geologischen Reichsanstalt eine geologische Karte der nördlichen Lombardei (1 : 432000).

Mit dem Geologen Fötterle gab er (1853) die geologische Uebersicht der Bergbauten der österreichischen Monarchie heraus; mit G. Stache, seinem späteren Nachfolger, (1863) die Geologie Siebenbürgens; mit Melchior Neumayer den Führer

zu den Exkursionen der deutschen geologischen Gesellschaft nach der allgemeinen Versammlung in Wien im Jahre 1877; für das von dem Kronprinzen Rudolf angeregte Prachtwerk: „die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild" schrieb er (1887) die geologische Uebersicht von Oesterreich-Ungarn.

Ausser diesen stratigraphischen Arbeiten hat er zahlreiche Abhandlungen paläontologischen Inhalts veröffentlicht. Noch im montanistischen Museum entstand 1846 seine erste grössere wissenschaftliche, von Haidinger mit einem Vorworte eingeführte Arbeit: „die Cephalopoden des Salzkammergutes aus der Sammlung des Fürsten Metternich", welche hauptsächlich von Friedrich Simony zusammengebracht worden war. Dieses verbreitete Geschlecht der zu den Mollusken gehörigen Kopffüsser hat er später noch mehrmals bearbeitet, so die Cephalopoden der karnischen und norischen Hallstädter Kalke (1847. 1848. 1855. 1860), dann die aus dem Muschelmarmor von Bleiberg (1847), aus dem Lias der nordöstlichen Alpen (1856) und der Medolo vom Val Trompia (1861). Hierher gehören auch seine Abhandlungen über die Fauna der Raibler Schichten (1857), über die Kreidepetrefakten des Bakonyer Waldes (1861) und die Studien über die triassischen Cephalopoden Bosniens (1887. 1892. 1896).

Einen ganz wesentlichen und erfolgreichen Einfluss hat Hauer auf die Verbreitung der Naturwissenschaften und die Entwicklung des wissenschaftlichen Lebens in Wien ausgeübt. Als er begann in die Wissenschaft einzugreifen, gab es in Wien noch keinen Verein für Pflege der Naturwissenschaft und keine Zeitschrift für grössere wissenschaftliche Arbeiten. Er gab (1845) die erste Anregung zu einer Gesellschaft junger Naturforscher, den „Freunden der Naturwissenschaften", die sich in den Räumen des montanistischen Museums bei Haidinger versammelten und Berichte über die gemachten Mittheilungen (von 1847—51) herausgaben. Diese Vereinigung der Jüngeren gab für die Aelteren erneut den Anstoss die Gründung einer Akademie der Wissenschaften anzustreben, welche 1847 erfolgte

und zu deren correspondirendem Mitglied er als 26 jähriger Assistent bei der ersten Wahl ernannt wurde. Er war bei der Gründung von zahlreichen Fachvereinen betheiligt und als Mitglied thätig, so bei der zoologisch-botanischen Gesellschaft, der geographischen Gesellschaft, dem Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse, dem österreichischen Alpenverein, der anthropologischen Gesellschaft, dem wissenschaftlichen Club, dem Verein für Höhlenkunde. In den Mittheilungen der geographischen Gesellschaft brachte er Beiträge über Höhenmessungen in Ungarn und Siebenbürgen. In der österreichischen Touristen-Zeitung berichtete er über die Wasserverhältnisse in den Kesselthälern in Krain, über die Krausgrotte bei Gams in Steiermark, über die Arbeiten des Karst-Comités. Er förderte die Untersuchung der physikalischen Verhältnisse und der Fauna und Flora in den Tiefen der Oesterreich benachbarten Meere. Als Mitglied der prähistorischen Commission der Akademie interessirte er sich für Höhlenuntersuchungen und paläographische Ausgrabungen.

Durch diese umfassende Thätigkeit hat Hauer eine glänzende Periode wissenschaftlichen Aufschwungs in Oesterreich mit herbeigeführt sowie den Ruf der Wiener geologischen Schule begründet, deren machtvoller Führer und Meister er mehr als 50 Jahre hindurch war; für seine Schüler, denen er ein stets sorgender Lehrer war, war er zugleich ein Vorbild in edler Gesinnung und in der Liebe zur Wahrheit und Begeisterung für die Wissenschaft.

An seinem Grabe hat sein ältester Schüler Suess in wahrhaft erhebenden Worten die Eigenschaften und das Verdienst des geliebten Lehrers geschildert: Niemand habe den heimischen Boden besser gekannt und daher auch Niemand besser geliebt; er habe den Funken der Begeisterung in den Schülern erweckt, der nicht erlöschen werde, sodass sein Leben fruchtbar bleibe noch nach dem Tode, und nur diesen Dank der Schüler habe er angestrebt und gewünscht. Wenn Suess dabei den Segen der Wissenschaft durch die Erkenntniss der Wahrheit und die Emporhebung des Gemüths durch die erkannte Wahr-

heit zu nie zu trübender innerer Befriedigung schildert, so weiss man nicht, soll man mehr den Schüler um den Lehrer, oder den Lehrer um solche Schüler beneiden.

Othniel Charles Marsh.[1])

Am 18. März 1899 starb nach kurzer Krankheit der Professor der Paläontologie an der Yale Universität in New Haven Othniel Marsh im 67. Lebensjahre. Der noch in voller Arbeitskraft stehende Mann war einer der verdientesten Paläontologen und einer der angesehensten Gelehrten Nordamerikas; er war Präsident der amerikanischen Akademie der Wissenschaften (von 1882—1895) sowie der amerikanischen Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften und bis zu seinem Tode Landes-Paläontologe für Wirbelthiere in den Vereinigten Staaten. Man verdankt ihm vor Allem die Kenntniss zahlreicher merkwürdiger fossiler Wirbelthiere aus dem Westen Nordamerikas; er ist nicht lange seinem gleich berühmten Rivalen Edward Cope in Philadelphia im Tode gefolgt.

Marsh wurde am 29. Oktober 1831 bei Lockport im Staate New York geboren. Den ersten Unterricht erhielt er in der Schule von Lockport, dann in dem College des am Ontario-See schön gelegenen Ortes Wilson. Die an Mineralien und Fossilien reiche Gegend von Wilson erweckte in dem kräftigen und talentvollen Jüngling das lebhafteste Interesse, und er begann damals schon in seiner freien Zeit diese Naturobjekte zu sammeln. Im Jahre 1851 trat er in die Akademie von Andover im Staate Massachussets ein, dann in die Yale Universität zu New Haven, an welcher er bis 1860 vor Allem zoologischen und geologischen Studien oblag. Von New Haven aus machte er naturwissenschaftliche Reisen nach New England in dem nördlichen Dakota und der

[1]) Nekrolog von H. B. Geinitz in Leopoldina 1899 Nr. 7 S. 122. — Nekrolog von Charles E. Becher im American Journal of science 4. Ser. Vol. 7. p. 403, 1899.

im Nordosten der vereinigten Staaten gelegenen Insel Nova Scotia, auf welcher er schon 7 Jahre früher in der Steinkohle den merkwürdigen Eosaurus-Wirbel gefunden, jedoch nicht beschrieben hatte.

Nach Abschluss seiner Studien in Amerika begab er sich zur weiteren Ausbildung nach Frankreich und nach Deutschland, woselbst er drei Jahre verblieb. Er besuchte dabei die Universitäten zu Berlin, Heidelberg und Breslau; in Berlin hörte er die beiden Rose und Ehrenberg, in Breslau Römer und Göppert. Er verdankte die Mittel dazu seinem reichen Onkel mütterlicherseits George Peabody.

Im Jahre 1866 erhielt er die Anstellung als Professor der Paläontologie am Yale College. Nach dem Besuch der Verhandlungen der American Association for the Advancement of Science zu Chicago (1868) entschloss er sich mit der eben eröffneten Pacific-Bahn die damals kaum bekannten Felsengebirge im fernen Westen zu besuchen, von wo vorher die ersten fossilen Säugethierreste durch Leidy beschrieben worden waren. Er kam bis Nebraska und Wyoming und erkannte den ungeheuren Reichthum an fossilen Ueberresten. Er erstattete darüber einen Bericht und es gelang seinen Bemühungen im Jahre 1870 eine erste von ihm ausgerüstete und organisirte Yale scientific Expedition ins Werk zu setzen; 13 thatkräftige Männer begleiteten ihn als Gehilfen und eine Bedeckung von den Militärposten längs der Bahn diente zum Schutz gegen die Indianer. Ein glänzender Erfolg lohnte das Unternehmen, so dass in den drei folgenden Jahren noch weitere grossartige Expeditionen nach dem Westen, namentlich nach den Rocky Mountains, von ihm ausgerüstet wurden theils auf eigene, theils auf öffentliche Kosten. Es muss bemerkt werden, dass gleichzeitig mit Marsh der Paläontologe Edward Cope von Philadelphia die Fundstätten von Dakota, Wyoming, Colorado und Oregon mit ihren kolossalen Ablagerungen vergangener Thierformen, besonders fossiler Wirbelthiere, ausbeutete, wobei von den beiden ebenbürtigen Rivalen mit fieberhafter Energie gearbeitet wurde und ein nicht immer in friedlichster Weise geführter Wettstreit

sich entspann. Es gehörte die grösste Energie und Arbeitsfreudigkeit dazu, um zum Ziele zu gelangen, denn sie mussten Monate lang in den unwirthlichsten und gefährlichsten Theilen der Indianer-Gebiete zubringen.

Nicht allein die tertiären, sondern auch die jurassischen Ablagerungen lieferten ihm eine geradezu staunenswerthe Anzahl neuer gigantischer Säugethiergattungen und Arten von theilweise höchst merkwürdiger, bis dahin gänzlich unbekannter Organisation; aber auch die mesocoischen Reptilien und Vögel wurden durch eine beträchtliche Zahl neuer Formen bereichert, unter denen z. B. die ersten zahnlosen Flugeidechsen von Wyoming und die in der Kreide des westlichen Kansas gefundenen ersten mit kräftig entwickelten Zähnen versehenen Wasservögel allgemeine Aufmerksamkeit erregten. Die Unruhen der Indianer verhinderten weitere Untersuchungen auf diesen Gebieten; Marsh gieng daher in die Bad Lands nach Nebraska und Dakota bis nach Red Cload Agency, wobei er von einer Eskorte vom Fort Laramie begleitet wurde. Bis zum Jahre 1892 betheiligte er sich an den Arbeiten im Felde.

Auf diese Weise brachte Marsh kolossale werthvollste Sammlungen fossiler Wirbelthiere nach New Haven, während die von Cope gesammelten Fossilien in Philadelphia Aufstellung fanden.

Es war nun die Aufgabe die reichen Schätze wissenschaftlich auszunützen und zu bearbeiten. In dem American Journal of Science finden sich von ihm in den Jahren 1861—1899 zahlreiche Abhandlungen, welche über seine Funde vorläufig Bericht erstatten. Die ausführlichen Beschreibungen mit den Schlussfolgerungen und den sich daran anknüpfenden philosophischen Betrachtungen folgten in grossen Monographien. Es mögen von diesen nur hervorgehoben werden: das prachtvoll ausgestattete Werk über die fossilen Odontornithen, seine bahnbrechenden Schriften über die Dinosaurier, seine Abhandlungen über Flugsaurier und Crocodilier, über die neue Säugethierordnung der Pantotherier, über die Dinoceraten, über

Brontotherium, Fillotherium, Coryphodon, über die Gehirnentwicklung fossiler Säugethiere, über fossile Pferde etc.: Arbeiten, deren Resultate in alle neueren Lehrbücher der Geologie und Paläontologie Eingang gefunden haben. Es war Marsh nicht vergönnt die übrigen Monographien zum Abschluss zu bringen, dieselben sind jedoch mit der Beschreibung und den Abbildungen genügend vorbereitet. Durch die Thätigkeit von Cope und Marsh wurde eine vollständige Umgestaltung der bis dahin herrschenden Ansichten über die Mannigfaltigkeit, Organisations- und Verwandtschaftsverhältnisse der fossilen Vertebraten herbeigeführt.

Marsh's Untersuchungen bewegen sich zwar vorzüglich auf descriptivem Gebiete; jedoch war er, als Anhänger der Descendenztheorie, bestrebt, die genetischen Beziehungen der verschiedenen Vertebratentypen zu ermitteln. In dieser Hinsicht gehört ein Vortrag: introduction and succession of vertebrated life in Amerika, den er als Vicepräsident der amerikanischen Naturforscherversammlung im Jahre 1877 in Nashville hielt, zu seinen bedeutenderen literarischen Leistungen.

Zur Aufnahme der werthvollen Sammlungen von Marsh war vorläufig der im Jahre 1875 im Bau vollendete Flügel des grossen Peabody-Museums in New Haven bestimmt worden. Es war Marsh, der seinen reichen Onkel, den hochherzigen George Peabody, veranlasst hatte auf seine Kosten das Museum zu errichten. Als das Museum die Sammlungen nicht mehr zu fassen vermochte, fand eine Theilung derselben zwischen dem Yale College und der National Academy of Science in Washington, deren Präsident Marsh war und für welche er auch gesammelt hatte, statt. Da Marsh keine Familie besass, so vermachte er am 1. Januar 1898 seine eigenen Sammlungen der Yale University, für welche er einen linken Flügel des Peabody-Museums erbauen liess. Es war ihm kein Preis zu hoch, um werthvolle Fossilien für seine Sammlung zu erwerben; so kaufte er auch den berühmten Rhamphorhynchus von Eichstädt an, da es in Bayern damals aus Mangel an Mitteln nicht möglich war, denselben dem Lande zu erhalten; wir wollen

hoffen, dass diese miserabeln Zeiten vorüber sind und die Wissenschaft jetzt besser in ihrem Werthe gewürdiget wird.

Die Sammlung wurde von den grössten Meistern des Faches besucht und bewundert; Huxley sah sie 1876, Darwin 1878 und beide haben sich damals überzeugt, dass sie in wissenschaftlicher Beziehung von keiner in der Welt übertroffen wird, und sie ist seitdem noch sehr vermehrt worden.

Sein ganzes Leben lang war Marsh rastlos thätig im Dienste der Wissenschaft, immer nach neuen Entdeckungen strebend in der Ueberzeugung noch Bedeutendes leisten zu können. Man darf von dem edlen Manne ohne Uebertreibung sagen, dass seit Cuvier und Richard Owen Niemand die Paläontologie der Wirbelthiere durch eine gleiche Fülle neuen Materials bereichert hat; sein Name ist mit den wichtigsten Entdeckungen auf paläontologischem Gebiete in diesem Jahrhundert verknüpft.

Karl Friedrich Rammelsberg.[1])

Karl Friedrich Rammelsberg, früher Professor der Chemie an der Universität Berlin und seit 1855 Mitglied der k. preussischen Akademie der Wissenschaften, ist am 28. Dezember 1899 auf seinem Ruhesitze zu Grosslichterfelde bei Berlin nach längerer Krankheit im 87. Lebensjahre gestorben.

Er war einer der angesehensten Vertreter der unorganischen Chemie in Deutschland und übte eine grosse und erfolgreiche Forscherthätigkeit in mehreren Gebieten der Mineralogie aus, in der Mineralchemie und der quantitativen Mineralanalyse sowie in der Krystallographie.

Er wurde am 1. April 1813 zu Berlin geboren. Nachdem er (1834) das Gymnasium zum grauen Kloster absolvirt hatte, studirte er an der Universität zu Berlin Physik und Chemie und promovirte (1839) daselbst. Anfangs wollte er sich der Pharmazie zuwenden, später aber wurde er, vorzüglich durch

---

[1]) Mit Benützung der Nekrologe in Leopoldina 1900 Nr. 3 S. 53 und den Berichten der deutschen chem. Ges. 1900 Nr. 1 S. 1.

die Vorlesungen des Chemikers Gustav Rose, bestimmt, die akademische und wissenschaftliche Laufbahn einzuschlagen. 1840 habilitirte er sich an der Universität als Privatdozent für Chemie, wurde 1845 ausserordentlicher Professor, 1851 Lehrer der Chemie und Mineralogie sowie Leiter des chemischen Laboratoriums am Gewerbeinstitut, 1883 kam er als Vorstand an das damals gegründete zweite Universitätsinstitut; im Jahre 1891 trat er in den wohl verdienten Ruhestand.

Rammelsberg hat sich in diesen Stellungen als ungemein eifriger und tüchtiger Lehrer sehr bedeutende Verdienste um den Unterricht in der Chemie erworben; er war es, der das erste chemische Unterrichtslaboratorium in Preussen leitete, nachdem allerdings in Giessen schon länger eine grosse chemische Schule bestand. Auch durch seine zahlreichen vortrefflichen Lehrbücher hat er sehr anregend gewirkt; durch das Lehrbuch der wissenschaftlichen und angewandten Chemie, das Lehrbuch der Stöchiometrie, der chemischen Metallurgie, der Krystallographie und krystallographisch-physikalischen Chemie, dann durch die Leitfäden der qualitativen und quantitativen chemischen Analyse und endlich durch sein gross angelegtes Handbuch der Mineralchemie. Diese Bücher haben zum Theil mehrere Auflagen erlebt und enthalten eine Fülle von Material, namentlich in der physikalischen Chemie.

Als Forscher beschäftigte er sich insbesondere mit der chemischen Zusammensetzung der Mineralien; lange Zeit galt er als der auf diesem Gebiete erfahrenste Gelehrte und es hat wohl Niemand so viele Mineralanalysen ausgeführt, wie er. Seine zahlreichen krystallographischen Arbeiten führten ihn in das Grenzgebiet der physikalischen Chemie, das damals noch wenig betreten war.

Der um die Wissenschaft verdiente Mann war seit dem Jahre 1859 Mitglied unserer Akademie.

---

hoffen, dass diese miserabeln Zeiten vorüber sind und die Wissenschaft jetzt besser in ihrem Werthe gewürdiget wird.

Die Sammlung wurde von den grössten Meistern des Faches besucht und bewundert; Huxley sah sie 1876, Darwin 1878 und beide haben sich damals überzeugt, dass sie in wissenschaftlicher Beziehung von keiner in der Welt übertroffen wird, und sie ist seitdem noch sehr vermehrt worden.

Sein ganzes Leben lang war Marsh rastlos thätig im Dienste der Wissenschaft, immer nach neuen Entdeckungen strebend in der Ueberzeugung noch Bedeutendes leisten zu können. Man darf von dem edlen Manne ohne Uebertreibung sagen, dass seit Cuvier und Richard Owen Niemand die Paläontologie der Wirbelthiere durch eine gleiche Fülle neuen Materials bereichert hat; sein Name ist mit den wichtigsten Entdeckungen auf paläontologischem Gebiete in diesem Jahrhundert verknüpft.

Karl Friedrich Rammelsberg.[1])

Karl Friedrich Rammelsberg, früher Professor der Chemie an der Universität Berlin und seit 1855 Mitglied der k. preussischen Akademie der Wissenschaften, ist am 28. Dezember 1899 auf seinem Ruhesitze zu Grosslichterfelde bei Berlin nach längerer Krankheit im 87. Lebensjahre gestorben.

Er war einer der angesehensten Vertreter der unorganischen Chemie in Deutschland und übte eine grosse und erfolgreiche Forscherthätigkeit in mehreren Gebieten der Mineralogie aus, in der Mineralchemie und der quantitativen Mineralanalyse sowie in der Krystallographie.

Er wurde am 1. April 1813 zu Berlin geboren. Nachdem er (1834) das Gymnasium zum grauen Kloster absolvirt hatte, studirte er an der Universität zu Berlin Physik und Chemie und promovirte (1839) daselbst. Anfangs wollte er sich der Pharmazie zuwenden, später aber wurde er, vorzüglich durch

---

[1]) Mit Benützung der Nekrologe in Leopoldina 1900 Nr. 3 S. 53 und den Berichten der deutschen chem. Ges. 1900 Nr. 1 S. 1.

die Vorlesungen des Chemikers Gustav Rose, bestimmt, die akademische und wissenschaftliche Laufbahn einzuschlagen. 1840 habilitirte er sich an der Universität als Privatdozent für Chemie, wurde 1845 ausserordentlicher Professor, 1851 Lehrer der Chemie und Mineralogie sowie Leiter des chemischen Laboratoriums am Gewerbeinstitut, 1883 kam er als Vorstand an das damals gegründete zweite Universitätsinstitut; im Jahre 1891 trat er in den wohl verdienten Ruhestand.

Rammelsberg hat sich in diesen Stellungen als ungemein eifriger und tüchtiger Lehrer sehr bedeutende Verdienste um den Unterricht in der Chemie erworben; er war es, der das erste chemische Unterrichtslaboratorium in Preussen leitete, nachdem allerdings in Giessen schon länger eine grosse chemische Schule bestand. Auch durch seine zahlreichen vortrefflichen Lehrbücher hat er sehr anregend gewirkt; durch das Lehrbuch der wissenschaftlichen und angewandten Chemie, das Lehrbuch der Stöchiometrie, der chemischen Metallurgie, der Krystallographie und krystallographisch-physikalischen Chemie, dann durch die Leitfäden der qualitativen und quantitativen chemischen Analyse und endlich durch sein gross angelegtes Handbuch der Mineralchemie. Diese Bücher haben zum Theil mehrere Auflagen erlebt und enthalten eine Fülle von Material, namentlich in der physikalischen Chemie.

Als Forscher beschäftigte er sich insbesondere mit der chemischen Zusammensetzung der Mineralien; lange Zeit galt er als der auf diesem Gebiete erfahrenste Gelehrte und es hat wohl Niemand so viele Mineralanalysen ausgeführt, wie er. Seine zahlreichen krystallographischen Arbeiten führten ihn in das Grenzgebiet der physikalischen Chemie, das damals noch wenig betreten war.

Der um die Wissenschaft verdiente Mann war seit dem Jahre 1859 Mitglied unserer Akademie.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

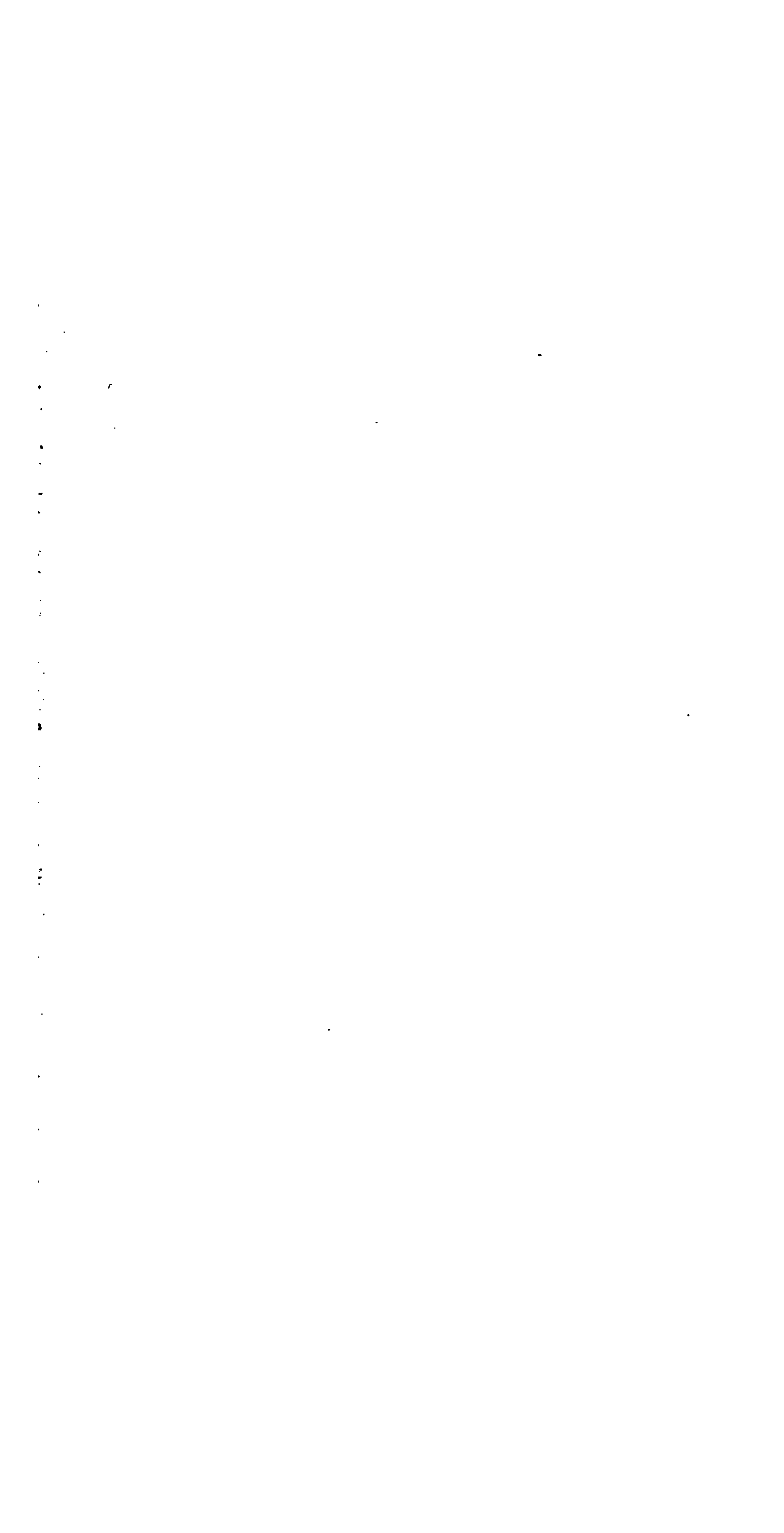
Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. November 1900.

1. Herr H. Ebert macht eine Mittheilung über: „Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches) am Starnberger-See."

2. Herr W. Dyck legt eine Abhandlung des Privatdozenten an der hiesigen Universität Dr. Eduard v. Weber: „Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen" als Fortsetzung seiner in der Sitzung vom 7. Juli d. Js. eingesandten Abhandlung vor.

3. Herr Alf. Pringsheim spricht über die „Convergenz periodischer Kettenbrüche."



Liniencomplexe im R_4 und Systeme Pfaff'scher Gleichungen.

Von **Eduard von Weber.**

(*Eingelaufen 8. November.*)

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich das Fundamentalproblem in der Theorie der Pfaff'schen Systeme, d. i. die Frage nach der Reducirbarkeit eines solchen Systems auf eine gegebene Zahl von Differentialelementen, für $n-3$- und $n-4$-gliedrige Systeme in n Variabeln eingehend behandelt und die dabei auftretenden Integrationsprobleme charakterisirt. Bei dieser Untersuchung erwies sich als wichtigstes Hilfsmittel die Geometrie der linearen Complexe des R_3, und es liegt sonach die Vermutung nahe, dass die Erledigung unseres Problems für den allgemeinen Fall eines $n-m$-gliedrigen Pfaff'schen Systems in n Variabeln im Wesentlichen auf die Theorie der linearen Complexe im $m-1$-dimensionalen Raume zurückkommt.

In der vorliegenden Note soll die genannte Methode auf $n-5$-gliedrige Pfaff'sche Systeme in n Variabeln angewendet werden.

I. Die linearen Liniencomplexe im vierdimensionalen Raum.

1. Die homogenen Coordinaten eines Punkts in einem vierdimensionalen Raum R_4 bezeichnen wir mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_5$ oder $\eta_1, \ldots \eta_5$ oder $\zeta_1 \ldots \zeta_5$ etc. und sprechen demzufolge auch kurz

[1]) „Ueber die Reducirbarkeit eines Pfaff'schen Systems auf eine gegebene Zahl von Termen", diese Berichte 1900 Bd. XXX, p. 273—300.

von dem „Punkt ξ“, dem „Punkt η“ u. s. w. Der Buchstabe μ_k bedeute eine k-fach ausgedehnte lineare Punktmannigfaltigkeit des R_4, d. h. die Gesamtheit der Punkte ξ, die ein System von $4 - k$ linear unabhängigen linearen homogenen Gleichungen zwischen den ξ befriedigen. Für die Mannigfaltigkeiten μ_1, d. h. für die „Geraden“ des R_4 gebrauchen wir die Bezeichnungen g, h, g', h' u. s. w. Eine μ_2, welche durch die Gerade g und den nicht auf ihr liegenden Punkt P bestimmt ist, werde als die μ_2 (P, g) bezeichnet u. s. w. Eine μ_3 nennen wir auch eine „Ebene“ des R_4.

Ein linearer Complex im R_4 wird definirt durch eine alternirende bilineare Gleichung:

$$(1) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0\,,$$

worin die a_{ik} Constante bedeuten, die den Gleichungen

$$a_{ik} = - a_{ki}\,;\ a_{ii} = 0$$

genügen. Wir wollen diesen Complex mit dem Buchstaben a bezeichnen. Eine „Gerade des Complexes a“ ist dann jede μ_1 der Eigenschaft, dass zwei (und infolge dessen irgend zwei) ihrer Punkte die Relation (1) befriedigen. Es gibt in R_4 ∞^6 Gerade, von denen ∞^5 dem Complex a angehören. Den Inbegriff aller Geraden, die zwei Complexen

$$\sum \sum a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0, \ \sum \sum \beta_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0$$

gemeinsam sind, bezeichnen wir als „die zweigliedrige Congruenz (a, β)“. Ebenso sprechen wir von drei-, vier-gliedrigen Congruenzen u. s. w. Dabei wird immer angenommen, dass die betreffenden Complexe linear unabhängig sind, d. h. dass ihre linken Seiten nicht durch eine lineare homogene Identität mit constanten Coefficienten verknüpft seien.

Der Rang der alternirenden Matrix

$$(2) \qquad \| a_{ik} \| \quad (i, k = 1, 2, \ldots 5)$$

ist entweder 4 oder 2; im ersten Fall nennen wir den Complex a „allgemein“, im zweiten „speziell“.

2. Ist a allgemein, wie wir in dieser und den folgenden 3 Nummern annehmen, so besitzen die linearen Gleichungen:

$$(3) \qquad \sum_1^5{}^k a_{ik}\,\xi_k = 0$$

eine und nur eine Lösung $\zeta_1 \ldots \zeta_5$, die der „singuläre Punkt" von a heissen möge. Alle ∞^3 Geraden durch diesen Punkt S sind Complexgerade. Durch einen beliebigen Punkt η gehen nur ∞^2 Complexgerade; sie liegen in der durch (1) definirten Ebene, wobei die ξ laufende Coordinaten bedeuten. Diese Ebene bezeichnen wir als eine „zugeordnete μ_3", speziell als die dem Punkte η zugeordnete μ_3. Bedeutet ζ den singulären, η einen beliebigen Punkt, so wird die Gleichung (1) nicht geändert, wenn man η_i durch $\eta_i + \lambda\,\zeta_i$ ersetzt. Daraus folgt: Allen Punkten einer Geraden g, die den singulären Punkt S enthält, ist dieselbe μ_3 zugeordnet. Man erkennt auch sofort, dass zwei verschiedenen Punkten η, η', deren Verbindungslinie nicht durch S geht, auch zwei verschiedene μ_3 zugeordnet sind.

3. Jede zugeordnete μ_3 enthält den Punkt S; ist daher eine solche Ebene durch die Relation

$$(4) \qquad u_1\,\xi_1 + \ldots + u_5\,\xi_5 = 0 \quad \text{oder} \quad u_\xi = 0$$

definirt, so besitzt die alternirende Matrix:

$$(5) \qquad \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{15} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{51} & a_{52} & \ldots & 0 & u_5 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_5 & 0 \end{Vmatrix}$$

den Rang vier. Umgekehrt, ist dies der Fall, so haben die linearen Gleichungen mit den 6 Variabeln $\xi_i.\ \varrho$:

$$u_\xi = 0;\ \sum{}^k a_{ik}\,\xi_k = \varrho\, u_i \quad (i = 1 \ldots 5)$$

zwei Lösungensysteme

$$\begin{matrix} \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_5, 0 \\ \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_5, \varrho \quad (\varrho \neq 0), \end{matrix}$$

d. h. die durch (4) definirte μ_3 ist jedem Punkte der Geraden

g zugeordnet, die die Punkte η, ζ verbindet. Jede in der μ_3 gelegene Gerade, die dem Complex a angehört, trifft g und umgekehrt, m. a. W.: die auf der μ_3 gelegenen Complexgeraden bilden einen speziellen R_3-Complex mit der Direktrix g.

Demgegenüber ist für eine beliebige, durch (4) dargestellte Ebene die Determinante (5) nicht null, und die auf ihr liegenden Complexgeraden bilden einen allgemeinen R_3-Complex. In der That schliesst man aus bekannten Sätzen[1]), dass sich die linke Seite der Gleichung (1) vermöge der beiden kongruenten Relationen $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf eine Bilinearform in 4 Variabelnpaaren vom Range 4 oder 2 reducirt, je nachdem der Rang der Matrix (5) gleich 6 oder 4 ist.

4. Wir sagen, eine μ_2, die durch die Gleichungen

$$u_\xi = 0, \quad v_\xi = 0 \tag{6}$$

definirt sei, „genügt" dem Complex a, oder „ist eine μ_2 des Complexes a" (eine „Complex-μ_2"), wenn irgend zwei ihrer Punkte die Gleichung (1) erfüllen. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass drei linear unabhängige Punkte der μ_2 wechselseitig in der genannten Beziehung stehen. Dann verschwindet die linke Seite von (1) identisch vermöge (6) und der dazu congruenten Relationen $u_\eta = 0$, $v_\eta = 0$[2]). Damit also durch (6) eine Complex-μ_2 definirt sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} & \cdot\cdot & a_{15} & u_1 & v_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & a_{52} & \cdot\cdot & 0 & u_5 & v_5 \\ u_1 & u_2 & \cdot\cdot & u_5 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & \cdot\cdot & v_5 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \tag{7}$$

den Rang 4 besitze[3]). Man erkennt unmittelbar, dass es für einen allgemeinen Complex ∞^3 solcher Complex-μ_2 gibt; sie

---

[1]) Vgl. z. B. mein Buch: „Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem etc" (Leipzig 1900), Kap. IX, § 3.

[2]) Diese Berichte 1900, p. 280.

[3]) Vgl. z. B. mein Buch a. a. O.

gehen alle durch den singulären Punkt S, und man erhält sie sämtlich, indem man die ∞^3 Geraden des allgemeinen R_3-Complexes, den der Complex a aus einer beliebigen nicht durch S gehenden μ_3 ausschneidet (Nr. 3), mit S durch je eine μ_2 verbindet. Durch einen beliebigen Punkt P gehen einfach unendlich viele Complex-μ_2; diese bilden ein Büschel mit der Axe PS, das in der dem Punkte P zugeordneten μ_3 liegt.

Ist m eine beliebige, durch S gehende μ_2, und sind P, Q irgend zwei auf ihr gelegene Punkte, deren Verbindungslinie nicht durch S geht, so schneiden sich die beiden μ_3, die bezw. den Punkten P und Q zugewiesen sind, in einer ebenfalls durch S gehenden μ_2, die wir die „zu m conjugirte" nennen, und mit m' bezeichnen wollen; m und m' haben nur den Punkt S gemein. Die Beziehung zwischen m und m' ist wechselseitig; eine Complex-μ_2 und nur eine solche ist sich selbst conjugirt.

5. Ist der Complex a speziell, so besitzen die Gleichungen (3) drei unabhängige Lösungen; die entsprechenden Punkte definiren eine μ_2, die wir die „singuläre μ_2" von a nennen und mit s bezeichnen. Jede Gerade, die s schneidet, gehört dem Complex an, und umgekehrt; ein spezieller Complex ist also durch Angabe seiner singulären μ_2 eindeutig bestimmt. Jede μ_2, die s nach einer Geraden schneidet, ist eine Complex-μ_2, und umgekehrt; die Mannigfaltigkeit der Complex-μ_2 ist infolgedessen ∞^4. Dagegen gibt es jetzt nur ∞^1 zugeordnete μ_3, die ein Büschel bilden und alle die s enthalten. Jede solche Ebene hat die Eigenschaft, dass irgend zwei ihrer Punkte die Complexgleichung (1) befriedigen, dass also die linke Seite von (1) vermöge der Definitionsgleichung $u_\xi = 0$ einer solchen μ_3 und vermöge der dazu congruenten Relation $u_\eta = 0$ identisch verschwindet. Infolge dessen kann die Gleichung (1) auch in der Form

$$u_\xi v_\eta - u_\eta v_\xi = 0$$

geschrieben werden, worin $u_\xi = 0$ und $v_\xi = 0$ irgend zwei zugeordnete Ebenen bedeuten.

Umgekehrt, gibt es ein Relationenpaar $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$, das die Gleichung (1) identisch befriedigt, so ist α ein spezieller Complex.

6. Wir betrachten nunmehr eine Schaar von ∞^1 Complexen

$$(8) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik})\, \xi_i\, \eta_k = 0,$$

und nehmen zunächst an, dass in der Matrix

$$(9) \qquad |\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}| \quad (i, k = 1, .. 5)$$

nicht alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten für beliebige λ, μ verschwinden. Wir bezeichnen ferner mit:

$$(-1)^{i+1} \cdot \Pi_i$$

das Pfaff'sche Aggregat der Ordnung 4, dessen Quadrat gleich derjenigen 4-reihigen Unterdeterminante ist, die aus dem Schema (2) durch Streichung der i^{ten} Zeile und Spalte entsteht, setzen also:

$$\Pi_1 = a_{23}\, a_{45} + a_{24}\, a_{53} + a_{25}\, a_{34}$$
$$-\Pi_2 = a_{13}\, a_{45} + a_{14}\, a_{53} + a_{15}\, a_{34} \text{ etc.,}$$

und legen den Buchstaben $K_1 .. K_5$ die analoge Bedeutung hinsichtlich des Complexes β bei. Die Unterdeterminante, die aus (9) durch Weglassung der i^{ten} Zeile und Spalte entsteht, ist dann gleich dem Quadrat des Ausdrucks:

$$(10) \qquad \Lambda_i \equiv \lambda^2\, \Pi_i + \lambda\, \mu\, \Omega_i + \mu^2\, K_i,$$

wobei die Ω_i in folgender Weise definirt sind:

$$\Omega_1 = a_{23}\, \beta_{45} + a_{24}\, \beta_{53} + \ldots + a_{45}\, \beta_{23} \text{ u. s. w.}$$

Die linearen Gleichungen:

$$(11) \qquad \sum_1^5{}^k \omega_k\, (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}) = 0 \quad (i = 1 .. 5)$$

besitzen ein und nur ein Lösungensystem $\omega_1 .. \omega_5$, bestehend aus binären Formen in λ, μ, die wir auf ihren Minimalgrad m

reducirt denken. Die Theorie der Elementarteiler[1]) liefert dann folgende Gleichung:

$$(12) \qquad 5 = 2m + 1 + 2l,$$

worin l den Grad des grössten gemeinsamen Divisors der binären Formen Δ_i bezeichnet; m hat also einen der Werte 2, 1, 0.

7. Bei der folgenden Untersuchung richten wir unser Hauptaugenmerk auf die Frage nach den Mannigfaltigkeiten μ_2, die die Congruenz (α, β), d. h. alle Complexe der Schaar (8) befriedigen; eine solche μ_2 nennen wir kurz eine „Congruenz-μ_2“ oder eine „μ_2 der Congruenz (α, β).“ Diese Definition überträgt sich ohne weiteres auf mehr als zweigliedrige Congruenzen. Insbesondere erkennt man leicht: Damit eine zweidimensionale ebene Mannigfaltigkeit der r-gliedrigen Congruenz $(\alpha, \beta \,.\,.\, \varepsilon)$ genüge, ist notwendig und hinreichend, dass sie r bestimmte, irgendwie ausgewählte, aber linear unabhängige Complexe der Schaar $(\alpha, \beta, \,.\,.\, \varepsilon)$ befriedige. Dazu ist natürlich vor allem notwendig, dass sie die singulären Punkte aller in der Schaar vorhandenen allgemeinen Complexe enthalte, und die singuläre μ_2 eines jeden der Schaar angehörenden speziellen Complexes nach je einer Geraden schneide.

8. Hat die in Nr. 6 definirte Zahl m den Wert 2, so gibt es (wegen $l = 0$) in der Schaar (8) keinen speziellen Complex. Zwei verschiedene Complexe der Schaar besitzen verschiedene singuläre Punkte; alle diese Punkte liegen nach Nr. 6 in einer μ_2 und erfüllen daselbst einen Kegelschnitt C. Die Annahme nämlich, dass ∞^1 singuläre Punkte von Complexen der Schaar (8) eine Gerade erfüllen, zieht, wie wir in der nächsten Nr. sehen werden, die Bedingung $m = 1$ nach sich.

Nach Nr. 7 gibt es also nur eine einzige „Congruenz-μ_2“, d. h. ein einziges zweigliedriges Relationensystem (6) derart, dass in der siebenzeiligen Matrix

---

[1]) Vgl. z. B. meine Arbeit: „Ueber Schaaren von Bilinearformen“, diese Berichte 1898, p. 374.

$$(13) \qquad \left\| \begin{matrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k & , 0, & 0 \\ v_k & , 0, & 0 \end{matrix} \right\| \text{[1]}$$

alle 6-reihigen Hauptdeterminanten für beliebige Werte λ, μ verschwinden. Dieses zweigliedrige Relationensystem wird auch erhalten, wenn man in der 5-zeiligen Matrix:

$$\| \xi_i, \Pi_i, \Omega_i, K_i \| \quad (i = 1, \ldots 5)$$

alle 4-reihigen Determinanten null setzt, oder noch einfacher in der Form:

$$(14) \qquad \sum^i \sum^k a_{ik}\, K_k\, \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik}\, \Pi_k\, \xi_i = 0$$

mit Hilfe der Bemerkung, dass die in Rede stehende μ_2 derjenigen Ebene angehören muss, die dem singulären Punkt des einen Complexes im andern Complex zugewiesen ist.

Die Congruenz (a, β) umfasst in dem vorliegenden Fall ∞^4 Gerade, von denen je ∞^1 durch einen beliebigen Punkt des R_4, und je ∞^2 durch einen Punkt des Kegelschnitts C gehen.

9. Wenn die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) eine Gerade g erfüllen sollen, so müssen in der Matrix

$$(15) \qquad \left\| \begin{matrix} \Pi_1 & \Omega_1 & K_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_5 & \Omega_5 & K_5 \end{matrix} \right\|$$

die dreireihigen Determinanten alle verschwinden, und wir dürfen annehmen, dass nicht alle zweireihigen Determinanten null sind, da sonst die Complexe (8) einen gemeinsamen singulären Punkt hätten, also $m = 0$ wäre.

Die Formen A_i (Nr. 6) sind also unter der gemachten Annahme lineare Combinationen zweier Formen $\Phi(\lambda, \mu)$ und $\Psi(\lambda, \mu)$, die sich nicht nur um einen constanten Faktor unterscheiden, und der singuläre Punkt des den Parameterwerten

[1] Wir gebrauchen hier und im folgenden für geränderte alternirende Schemata eine auch sonst übliche abkürzende Schreibweise.

λ, μ entsprechenden Complexes der Schaar (8) hat die Coordinaten

$$\varrho\, \xi_i = a_i\, \Phi(\lambda, \mu) + b_i\, \Psi(\lambda, \mu), \tag{16}$$

worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor, die a_i, b_i Constante bedeuten. Die in λ, μ quadratische Gleichung:

$$\Phi - \omega\, \Psi = 0$$

besitzt, wenn für ω eine beliebige von Null verschiedene Constante gewählt wird, zwei Lösungen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, deren Determinante $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$ von Null verschieden ist. Sind nun die Complexe, die bezw. den Parameterwerten

$$\lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2 \tag{17}$$

entsprechen, beide allgemein, so sind die Grössen $\Psi(\lambda_1, \mu_1)$ und $\Psi(\lambda_2, \mu_2)$ beide von Null verschieden, da andernfalls die Formen $A_1 \ldots A_5$ für eines der beiden Wertsysteme (17) verschwänden; ferner verschwinden die Grössen

$$a_i\, \omega + b_i \quad (i = 1, \ldots 5) \tag{18}$$

nicht alle, da sonst die A_i proportional, also $m = 0$ wäre. Die genannten beiden allgemeinen Complexe haben dann einen gemeinschaftlichen singulären Punkt mit den Coordinaten (18), was offenbar wiederum auf die Voraussetzung $m = 0$ hinauskommt.

Ist aber einer der genannten zwei Complexe speziell, etwa der den Parameterwerten λ_1, μ_1 entsprechende, so hat man

$$a_i\, \Phi(\lambda_1, \mu_1) + b_i\, \Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

und infolgedessen $\Phi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, da die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ aus dem vorhin angeführten Grund nicht alle verschwinden; die Formen Φ und Ψ, und mithin auch die Formen $A_1 \ldots A_5$ haben also einen Linearfaktor gemein, d. h. die Zahlen, die in Nr. 6 mit m und l bezeichnet wurden, haben beide den Wert 1.

10. Umgekehrt, ist $m = l = 1$, so haben die A_i einen Linearfaktor gemein, d. h. die Schaar (8) enthält einen und nur einen speziellen Complex, dessen singuläre μ_2 mit s be-

$$(13)\qquad \left\|\begin{matrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k \quad , & 0, & 0 \\ v_k \quad , & 0, & 0 \end{matrix}\right\|$$ [1]

alle 6-reihigen Hauptdeterminanten für beliebige Werte λ, μ verschwinden. Dieses zweigliedrige Relationensystem wird auch erhalten, wenn man in der 5-zeiligen Matrix:

$$\| \xi_i, \Pi_i, \Omega_i, K_i \| \quad (i = 1, .. 5)$$

alle 4-reihigen Determinanten null setzt, oder noch einfacher in der Form:

$$(14)\qquad \sum^i \sum^k a_{ik} K_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik} \Pi_k \xi_i = 0$$

mit Hilfe der Bemerkung, dass die in Rede stehende μ_2 derjenigen Ebene angehören muss, die dem singulären Punkt des einen Complexes im andern Complex zugewiesen ist.

Die Congruenz (a, β) umfasst in dem vorliegenden Fall ∞^4 Gerade, von denen je ∞^1 durch einen beliebigen Punkt des R_4, und je ∞^2 durch einen Punkt des Kegelschnitts C gehen.

9. Wenn die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) eine Gerade g erfüllen sollen, so müssen in der Matrix

$$(15)\qquad \left\|\begin{matrix} \Pi_1 & \Omega_1 & K_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_5 & \Omega_5 & K_5 \end{matrix}\right\|$$

die dreireihigen Determinanten alle verschwinden, und wir dürfen annehmen, dass nicht alle zweireihigen Determinanten null sind, da sonst die Complexe (8) einen gemeinsamen singulären Punkt hätten, also $m = 0$ wäre.

Die Formen A_i (Nr. 6) sind also unter der gemachten Annahme lineare Combinationen zweier Formen $\Phi(\lambda, \mu)$ und $\Psi(\lambda, \mu)$, die sich nicht nur um einen constanten Faktor unterscheiden, und der singuläre Punkt des den Parameterwerten

---

[1]) Wir gebrauchen hier und im folgenden für geränderte alternirende Schemata eine auch sonst übliche abkürzende Schreibweise.

λ, μ entsprechenden Complexes der Schaar (8) hat die Coordinaten

$$\rho\,\xi_i = a_i\,\Phi(\lambda, \mu) + b_i\,\Psi(\lambda, \mu), \tag{16}$$

worin ρ einen Proportionalitätsfaktor, die a_i, b_i Constante bedeuten. Die in λ, μ quadratische Gleichung:

$$\Phi - \omega\,\Psi = 0$$

besitzt, wenn für ω eine beliebige von Null verschiedene Constante gewählt wird, zwei Lösungen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, deren Determinante $\lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1$ von Null verschieden ist. Sind nun die Complexe, die bezw. den Parameterwerten

$$\lambda_1, \mu_1;\quad \lambda_2, \mu_2 \tag{17}$$

entsprechen, beide allgemein, so sind die Grössen $\Psi(\lambda_1, \mu_1)$ und $\Psi(\lambda_2, \mu_2)$ beide von Null verschieden, da andernfalls die Formen $A_1 \ldots A_5$ für eines der beiden Wertsysteme (17) verschwänden; ferner verschwinden die Grössen

$$a_i\,\omega + b_i \quad (i = 1, \ldots 5) \tag{18}$$

nicht alle, da sonst die A_i proportional, also $m = 0$ wäre. Die genannten beiden allgemeinen Complexe haben dann einen gemeinschaftlichen singulären Punkt mit den Coordinaten (18), was offenbar wiederum auf die Voraussetzung $m = 0$ hinauskommt.

Ist aber einer der genannten zwei Complexe speziell, etwa der den Parameterwerten λ_1, μ_1 entsprechende, so hat man

$$a_i\,\Phi(\lambda_1, \mu_1) + b_i\,\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

und infolgedessen $\Phi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, da die Determinanten $a_i\,b_k - a_k\,b_i$ aus dem vorhin angeführten Grund nicht alle verschwinden; die Formen Φ und Ψ, und mithin auch die Formen $A_1 \ldots A_5$ haben also einen Linearfaktor gemein, d. h. die Zahlen, die in Nr. 6 mit m und l bezeichnet wurden, haben beide den Wert 1.

10. Umgekehrt, ist $m = l = 1$, so haben die A_i einen Linearfaktor gemein, d. h. die Schaar (8) enthält einen und nur einen speziellen Complex, dessen singuläre μ_2 mit s be-

$$(13) \qquad \left\| \begin{matrix} \lambda a_{ik} + \mu \beta_{ik}, & u_i, & v_i \\ u_k & , 0, & 0 \\ v_k & , 0, & 0 \end{matrix} \right\|$$ [1]

alle 6-reihigen Hauptdeterminanten für beliebige Werte λ, μ verschwinden. Dieses zweigliedrige Relationensystem wird auch erhalten, wenn man in der 5-zeiligen Matrix:

$$\| \xi_i, \Pi_i, \Omega_i, K_i \| \quad (i = 1, .. 5)$$

alle 4-reihigen Determinanten null setzt, oder noch einfacher in der Form:

$$(14) \qquad \sum^i \sum^k a_{ik} K_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik} \Pi_k \xi_i = 0$$

mit Hilfe der Bemerkung, dass die in Rede stehende μ_2 derjenigen Ebene angehören muss, die dem singulären Punkt des einen Complexes im andern Complex zugewiesen ist.

Die Congruenz (a, β) umfasst in dem vorliegenden Fall ∞^4 Gerade, von denen je ∞^1 durch einen beliebigen Punkt des R_4, und je ∞^2 durch einen Punkt des Kegelschnitts C gehen.

9. Wenn die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) eine Gerade g erfüllen sollen, so müssen in der Matrix

$$(15) \qquad \left\| \begin{matrix} \Pi_1 & \Omega_1 & K_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Pi_5 & \Omega_5 & K_5 \end{matrix} \right\|$$

die dreireihigen Determinanten alle verschwinden, und wir dürfen annehmen, dass nicht alle zweireihigen Determinanten null sind, da sonst die Complexe (8) einen gemeinsamen singulären Punkt hätten, also $m = 0$ wäre.

Die Formen A_i (Nr. 6) sind also unter der gemachten Annahme lineare Combinationen zweier Formen $\Phi(\lambda, \mu)$ und $\Psi(\lambda, \mu)$, die sich nicht nur um einen constanten Faktor unterscheiden, und der singuläre Punkt des den Parameterwerten

[1] Wir gebrauchen hier und im folgenden für geränderte alternirende Schemata eine auch sonst übliche abkürzende Schreibweise.

λ, μ entsprechenden Complexes der Schaar (8) hat die Coordinaten

$$(16)\qquad \varrho\,\xi_i = a_i\,\Phi(\lambda, \mu) + b_i\,\Psi(\lambda, \mu),$$

worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor, die a_i, b_i Constante bedeuten. Die in λ, μ quadratische Gleichung:

$$\Phi - \omega\,\Psi = 0$$

besitzt, wenn für ω eine beliebige von Null verschiedene Constante gewählt wird, zwei Lösungen λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, deren Determinante $\lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1$ von Null verschieden ist. Sind nun die Complexe, die bezw. den Parameterwerten

$$(17)\qquad \lambda_1, \mu_1;\ \lambda_2, \mu_2$$

entsprechen, beide allgemein, so sind die Grössen $\Psi(\lambda_1, \mu_1)$ und $\Psi(\lambda_2, \mu_2)$ beide von Null verschieden, da andernfalls die Formen $A_1 \ldots A_5$ für eines der beiden Wertsysteme (17) verschwänden; ferner verschwinden die Grössen

$$(18)\qquad a_i\,\omega + b_i \quad (i = 1, \ldots 5)$$

nicht alle, da sonst die A_i proportional, also $m = 0$ wäre. Die genannten beiden allgemeinen Complexe haben dann einen gemeinschaftlichen singulären Punkt mit den Coordinaten (18), was offenbar wiederum auf die Voraussetzung $m = 0$ hinauskommt.

Ist aber einer der genannten zwei Complexe speziell, etwa der den Parameterwerten λ_1, μ_1 entsprechende, so hat man

$$a_i\,\Phi(\lambda_1, \mu_1) + b_i\,\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0,$$

und infolgedessen $\Phi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, $\Psi(\lambda_1, \mu_1) = 0$, da die Determinanten $a_i\,b_k - a_k\,b_i$ aus dem vorhin angeführten Grund nicht alle verschwinden; die Formen Φ und Ψ, und mithin auch die Formen $A_1 \ldots A_5$ haben also einen Linearfaktor gemein, d. h. die Zahlen, die in Nr. 6 mit m und l bezeichnet wurden, haben beide den Wert 1.

10. Umgekehrt, ist $m = l = 1$, so haben die A_i einen Linearfaktor gemein, d. h. die Schaar (8) enthält einen und nur einen speziellen Complex, dessen singuläre μ_2 mit s be-

zeichnet werde; die singulären Punkte der ∞^1 Complexe (8) erfüllen eine Gerade g, die die Mannigfaltigkeit s in einem Punkte P trifft.

Diese letztere Behauptung ergibt sich folgendermassen: Jede Gerade der Congruenz (α, β) trifft die Mannigfaltigkeit s (Nr. 5), und die Verbindungslinie der singulären Punkte irgend zweier Complexe der Schaar ist eine Congruenzgerade; die Annahme ferner, dass g auf s liege, ist unstatthaft, da sonst die Gleichungen

$$(19) \qquad \sum^k \alpha_{ik}\, \xi_k = 0, \ \sum^k \beta_{ik}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, .. 5)$$

von allen singulären Punkten ξ der Complexe unserer Schaar erfüllt würden, also der Fall $m = 0$ vorläge.

Sind α und β allgemeine Complexe, und λ_0, μ_0 die Parameter des speziellen Complexes der Schaar, so hat der vorhin genannte Punkt P Coordinaten der Form $\varrho\, \Pi_i + \sigma\, K_i$, und man hat:

$$\varrho\, \sigma \neq 0; \ \lambda_0\, \mu_0 \neq 0;$$

$$(20) \quad \sum^k (\lambda_0\, \alpha_{ik} + \mu_0\, \beta_{ik})\, (\varrho\, \Pi_k + \sigma\, K_k) = 0 \quad (i = 1, 2, .. 5),$$

oder auch:

$$(21) \quad \lambda_0\, \sigma \sum^k \alpha_{ik}\, K_k + \mu_0\, \varrho \sum^k \beta_{ik}\, \Pi_k = 0 \quad (i = 1, 2, .. 5),$$

in Worten: Bezeichnet man mit M die $\mu_3\,(g, s)$, so ordnet jeder Complex der Schaar (8) einem beliebigen Punkte von g eben die Mannigfaltigkeit M zu (Nr. 2). In der That drücken ja die Relationen (21) aus, dass die μ_3, die der Complex α dem Punkte K_k zuweist, übereinstimmt mit der μ_3, die der Complex β dem Punkte Π_k zuordnet; also ordnet jeder Complex der Schaar (8) einem beliebigen Punkte von g dieselbe μ_3 zu, und letztere enthält g, aber offenbar auch s, d. i. die singuläre Mannigfaltigkeit des in der Schaar enthaltenen speziellen Complexes.

Daraus folgt sofort: A l l e i n M l i e g e n d e n G e r a d e n, d i e g s c h n e i d e n, s i n d C o n g r u e n z g e r a d e, a l l e e i n f a c h u n e n d l i c h v i e l e n i n M g e l e g e n e n μ_2, d i e g e n t h a l t e n, s i n d C o n g r u e n z - μ_2, und nach Nr. 7 gibt es auch keine

andere Congruenz-μ_2; M möge die ausgezeichnete Ebene der Congruenz (α, β) heissen.

Die Gleichungen (14) reduciren sich jetzt auf eine einzige, nämlich diejenige der ausgezeichneten Ebene. Man erhält die allgemeinste Congruenz von der hier studirten Beschaffenheit, indem man einen beliebigen allgemeinen Complex α und einen beliebigen speziellen Complex β wählt, doch so, dass der singuläre Punkt von α nicht auf der singulären μ_2 von β gelegen ist.

11. Ist die in Nr. 6 definirte Zahl $m = 0$, so wird wegen Gleichung (12) die Zahl $l = 2$, d. h. die Pfaff'schen Aggregate A_i sind proportional. Die Complexe der Schaar haben also einen gemeinsamen singulären Punkt S, und es gibt zwei im allgemeinen verschiedene spezielle Complexe, die der Schaar angehören, und deren singuläre μ_2 beide durch S gehen. Sind s, s' diese beiden μ_2, und bedeutet α einen allgemeinen Complex der Schaar, so schneiden alle Geraden von α, die mit s einen Punkt gemein haben, auch die Mannigfaltigkeit s' und umgekehrt, d. h. s und s' sind hinsichtlich des Complexes α conjugirt (Nr. 4 am Schluss).

Man erhält die allgemeinste in Rede stehende Configuration, wenn man α beliebig wählt, und unter β einen speziellen Complex versteht, dessen singuläre μ_2 durch den singulären Punkt S von α geht. Wählt man insbesondere eine μ_2 des Complexes α (Nr. 4), dann und nur dann coincidiren die beiden speziellen Complexe der Schaar (α, β), d. h. die 4-reihigen Hauptunterdeterminanten der Matrix (9) werden alle mit λ^4 proportional.

Durch jede Gerade g einer Congruenz (α, β), für die $m = 0$ ist, geht im allgemeinen (d. h. wenn g den singulären Punkt S nicht enthält) eine und nur eine Congruenz-μ_2; es ist dies diejenige μ_2, die g mit S verbindet. Dasselbe gilt für jede Gerade, die S enthält, ohne in einer der beiden singulären Mannigfaltigkeiten s, s' zu liegen; dagegen ist jede in s oder s' gelegene Gerade auf einfach unendlich vielen Congruenz-μ_2

enthalten. Es gibt daher im gegenwärtigen Fall zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2.

12. Verschwinden in der Matrix (9) alle vierreihigen Determinanten identisch, so sind alle Complexe der Schaar (8) speziell, und die linearen Gleichungen (11) besitzen 3 Lösungensysteme, deren Minimalgradzahlen hinsichtlich λ, μ mit m_1, m_2, m_3 bezeichnet seien. Sind dann die Elemente der Matrix (9) nicht proportional, also die Complexe α und β nicht identisch, so folgt aus der Theorie der Bilinearformen[1]) die Gleichung:

$$5 = 2\,(m_1 + m_2 + m_3) + 3.$$

Man hat sonach $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 1$, d. h. die linearen Gleichungen (19) haben zwei und nur zwei Lösungen η_i, ζ_i gemein. Die Verbindungslinie der Punkte η, ζ werde mit g bezeichnet. Die ∞^1 singulären μ_2 der Complexe unserer Schaar bilden ein Büschel mit der Axe g, das in einer μ_3 gelegen ist. Diese letztere μ_3 nennen wir die „singuläre Ebene M". Da jede Congruenz-μ_2 alle singulären μ_2 nach je einer Geraden schneiden muss (Nr. 7), so gibt es zwei Arten von Congruenz-μ_2: einmal sämtliche 3-fach unendlich vielen μ_2, die in M liegen, sodann die zweifach unendlich vielen μ_2, die die Gerade g enthalten. Die Congruenz ist identisch mit dem Inbegriff aller Geraden, die entweder g schneiden oder in M liegen.

Ist $u_\xi = 0$ die Definitionsgleichung der Ebene M, so verschwinden in der Matrix:

$$(22) \qquad \begin{Vmatrix} \lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik}, & u_i \\ u_k & , 0 \end{Vmatrix}$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch, und M ist die einzige Ebene dieser Eigenschaft.

13. Die Sätze der vorigen Nr. lassen sich leicht verallgemeinern. Wir betrachten die r-gliedrige Congruenz ($r > 2$):

$$(23) \qquad \sum \sum (\lambda\, a_{ik} + \mu\, \beta_{ik} + \ldots + \tau\, \varepsilon_{ik})\, \xi_i\, \eta_k = 0$$

und nehmen an, dass der Rang des Schemas

[1]) Vgl. z. B. diese Berichte 1898, pag. 374.

(24) $$\| \lambda a_{ik} + \ldots + \tau \varepsilon_{ik} \| \quad (i, k = 1, \ldots 5)$$

gleich zwei sei. Dann sind alle Complexe der Schaar (23) speziell; von den singulären μ_2 der Complexe $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ schneiden sich also je zwei nach einer Geraden. Diese $r - 1$-fach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten haben also entweder

a) eine Gerade g gemein, d. h. die $5r$ linearen Gleichungen:

(25) $$\sum^k a_{ik} \xi_k = 0, \ldots \sum^k \varepsilon_{ik} \xi_k = 0 \quad (i = 1, \ldots 5)$$

besitzen zwei Lösungen, und man hat $r = 3$; oder

b) sie liegen alle in einer dreidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M, der „singulären Ebene der Congruenz (23)", und es ist $r = 3$ oder 4.

Im ersten Fall besteht die Congruenz $(\alpha \beta \gamma)$ aus allen Geraden, die g treffen; es gibt zweifach unendlich viele Congruenz-μ_2, die alle durch g gehen und mit den singulären μ_2 der Complexe (23) identisch sind. Ist im Falle b) $r = 4$, so sind die Congruenzgeraden mit dem Inbegriff der in M liegenden Geraden identisch; ist aber $r = 3$, so haben die singulären μ_2 der Complexe α, β, γ einen Punkt P gemein, und die Congruenz setzt sich zusammen aus allen durch P gehenden und allen in M liegenden Geraden; unter beiden Annahmen gibt es dreifach unendlich viele Congruenz-μ_2, nämlich alle in M gelegenen μ_2.

Ist im Falle b) die Ebene M durch die Gleichung $u_\xi = 0$ definirt, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten u_i ein verträgliches System linearer Gleichungen, indem man ausdrückt, dass in der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \lambda a_{ik} + \ldots + \tau \varepsilon_{ik}, & u_i \\ u_k & , 0 \end{matrix} \right\|$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten identisch verschwinden, und es gibt nur ein Wertsystem u_i dieser Eigenschaft.

Natürlich folgt aus der Existenz einer Ebene $u_\xi = 0$, deren sämtliche Gerade den Complexen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ genügen, auch umgekehrt, dass der Rang der Matrix (24) gleich zwei ist.

Ist der Rang der Matrix (24) gleich vier, so enthält die Schaar (23) ∞^{r-1} allgemeine Complexe. Eine Congruenz-μ_2 muss alle singulären Punkte dieser Complexe enthalten. Soll also überhaupt eine Congruenz-μ_2 existiren, so müssen die singulären Punkte der ∞^{r-1} Complexe entweder auf einer μ_2 liegen, oder eine Gerade erfüllen, oder endlich alle identisch sein; wir wollen diese Annahmen der Reihe nach besprechen.

14. Bezeichnet man ähnlich wie in Nr. 6 mit

$$A_i = \Omega_{11}^{(i)} \lambda^2 + \Omega_{22}^{(i)} \mu^2 + \ldots + \Omega_{rr}^{(i)} \tau^2 + \Omega_{12}^{(i)} \lambda \mu + \ldots + \Omega_{r-1,r}^{(i)} \sigma \tau$$

das Pfaff'sche Aggregat, dessen Quadrat gleich ist dem durch Streichung der i^{ten} Zeile und Spalte aus (24) entstehenden Minor, so ist der singuläre Punkt des Complexes (23) durch die Gleichungen

$$\varrho\, \xi_i = A_i \quad (i = 1, \ldots 5) \tag{26}$$

definirt, worin ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Damit diese Punkte alle einer μ_2 angehören, ist notwendig und hinreichend, dass alle 4-reihigen, nicht aber alle 3-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \Omega_{11}^{(i)} & \Omega_{12}^{(i)} & \ldots & \Omega_{r-1,r}^{(i)}, & \Omega_{rr}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\| \tag{27}$$

verschwinden, und man erhält die Definitionsgleichungen dieser μ_2, indem man obiger Matrix die Spalte $\xi_1 \ldots \xi_5$ beifügt, und alle 4-reihigen Determinanten des so gebildeten Schemas Null setzt. Damit aber diese μ_2 wirklich eine Congruenz-μ_2 sei, ist weiterhin auszudrücken, dass sie die Complexe $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ alle befriedigt (Nr. 7).

15. Damit die singulären Punkte der Complexe (23) eine Gerade g erfüllen, ist notwendig und hinreichend, dass in der Matrix (27) alle dreireihigen, aber nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden. Dann reduciren sich die quadratischen Formen $A_1 \ldots A_5$ auf nur 2 linear unabhängige, d. h. die Formeln (26) können auf folgende Gestalt gebracht werden:

(28) $$\varrho\, \xi_i = a_i\, \Phi + b_i\, \Psi \quad (i = 1, .. 5),$$

worin Φ, Ψ zwei quadratische Formen der r Variabeln $\lambda, \mu, .. \tau$, und die a_i, b_i Constante bedeuten. Die Determinanten $a_i b_k - a_k b_i$ verschwinden offenbar nicht alle, da sonst die singulären Punkte der Complexe (23) alle identisch wären.

Deuten wir die $\lambda, \mu, .. \tau$ für den Augenblick als homogene Punktcoordinaten in einem Raume $\mathfrak{R}_{r-1}$, so wird durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ dieses Raums ein Complex $\mathfrak{C}$ der Schaar (23) repräsentirt; dieser ist dann und nur dann speziell, wenn $\mathfrak{P}$ auf der Schnittmannigfaltigkeit der beiden Flächen:

(29) $$\Phi = 0, \quad \Psi = 0$$

liegt. Es seien nun $\lambda, \mu, .. \tau$ und $\lambda', \mu', .. \tau'$ zwei Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ des $\mathfrak{R}_{r-1}$, die nicht auf der Mannigfaltigkeit (29) liegen, aber beide der Relation

(30) $$\Phi - \omega\, \Psi = 0$$

genügen, worin ω eine beliebige Constante bedeutet. Dann repräsentiren die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ allgemeine Complexe $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ der Schaar (23) mit gemeinsamem singulären Punkt, und da alle ∞^1 Complexe der durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ definirten Congruenz diesen singulären Punkt gemein haben, so müssen ihre repräsentirenden Punkte die Relation (30) ebenfalls erfüllen. Enthält also die Fläche (30) zwei Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, die nicht auf der Mannigfaltigkeit (29) gelegen sind, so enthält sie auch alle Punkte ihrer Verbindungslinie. Daher müssen alle quadratischen Formen $\Phi - \omega\, \Psi$ in je zwei Linearfaktoren zerfallen, und dies ist nur möglich, wenn Φ, Ψ selbst und infolge dessen auch die Pfaffschen Aggregate $A_1 .. A_5$ einen Linearfaktor L gemein haben. Durch die Relation

$$L \equiv a\lambda + b\mu + .. + e\tau = 0$$

wird nun eine in der Schaar (23) enthaltene $r - 1$-gliedrige Congruenz definirt, die aus lauter speziellen Complexen besteht; also muss jedenfalls $r \leqq 5$ sein.

16. Es sei zunächst $r = 3$. Unter a verstehen wir dann einen allgemeinen Complex, unter (β, γ) die soeben constatirte,

aus ∞^1 speziellen Complexen bestehende Congruenz. Ist der singuläre Punkt S von a nicht auf der singulären Ebene M dieser Congruenz gelegen, so kann nach Nr. 7 nur die μ_2, die den Punkt S mit der Schnittgeraden g der beiden singulären μ_2 von β und γ verbindet, den 3 Complexen a, β, γ gleichzeitig genügen. Damit dies der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Gerade g dem Complex a angehöre.

Liegt dagegen S auf M, so gibt es nach Nr. 4 einfach unendlich viele in M gelegene μ_2, die alle eine Gerade g' enthalten und dem Complex a, aber nach Nr. 12 auch den Complexen β und γ genügen; man erkennt auch nach Nr. 7 sofort, dass es keine andern μ_2 der Congruenz (a, β, γ) geben kann.

Zweitens machen wir die Annahme $r = 4$ und bezeichnen wieder mit a einen allgemeinen, mit (β, γ, δ) die Congruenz der ∞^2 speziellen Complexe. Haben die singulären Mannigfaltigkeiten der letzteren eine Gerade g gemein (Nr. 13), und genügt diese dem Complex a, so befriedigt die μ_2 (S, g) und nur diese alle 4 gegebenen Complexe. Besitzt dagegen die Congruenz (β, γ, δ) eine singuläre Mannigfaltigkeit M (Nr. 13), und liegt S auf dieser, so gibt es wie vorhin ein in M gelegenes Büschel von einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten μ_2, die unsere 4 Complexe gleichzeitig erfüllen. In allen andern Fällen existirt überhaupt keine μ_2 der Congruenz ($a\ \beta\ \gamma\ \delta$).

Unter der Annahme $r = 5$ endlich muss der singuläre Punkt S des allgemeinen Complexes a auf der singulären Ebene M der speziellen Congruenz ($\beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon$) liegen, wenn es überhaupt eine μ_2 der 5-gliedrigen Congruenz ($a \,..\, \varepsilon$) geben soll; ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es wie in den früheren Fällen ein Büschel von einfach unendlich vielen Congruenz-μ_2.

17. Aus der vorigen Nr. folgt, dass unter gewissen leicht aufzustellenden rationalen Bedingungsgleichungen für die a_{ik}, $\beta_{ik} \dots$ innerhalb einer zwei- oder mehrgliedrigen Congruenz einfach unendlich viele Congruenz-μ_2 existiren können, die alle in einer μ_3 liegen und daselbst ein Büschel mit gemeinsamer Axe

g **bilden**; diese μ_3 wollen wir dann als die „ausgezeichnete Ebene“ der Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ bezeichnen.

18. Sind die in Nr. 14 betrachteten quadratischen Formen $\Delta_1, .. \Delta_5$ proportional, dann und nur dann haben die linearen Gleichungen

$$(31) \qquad \sum^k \alpha_{ik}\, \xi_k = 0,\ \sum^k \beta_{ik}\, \xi_k = 0\ .. \quad (i = 1\,..5)$$

eine Lösung, die Complexe der r-gliedrigen Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ mithin den singulären Punkt S gemein. Es sei R_3 eine beliebige ebene, dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die den Punkt S nicht enthält. Die auf R_3 gelegenen Geraden des Complexes α bilden dann einen gewöhnlichen R_3-Complex α'; ebenso schneidet β aus dem R_3 einen gewöhnlichen Liniencomplex β' aus, etc. Ist g eine gemeinsame Gerade der Complexe $\alpha', \beta', .. \varepsilon'$, so genügt die $\mu_2\,(g, S)$ allen Complexen der Schaar $(\alpha .. \varepsilon)$, und umgekehrt erhält man auf diesem Wege auch alle μ_2 unserer Congruenz; die Aufsuchung dieser letzteren reducirt sich also auf die Ermittelung der gemeinsamen Geraden mehrerer Liniencomplexe im gewöhnlichen Raum.

Die Congruenz $(\alpha, \beta, .. \varepsilon)$ setzt sich unter der gemachten Annahme zusammen aus den Geraden, die durch S gehen, und aus den Geraden, die in den soeben definirten Congruenz-μ_2 gelegen sind.

19. Eine zweigliedrige Congruenz besteht aus ∞^4 Geraden; durch einen beliebigen Punkt P des R_4, der nicht auf der singulären μ_2 eines in der Congruenz enthaltenen speziellen Complexes gelegen ist oder mit dem singulären Punkt eines der Complexe der Schaar zusammenfällt, geht ein lineares Büschel von Congruenzgeraden; hat P eine der angegebenen besonderen Lagen, so gehen durch ihn ∞^2 Congruenzgeraden. Ist P gemeinsamer singulärer Punkt aller allgemeinen Complexe der Schaar, oder sind die ∞^1 Complexe alle speziell und liegt P auf der gemeinsamen Schnittgeraden ihrer singulären Mannigfaltigkeiten, so sind alle durch P gehenden Geraden in der Congruenz enthalten.

Eine dreigliedrige Congruenz $(\alpha\, \beta\, \gamma)$ besteht im allgemeinen

aus ∞^3 Geraden, von denen eine und nur eine durch einen beliebigen Punkt P des R_4 geht. Sollen ∞^4 Congruenzgerade vorhanden sein, so können diese erstens eine dreifach ausgedehnte, notwendig lineare Punktmannigfaltigkeit M erfüllen; dann sind alle Complexe der Schaar speziell, und M ist ihre singuläre Mannigfaltigkeit (Nr. 13). Zweitens aber können die ∞^4 Congruenzgeraden den Raum R_4 erfüllen, und es geht dann durch jeden Punkt P ein lineares Büschel von ∞^1 Congruenzgeraden, mit andern Worten: Bedeuten $\eta_1 \ldots \eta_5$ die Coordinaten von P, so reduciren sich die drei linearen Gleichungen:

$$\sum \sum a_{ik} \eta_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \beta_{ik} \eta_k \xi_i = 0, \quad \sum \sum \gamma_{ik} \eta_k \xi_i = 0$$

auf nur 2 linear unabhängige. Für jedes Wertsystem $\eta_1 \ldots \eta_5$ gibt es also drei Grössen $\varrho, \varrho', \varrho''$, die nicht alle verschwinden und die Relationen

$$\sum^k (\varrho\, a_{ik} + \varrho'\, \beta_{ik} + \varrho''\, \gamma_{ik})\, \eta_k = 0 \quad (i = 1 \ldots 5)$$

erfüllen; d. h. jeder Punkt des R_4 ist entweder auf der singulären μ_2 eines speziellen Complexes der Schaar $(a\,\beta\,\gamma)$ gelegen, oder mit dem singulären Punkte eines Complexes der Schaar identisch. Diese Schaar muss also aus ∞^2 speziellen Complexen bestehen, da sonst die singulären μ_2 bezw. Punkte der ∞^2 Complexe nicht den ganzen Raum R_4 erfüllen könnten.

Die singulären μ_2 der ∞^2 speziellen Complexe müssen ferner eine Gerade g gemein haben. Liegt eine solche Congruenz vor, so geht in der That durch jeden Punkt P ein lineares Büschel von Congruenzgeraden, bestehend aus den Geraden, die g schneiden.

Da durch eine gegebene Gerade g nur drei linear unabhängige μ_2 hindurchgehen, so schliessen wir:

Ist eine Congruenz mehr als dreigliedrig, so kann durch einen beliebigen Punkt des R_4 höchstens **eine** Gerade der Congruenz hindurchgehen.

Soll also eine 4-gliedrige Congruenz ∞^4 Geraden enthalten, so erfüllen diese eine ebene Mannigfaltigkeit M; die ∞^3 Complexe der Schaar sind speziell, M ist ihre singuläre Ebene (Nr. 13).

Eine mehr als 4-gliedrige Congruenz kann aus höchstens ∞^3 Geraden bestehen.

20. Soll durch jeden Punkt des R_4 mindestens eine Gerade der viergliedrigen Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ hindurchgehen, so schliesst man aus der Thatsache, dass die vier linearen Gleichungen

$$\sum\sum \alpha_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0\,..\;\sum\sum \delta_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0$$

für jedes Wertsystem η linear abhängig sind, genau wie in der vorigen Nr., dass die Congruenz ∞^2 spezielle Complexe enthalten muss. Sie kann nun nicht aus ∞^3 speziellen Complexen bestehen, da in diesem Fall nur durch Punkte der singulären Ebene (Nr. 13), nicht aber durch einen beliebigen Raumpunkt, Congruenzgerade gingen. Also sind die aus den Elementen der Matrix:

$$\|\lambda\,\alpha_{ik} + \mu\,\beta_{ik} + \nu\,\gamma_{ik} + \varrho\,\delta_{ik}\| \quad (i, k = 1, ..5)$$

gebildeten Pfaff'schen Aggregate $A_1\,..\,A_5$ (Nr. 14) entweder:

a) proportional, und unsere Congruenz besteht aus allen ∞^3 Geraden, die den gemeinsamen singulären Punkt S der Complexe unserer Schaar enthalten, oder

b) die A_i haben einen in $\lambda\,\mu\,\nu\,\varrho$ linearen homogenen Faktor L gemein. Die durch die Relation $L = 0$ definirte ∞^2-Schaar von speziellen Complexen kann ferner keine singuläre Ebene besitzen, da sonst der singuläre Punkt eines jeden in der Schaar $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ enthaltenen allgemeinen Complexes nach Nr. 13 identisch sein müsste mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der singulären Mannigfaltigkeiten jener ∞^2 speziellen Complexe, also wiederum die Annahme a) vorläge; die singulären μ_2 unserer ∞^2 speziellen Complexe haben also eine Gerade g gemein.

Umgekehrt, wählt man im R_4 eine Gerade g beliebig, so gehen durch sie drei linear unabhängige μ_2; die durch diese bestimmten speziellen Complexe nennen wir β, γ, δ. Ist dann α ein beliebiger allgemeiner Complex, dessen singulärer Punkt S nicht auf g liegt, so erhält man die allgemeinste viergliedrige Congruenz von der Art b). Durch jeden Punkt des R_4 geht

jetzt in der That eine und im allgemeinen nur eine Gerade der Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$; die letztere besteht aus ∞^3 Geraden, die alle die Gerade g schneiden.

21. Wenn eine 5- oder 6-gliedrige Congruenz die Eigenschaft besitzen soll, dass durch einen beliebigen Raumpunkt **eine** Congruenzgerade geht, so müssen alle ihre Complexe den singulären Punkt S, die linearen Gleichungen (25) also eine Lösung gemein haben.

In der That, bezeichnen wir die betrachtete fünfgliedrige Congruenz mit $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon)$, und gehört die viergliedrige Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ zu dem vorhin mit a) bezeichneten Typus, so muss der singuläre Punkt von ε mit dem gemeinsamen singulären Punkt S der Complexe α, β, γ, δ übereinstimmen, da ja der Annahme nach alle durch S gehenden Geraden auch in ε enthalten sind.

Ist aber die Congruenz $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ von der Art b) (Nr. 20), und verstehen wir unter $(\beta\,\gamma\,\delta)$ wie vorhin die aus ∞^2 speziellen Complexen bestehende Congruenz, unter α, ε allgemeine Complexe, so wird die Gerade g der Nr. 20 von allen ∞^3 Geraden der Congruenz $(\alpha\,..\,\varepsilon)$ geschnitten, also müssen durch jeden Punkt P von g zweifach unendlich viele Geraden der Congruenz $(\alpha\,\beta\,..\,\varepsilon)$, also auch der Congruenz $(\alpha\,\varepsilon)$ hindurchgehen, d. h. für jeden auf g gelegenen Punkt η reduciren sich die 2 linearen Gleichungen

$$\sum\sum a_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0,\quad \sum\sum \varepsilon_{ik}\,\eta_k\,\xi_i = 0$$

auf eine einzige; ein beliebiger Punkt P von g ist also entweder

1) mit dem singulären Punkt eines allgemeinen Complexes α' der Schaar $(\alpha\,\varepsilon)$ identisch, oder

2) auf der singulären Mannigfaltigkeit eines in der Schaar $(\alpha\,\varepsilon)$ enthaltenen speziellen Complexes ε' gelegen.

Im Falle 1) besitzt die Congruenz $(\alpha'\,\beta\,\gamma\,\delta)$ den gemeinsamen singulären Punkt P, und wir kommen auf den Fall zurück, der zu Anfang dieser Nr. erledigt wurde. Da es ferner in der Congruenz $(\alpha\,\varepsilon)$ nicht ∞^1 spezielle Complexe gibt,

so wäre unter der Voraussetzung 2) die ganze Gerade g auf der singulären Mannigfaltigkeit eines speziellen Complexes ε' gelegen; ε' wäre also einerseits in der Congruenz $(\beta\ \gamma\ \delta)$, andererseits in der Congruenz $(\alpha\ \varepsilon)$ enthalten, was mit der linearen Unabhängigkeit unserer 5 Complexe unverträglich ist.

Da es ferner nach Nr. 18 nicht mehr als 6 linear unabhängige Complexe mit gemeinschaftlichem singulären Punkt geben kann, so existiren für eine mehr als sechsgliedrige Congruenz höchstens ∞^3 Raumpunkte, durch welche Congruenzgeraden hindurchgehen.

22. Schliesslich wollen wir noch die Frage erörtern, unter welchen Bedingungen eine mehr als dreigliedrige Congruenz dreifach unendlich viele Geraden enthält. Der Fall, dass diese Geraden den ganzen Raum R_4 durchziehen, wurde in den beiden vorhergehenden Artikeln erledigt. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit zu diskutiren, dass die ∞^3 Congruenzgeraden eine dreifach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit, d. h. also eine „Fläche" M erfüllen. Durch jeden Punkt P von M geht nun der Annahme nach ein System von ∞^1 Geraden, die auf M gelegen sind und ein lineares Büschel bilden, d. h. in einer durch P gehenden und auf M liegenden zweifach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit π enthalten sind.

Es sind nun mindestens ∞^1 solcher Mannigfaltigkeiten π vorhanden; gibt es deren weniger als ∞^3, so müssen umgekehrt jeder Mannigfaltigkeit π mindestens ∞^1 auf ihr liegende Punkte P zugewiesen sein, in dem Sinne, dass alle durch einen solchen Punkt gehenden und auf π liegenden Geraden unserer Congruenz angehören. Dann aber sind alle Geraden, die in π liegen, Congruenzgerade; mithin existiren einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, und wir kommen auf die in Nr. 16 studirten Fälle zurück. Unter den dort angegebenen Bedingungen gibt es in der That einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, die ein Büschel mit gemeinsamer Axe g bilden und in der „ausgezeichneten Ebene M" gelegen sind, und infolge dessen auch ∞^3 Congruenzgerade, die in M liegen und einen speziellen R_3-Complex mit der Direktrix g darstellen.

Gibt es dreifach unendlich viele Mannigfaltigkeiten π, so ist die Fläche M offenbar wiederum eine Ebene, und die ∞^3 Geraden der Congruenz bilden innerhalb derselben einen allgemeinen linearen R_3-Complex. Die Bilinearformen

$$(32) \qquad \sum_1^5 \sum_1^5 a_{ik} \xi_i \eta_k, \quad \sum_1^5 \sum_1^5 \beta_{ik} \xi_i \eta_k \ldots \sum_1^5 \sum_1^5 \varepsilon_{ik} \xi_i \eta_k$$

reduciren sich also, wenn die Ebene M durch die Gleichung $u_\xi = 0$ dargestellt wird, vermöge dieser Gleichung und der dazu congruenten $u_\eta = 0$ auf nur eine einzige Bilinearform in 4 Variabelnpaaren. Durch Bildung geeigneter Linearcombinationen kann man insbesondere erreichen, dass alle Bilinearformen (32) mit Ausnahme der ersten vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ identisch verschwinden. Dann sind aber alle Complexe der Schaar $(\beta \ldots \varepsilon)$ speziell und besitzen die singuläre Mannigfaltigkeit M (Nr. 13). Indem wir diese Sätze zusammenfassen, gelangen wir zu dem Resultat:

Damit eine r-gliedrige Congruenz aus dreifach unendlich vielen Geraden bestehe, ohne dass durch jeden Punkt des R_4 eine dieser Geraden hindurchgeht, ist notwendig und hinreichend, dass $r = 4$ oder 5 sei, dass ferner die Pfaff'schen Aggregate $A_1 \ldots A_5$ einen Linearfaktor L gemein haben, dass endlich im Falle $r = 4$ die durch $L = 0$ definirte spezielle Congruenz eine singuläre Ebene besitze.

Aus dieser und den beiden vorhergehenden Nummern folgt ferner:

Eine vier- oder mehrgliedrige Congruenz kann höchstens zweifach unendlich viele Geraden enthalten, ausser wenn die Pfaff'schen Aggregate $A_1 \ldots A_5$ proportional sind oder einen Linearfaktor gemein haben, oder identisch verschwinden. In den beiden ersten Fällen besteht die Congruenz aus ∞^3, in dem zuletzt genannten Fall aus ∞^4 Geraden.

II. Reduction der $n - 5$-gliedrigen Pfaff'schen Systeme mit n Veränderlichen.

23. Die Theorie des linearen R_4-Complexes soll uns nun zur Beantwortung folgender Frage dienen:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein $n - 5$-gliedriges Pfaff-sches System in n Variabeln

$$(33)\qquad d\,x_{5+h} = \sum_1^5{}^i\, a_{ih}(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, d\,x_i \quad (h = 1, \ldots n - 5)$$

sich auf eine Form mit nur $n - 5 + \varrho$ Differentialelementen

$$(34)\qquad d\,f_{\varrho+h} = \sum_1^\varrho{}^i\, F_{ih}\, d\,f_i \quad (h = 1, \ldots n - 5)$$

bringen lasse, worin die Funktionen

$$f_1,\, f_2,\, \ldots f_{n-5+\varrho}$$

unabhängig sind?

Die Thatsache, dass das vorgelegte System (33) in der Form (34) geschrieben werden kann, ist nach Nr. 2 meiner früheren Arbeit[1]) mit der andern äquivalent, dass vermöge der Relationen

$$(35)\qquad \sum_1^5{}^i\, \xi_i \cdot A_i f_k = 0,\; \sum_1^5{}^i\, \eta_i \cdot A_i f_k = 0 \quad (k = 1, \ldots \varrho)$$

sämtliche Bilinearformen der Schaar:

$$(36)\qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k \Big(\sum_1^{n-5}{}^h\, a_{ikh}\, \lambda_h\Big)\, \xi_i\, \eta_k$$

identisch verschwinden; dabei ist gesetzt:

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 276.

$$A_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-5} {}^h a_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{5+h}}$$

$$a_{ikh} \equiv - a_{kih} \equiv A_i a_{kh} - A_k a_{ih},$$

und die $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-5}$ bedeuten willkürliche Parameter.

Damit also eine Darstellung (34) möglich sei, ist notwendig und hinreichend:

1) dass überhaupt wenigstens ein System von ϱ congruenten Relationenpaaren

$$\begin{matrix} u_{i1}\,\xi_1 + \ldots + u_{i5}\,\xi_5 = 0 \\ u_{i1}\,\eta_1 + \ldots + u_{i5}\,\eta_5 = 0 \end{matrix} \quad (i = 1, \ldots \varrho)$$

existire, vermöge deren die sämtlichen Bilinearformen der Schaar (36) identisch verschwinden;

2) dass sich unter den so definirten ϱ-gliedrigen Relationensystemen

$$(37) \qquad u_{i1}\,dx_1 + u_{i2}\,dx_2 + \ldots + u_{i5}\,dx_5 = 0 \quad (i = 1 \ldots \varrho)$$

wenigstens eines derart auswählen lasse, dass die Pfaff'schen Gleichungen (33) und (37) zusammen ein $n - 5 + \varrho$-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden.

Mit $\varkappa$ bezeichnen wir fortan immer den „Charakter" des Pfaff'schen Systems (33), d. i. den Rang der aus 10 Spalten und $n - 5$ Zeilen bestehenden Matrix

$$(38) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{121} & a_{131} & \ldots & a_{451} \\ a_{122} & a_{132} & \ldots & a_{452} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \end{matrix} \right\|,$$

also die Anzahl der linear unabhängigen Complexe in der Schaar (36); ferner mit 2σ den Rang der alternirenden 5-zeiligen Matrix

$$(39) \qquad \left\| \sum_1^{n-5} {}^h \lambda_h a_{ikh} \right\| \quad (i, k = 1, \ldots 5),$$

d. h. die Ordnung der höchsten in dieser Matrix enthaltenen Hauptunterdeterminanten, die nicht für jedes beliebige Wertsystem $x_1 \ldots x_n, \lambda_1 \ldots \lambda_{n-5}$ verschwinden.

Da für die oben definirte Zahl ϱ nur die Werte 1, 2, 3 in Betracht kommen, so untersuchen wir zunächst die Annahme $\varrho = 1$.

24. Damit das gegebene Pfaff'sche System (33) auf die Form:

$$(40) \qquad d f_{h+1} = F_h \, d f_1 \quad (h = 1, \ldots n - 5)$$

gebracht werden könne, ist zunächst notwendig, dass $2\sigma = 2$ [1]), also alle Complexe der Schaar (36) speziell seien. Ist überdies $\varkappa = 1$, so kann, wie ich früher gezeigt habe [2]), das gegebene Pfaff'sche System immer, und zwar auf unendlich viele Arten, in die Form (40) umgesetzt werden.

Ist aber $\varkappa = 2$, so besitzt nach Nr. 13 die Complexschaar (36) eine singuläre Ebene, die durch die Relation

$$(41) \qquad u_1 \xi_1 + \ldots + u_5 \xi_5 = 0$$

dargestellt werde, und das Relationenpaar $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ ist das einzige, vermöge dessen alle Bilinearformen der Schaar (36) identisch null sind. Zur Existenz einer reducirten Form (40) ist jetzt notwendig und hinreichend, dass das Pfaff'sche System

$$(42) \qquad \begin{cases} d x_{5+h} = \sum_1^5{}^i a_{ih} \, d x_i \quad (h = 1 \ldots n - 5) \\ u_1 \, d x_1 + \ldots + u_5 \, d x_5 = 0 \end{cases}$$

unbeschränkt integrabel sei, mit andern Worten, dass in der Matrix:

$$(43) \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & u_{12} & \ldots & u_{15} & u_1 \\ u_{21} & 0 & \ldots & u_{25} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & & \cdot \\ u_{51} & u_{52} & \ldots & 0 & u_5 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_5 & 0 \end{matrix} \right\| \quad (u_{ik} = A_i u_k - A_k u_i)$$

alle 4-reihigen Hauptunterdeterminanten verschwinden. Die u_i bedeuten dabei leicht zu bildende rationale Funktionen der Grössen a_{ikh}.

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 275.

[2]) Leipziger Berichte 1898, pag. 207.

Ist $\varkappa = 3$, so besitzt die Congruenz (36) eine singuläre Ebene (41) oder nicht, je nachdem die 5 (n — 5) linearen Gleichungen

$$(44) \qquad \sum_1^5{}^k a_{ikh}\,\xi_k = 0 \quad (i = 1, .. 5;\ h = 1 .. n - 5)$$

eine einzige oder zwei linear unabhängige Lösungen zulassen, je nachdem also die 5 (n — 5)-spaltige und 5-zeilige Matrix, die durch Nebeneinandersetzen der n — 5 alternirenden fünfzeiligen Schemata $\| a_{ik1} \|$, $\| a_{ik2} \|$, etc. entsteht, den Rang 4 oder den Rang 3 hat. Nur im ersteren Fall ist eine Darstellung (40) möglich, und zwar ist dazu weiterhin notwendig (und hinreichend), dass in der Matrix (43) wiederum alle vierreihigen Hauptunterdeterminanten Null sind.

Im Falle $\varkappa = 4$, $2\sigma = 2$ endlich gibt es immer eine singuläre Ebene (41), und man erhält für die Möglichkeit einer reducirten Form (40) dieselben Bedingungen wie soeben.

25. Wir diskutiren nunmehr die Bedingungen dafür, dass das vorgelegte n — 5-gliedrige Pfaff'sche System (33) in der Form

$$(45) \qquad d f_{2+h} = F_{1h}\, d f_1 + F_{2h}\, d f_2 \quad (h = 1, .. n - 5)$$

geschrieben werden kann, und zwar werde zunächst $2\sigma = 2$ angenommen.

Unter der Voraussetzung $\varkappa = 1$ ist nach dem Anfang der vorigen Nr. eine Darstellung (45) immer in dem Sinne möglich, dass die Funktion f_2 ganz beliebig gewählt werden kann.

Wir betrachten nun zunächst die Annahme $\varkappa = 3$ oder 4, und fügen im ersten Fall noch ausdrücklich die Bedingung hinzu, dass die Congruenz (36) eine singuläre Ebene besitze (was für $\varkappa = 4$ immer stattfindet). Diese Ebene werde durch die Gleichung (41) dargestellt. Ist dann das Pfaff'sche System (42) unbeschränkt integrabel, und bedeutet f_2 eine willkürliche Funktion von $x_1 .. x_n$, so bilden die Gleichungen (42) zusammen mit $d f_2 = 0$ ebenfalls ein unbeschränkt integrables n — 3-gliedriges System, und man schliesst, dass für das vor-

gelegte $n - 5$-gliedrige System (33) unbegrenzt viele Darstellungen (45) existiren, in denen f_2 willkürlich gewählt werden kann, worauf die übrigen Funktionen f_i auf eine und wesentlich nur eine Weise bestimmt sind.

Ist das Pfaff'sche System (42) nicht unbeschränkt integrabel, so schreiben wir es in der Form:

$$(46) \qquad d x_{4+h} = b_{1h} \, d x_1 + \ldots + b_{4h} \, d x_4 \quad (h = 1 \ldots n - 4).$$

Setzen wir dann:

$$B_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-4}{}^h \, b_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_{4+h}} \quad (i = 1, \ldots 4),$$

$$b_{ikl} \equiv - b_{kil} \equiv B_i \, b_{kl} - B_k \, b_{il},$$

so ist die Anzahl der linear unabhängigen bilinearen Formen des Systems

$$(47) \qquad \sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k \, b_{ikl} \, \xi_i' \, \eta_k' \quad (l = 1, \ldots n - 4)$$

gleich eins; denn vermöge der Relation (41) und der dazu congruenten verschwinden alle Bilinearformen der Schaar (36) identisch. Also hat man Identitäten der Form:

$$b_{ikl} \equiv \varrho_l \, b_{ik1} \quad (l = 2, 3, \ldots n - 4),$$

und der Rang der Matrix

$$(48) \qquad \| b_{ik1} \| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ist gleich 4 oder 2, je nachdem derjenige der Matrix (43) gleich 6 oder 4 ist.

Soll nun für das ursprünglich vorgelegte $n - 5$-gliedrige Pfaff'sche System eine Darstellung (45) existiren, so müssen nach Nr. 23 die Relationen

$$(49) \qquad \sum_1^5{}^i \, A_i f_1 \cdot \xi_i = 0; \quad \sum_1^5{}^i \, A_i f_2 \cdot \xi_i = 0$$

eine Congruenz-μ_2 der Complexschaar (36) darstellen, also mit den congruenten Relationen zusammen alle Bilinearformen (36) anulliren. Da aber nach Nr. 13 jede Congruenz-μ_2 in der singulären Ebene der Congruenz (36) enthalten ist, so muss

$u_\xi = 0$ eine Folge des Gleichungspaares (49) sein. Mit Rücksicht auf die vermöge (33) bestehende Identität

$$d f_i \equiv A_1 f_i \cdot d x_1 + \ldots + A_5 f_i \cdot d x_5$$

muss also auch das Pfaff'sche System (42) durch die Relationen

$$d f_1 = 0, \; d f_2 = 0, \ldots \; d f_{n-3} = 0$$

befriedigt werden.

Kann also das $n - 5$-gliedrige System (33) auf die Form (45) gebracht werden, so lässt sich das $n - 4$-gliedrige System (42) in der Gestalt:

$$(50) \qquad d f_{1+h} = \Phi_h \, d f_1 \quad (h = 1, \ldots n - 4)$$

schreiben, und offenbar gilt auch die Umkehrung dieses Satzes. Damit sich aber das System (42) auf die angegebene Gestalt reduciren lasse, ist nach meiner früheren Arbeit[1]) notwendig und hinreichend, dass der Rang der Matrix (48) gleich 2 sei, und es folgt:

Ist $2\sigma = 2$, $\varkappa = 3$ und besitzt die Congruenz (36) eine singuläre Ebene, oder ist $2\sigma = 2$, $\varkappa = 4$, so lässt sich das gegebene $n - 5$-gliedrige Pfaff'sche System dann und nur dann auf $n - 3$ Terme reduciren, wenn die 6-reihige alternirende Determinante (43) identisch verschwindet; es gibt dann unbegrenzt viele Darstellungen der geforderten Beschaffenheit.

26. Um die Voraussetzung $\varrho = 2$, $2\sigma = 2$ vollständig zu erledigen, bleiben nur noch die Annahmen $\varkappa = 2$, $\varkappa = 3$ zu diskutiren, letztere für den Fall, dass keine singuläre Ebene existirt. In beiden Fällen haben die singulären μ_2 der Complexe unserer Schaar (36) eine Gerade g, und mithin die linearen Gleichungen (44) zwei Lösungen ξ', ξ'' gemein, d. h. das Pfaff'sche System (33) gestattet[1]) die beiden unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X' f \equiv \Sigma \, \xi'_i \, A_i f; \quad X'' f \equiv \Sigma \, \xi''_i \, A_i f,$$

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 207.

und die Gleichungen $X'f = 0$, $X''f = 0$ bilden ein zweigliedriges vollständiges System mit $n-2$ Integralen $y_1, \ldots y_{n-2}$. Führt man diese nebst zwei beliebigen andern Funktionen als neue Variabeln in das System (33) ein, so verwandelt sich letzteres in ein Pfaff'sches System, das nur mehr die Variabeln y enthält, also die Form

$$(51) \qquad d\,y_{3+h} = \sum_1^3{}^i c_{ih}(y_1 \ldots y_{n-2})\,d\,y_i \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

annimmt. Wir fügen diesem System zwei beliebige Gleichungen

$$(52) \qquad d\,y_1 : d\,y_2 : d\,y_3 = \Phi_1 : \Phi_2 : \Phi_3$$

hinzu, worin die Φ irgend welche Funktionen der y bedeuten; stellen dann die Relationen

$$(53) \qquad \Psi_i(y_1 \ldots y_{n-2}) = \text{Const.} \quad (i = 1, \ldots n-3)$$

die allgemeinen Integralgleichungen des simultanen Systems (51) (52) dar, so kann das System (51) in der Form

$$d\,\Psi_{2+h} = \Phi_{1h}\,d\,\Psi_1 + \Phi_{2h}\,d\,\Psi_2 \quad (h = 1 \ldots n-5)$$

geschrieben werden, und man erhält für das ursprüngliche System (33) eine Darstellung mit $n-3$ Termen, indem man in die Ψ statt der y wieder die Variabeln x einführt und f_i statt Ψ_i schreibt.

Im Falle $\varkappa = 3$ erhält man durch diese Methode alle überhaupt möglichen Darstellungen (45). Denn ist (45) eine solche reducirte Form, so stellen die Relationen (49) eine Congruenz-μ_2 dar; da aber nach Nr. 13 jede Congruenz-μ_2 durch die Gerade g geht, so muss man auch haben:

$$\sum{}^i A_i f_k \cdot \xi_i' = 0, \ \sum{}^i A_i f_k \cdot \xi_i'' = 0 \quad (k = 1, 2),$$

mithin genügen f_1 und f_2 dem vollständigen System $X'f = 0$, $X''f = 0$. Aus der Gleichberechtigung der $n-3$ Funktionen f_i folgt sonach, dass alle diese Funktionen von $y_1 \ldots y_{n-2}$ allein abhängen, dass also die Gleichungen $f_i = \text{const.}$ eine Schaar von ∞^{n-3} Integralcurven des Pfaff'schen Systems (51) definiren.

Für $\varkappa = 2$ aber existirt noch eine zweite Kategorie reducirter Formen mit $n - 3$ Termen, entsprechend der Thatsache, dass es in diesem Fall noch eine zweite Art von Congruenz-μ_2 gibt, diejenigen nämlich, die ohne die Gerade g zu enthalten auf der singulären Ebene $u_\xi = 0$ der Congruenz gelegen sind. Man erkennt nämlich leicht, dass die 6-reihige Determinante (43) in diesem Fall identisch verschwindet (vgl. die vorige Nr.).

27. Bei der Aufstellung der Bedingungen dafür, dass das Pfaff'sche System (33) sich unter der Annahme $2\sigma = 4$ auf eine reducirte Form mit $n - 3$ Differentialelementen bringen lasse, können wir wiederum den Fall $\varkappa = 1$ von vorneherein ausscheiden; denn unter dieser Voraussetzung gibt es unendlich viele Darstellungen

$$df_3 = F_1\, df_1 + F_2\, df_2;\; df_4 = 0, \ldots df_{n-3} = 0,$$

die durch Integration simultaner Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden[1]).

Ist $\varkappa \geqq 2$, so existirt nach den Artikeln 8—11 und 14—18 entweder überhaupt keine μ_2, die sämtlichen Complexen der Congruenz (36) genügt, oder es findet einer der 3 folgenden Fälle statt:

a) Es gibt eine und nur eine Congruenz-μ_2, die durch 2 Gleichungen der Form

$$\sum_1^5 \mu_i \xi_i = 0,\; \sum_1^5 \mu_i' \xi_i = 0 \tag{54}$$

repräsentirt wird, worin die μ, μ' gewisse leicht zu bildende rationale Funktionen der a_{ikl} bedeuten.

b) Die Congruenz (36) besitzt eine „ausgezeichnete Ebene“:

$$u_1 \xi_1 + \ldots + u_5 \xi_5 = 0, \tag{55}$$

worin die u rationale Funktionen der a_{ikl} bedeuten, und es gibt einfach unendlich viele Congruenz-μ_2, die alle in dieser Ebene liegen und ein Büschel mit der Axe g bilden.

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 217 ff.

c) Die Complexe der Schaar (36) haben den singulären Punkt P gemein, und die (für $\varkappa \leqq 4$ stets vorhandenen) Congruenz-μ_2 gehen alle durch P.

Für jeden dieser 3 Fälle existiren nach den citirten Artikeln mehrere Alternativen, deren jede durch ein System rationaler Bedingungsgleichungen zwischen den a_{ikl} charakterisirt ist. Damit für das vorgelegte Pfaff'sche System eine reducirte Form mit $n - 3$ Termen existire, ist notwendig, dass einer dieser 3 Fälle realisirt sei. Dazu treten die sogleich aufzustellenden Integrabilitätsbedingungen.

28. Im Falle a) ist eine Darstellung (45) dann und nur dann möglich, wenn das Pfaff'sche System (33) zusammen mit den Gleichungen $\mu_{dx} = 0$, $\mu'_{dx} = 0$ ein $n - 3$-gliedriges unbeschränkt integrables System bildet.

Unter der Annahme b) ist, wie man durch die Schlussweise der Nr. 25 erkennt, eine reducirte Form (45) dann und nur dann herstellbar, wenn das Pfaff'sche System

$$(56) \qquad \begin{cases} d\,x_{5+h} = \sum_1^5{}^i\, a_{ih}\, d\,x_i \quad (h = 1\,..\,n-5) \\ u_1\, d\,x_1 + \,..\, + u_5\, d\,x_5 = 0 \end{cases}$$

auf die Form

$$(57) \qquad d\,f_{1+h} = F_h\, d\,f_1 \quad (h = 1, 2, \,..\, n-4)$$

gebracht werden kann. Nun enthält die ausgezeichnete Ebene (55) dreifach unendlich viele Congruenzgerade, die einen speziellen R_3-Complex bilden, und diese Thatsache findet darin ihren analytischen Ausdruck, dass die $n - 5$ alternirenden Bilinearformen in 4 Variabelnpaaren, die aus den Formen

$$(58) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k\, a_{ikh}\, \xi_i\, \eta_k \quad (h = 1\,..\,n-5)$$

entstehen, indem man ξ_5, η_5 mittels der Relationen

$$(59) \qquad u_\xi = 0, \; u_\eta = 0$$

eliminirt, einer unter ihnen proportional sind. Löst man also das $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System (56) in der Form

(60) $$d\,x_{4+h} = \sum_1^4{}^i\, b_{ih}\, d\,x_i \quad (h = 1\,.\,.\,n-4)$$

auf, und bildet wie in Nr. 25 die Bilinearformen

(61) $$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k\, b_{ikl}\, \xi_i'\, \eta_k' \quad (l = 1\,.\,.\,n-4),$$

so ist die Anzahl der linear unabhängigen unter ihnen gleich zwei oder gleich eins, letzteres offenbar dann und nur dann, wenn in der Matrix (43) der Nr. 25 alle vierreihigen Hauptunterdeterminanten identisch null sind. In dem letzteren Falle lässt sich das Pfaff'sche System (60) immer — und zwar auf unendlich viele Arten — in die Form (57)[1]), also das System (33) auf die Gestalt (45) bringen. Im ersteren Fall können wir, um die Ideen zu fixiren, annehmen, dass die Bilinearform $\sum\sum a_{ik1}\, \xi_i\, \eta_k$ nicht vermöge (59) verschwindet, und infolge dessen werden dann die beiden ersten Bilinearformen (61) linear unabhängig. Damit dann das $n-4$-gliedrige System (60) eine Darstellung (57) zulasse, haben wir zunächst auszudrücken[2]), dass die 4-reihige Determinante

$$\| \lambda\, b_{ik1} + \mu\, b_{ik2} \| \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

oder, was dasselbe besagt, die 6-reihige alternirende Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & . & \lambda\, a_{151} + \mu\, u_{15} & u_1 \\ \lambda\, a_{211} + \mu\, u_{12} & . & \lambda\, a_{251} + \mu\, u_{25} & u_2 \\ . & . & . & . \\ \lambda\, a_{511} + \mu\, u_{51} & . & 0 & u_5 \\ u_1 & . & u_5 & 0 \end{vmatrix}$$

für beliebige Werte $x_1\,.\,.\,x_n$, λ, μ identisch null sei. Diese letztere Determinante ist das Quadrat einer binären quadratischen Form in λ, μ, die offenbar für $\mu = 0$ verschwindet, da sich ja jede der Bilinearformen (58) vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf die linke Seite einer speziellen Complexgleichung des R_3

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 213 f.
[2]) Diese Berichte 1900, pag. 285.

reducirt. Wir erhalten sonach nur zwei unabhängige neue Bedingungen, von denen die eine das identische Verschwinden der Determinante (43) ausdrückt.

Sind diese Bedingungen erfüllt, und deuten wir $\xi_1' \ldots \xi_4'$ als homogene Punktcoordinaten im R_3, so sind alle R_3-Complexe der Schaar:

$$\sum_1^4{}^i \sum_1^4{}^k (\lambda\, b_{ik1} + \mu\, b_{ik2})\, \xi_i'\, \eta_k' = 0$$

speziell, und ihre Direktricen bilden ein Strahlenbüschel in einer Ebene:

$$v_1\, \xi_1' + \ldots + v_4\, \xi_4' = 0,$$

worin die v rationale Funktionen der a_{ikh}, u_{ik} bedeuten. Die Gleichungen $v_{\xi'} = 0$, $v_{\eta'} = 0$ sind die einzigen, vermöge derer alle Bilinearformen (61) verschwinden, und es erübrigt schliesslich noch auszudrücken, dass die Pfaff'schen Gleichungen (56) mit der Gleichung

$$v_1\, d x_1 + \ldots + v_4\, d x_4 = 0$$

zusammen ein $n - 3$-gliedriges unbeschränkt integrables System bilden. Sind auch diese Bedingungen erfüllt, dann und nur dann existirt für das vorgelegte $n - 5$-gliedrige Pfaff'sche System (33) e i n e und offenbar auch nur eine reducirte Form mit $n - 3$ Differentialelementen, welch' letztere man durch Integration des genannten unbeschränkt integrabeln Systems ermittelt.

29. Die Annahme c) der Nr. 27 erledigt sich durch die Bemerkung, dass in diesem Falle die linearen Gleichungen

$$(62) \qquad \sum_1^5{}^k a_{ikh}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, \ldots 5;\; h = 1 \ldots n - 5)$$

eine und nur eine Lösung ξ' besitzen, das Pfaff'sche System (33) also[1]) die infinitesimale Transformation:

$$(63) \qquad X' f \equiv \xi_1'\, A_1 f + \ldots + \xi_5'\, A_5 f$$

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 209.

gestattet. Sind $y_2, y_3, \dots y_n$ die Integrale der partiellen Differentialgleichung $X'f = 0$, so lässt sich das System auf die Gestalt:

$$(64) \qquad d\,y_{5+h} = \sum_2^5{}^i\, b_{ih}(y_2 \dots y_n)\, d\,y_i \quad (h = 1 \dots n-5)$$

bringen, die nur mehr die Variabeln y enthält. Aus der Thatsache, dass alle μ_2, die der Congruenz (36) angehören, den Punkt P mit den Coordinaten $\xi_1' \dots \xi_5'$ enthalten, schliesst man genau wie in Nr. 26, dass die Funktionen $f_1 \dots f_{n-3}$ einer jeden überhaupt möglichen reducirten Form mit $n-3$ Termen von den Variabeln $y_2 \dots y_n$ allein abhängen. Demnach kommt die Herstellung der allgemeinsten reducirten Form (45) darauf hinaus, das System (64), d. h. also ein $n-5$-gliedriges Pfaff'sches System in $n-1$ Variabeln auf eine Form mit $n-3$ Differentialelementen zu reduciren, ein Problem, das ich in meiner früheren Abhandlung[1]) vollständig erledigt habe. Die Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Reduction erscheinen dabei zunächst in der Form rationaler Relationen zwischen den Coefficienten b_{ik} und ihren Ableitungen; es ist aber leicht, diese Gleichungen in solche umzusetzen, die nur die a_{ik} und ihre Derivirten enthalten[2]).

30. Der Fall $\varrho = 3$, d. h. die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das vorgelegte $n-5$-gliedrige Pfaff'sche System auf eine Form mit $n-2$ Termen:

$$(65) \quad d\,f_{3+h} = F_{1h}\,d\,f_1 + F_{2h}\,d\,f_2 + F_{3h}\,d\,f_3 \quad (h = 1 \dots n-5)$$

gebracht werden kann, führt auf eine überaus grosse Zahl verschiedener Möglichkeiten. Wir begnügen uns daher, den Gang der Untersuchung zu skizziren; auch wollen wir nur solche

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 2-8 ff.

[2]) Am einfachsten mittels der Bemerkung, dass identisch:

$$b_{ih}(y_2\, y_3 \dots y_n) \equiv a_{ih}(x_1^0, y_2 \dots y_n),$$

wenn die y die Hauptintegrale der Gleichung $X'f = 0$ hinsichtlich x_1^0 bedeuten.

Fälle behandeln, in denen eine Reduction auf weniger als $n-2$ Differentialelemente nicht möglich ist.

Nehmen wir daher zunächst wieder die Zahl $2\sigma = 2$ an, so haben wir nur die Fälle $\varkappa = 3$ und $\varkappa = 4$ unter der Voraussetzung zu betrachten, dass die spezielle Congruenz

$$(66) \qquad \sum_1^5{}^i \sum_1^5{}^k \left(\sum_1^{n-5}{}^h a_{ikh}\,\lambda_h\right) \xi_i\,\eta_k$$

eine singuläre Ebene $u_\xi = 0$ besitzt. Unter dieser Annahme aber lässt sich das $n-4$-gliedrige Pfaff'sche System (56), dessen bilineare Covarianten sich auf eine einzige reduciren, immer auf eine Form mit $n-2$ Differentialelementen bringen [1]), und dasselbe gilt sonach auch für das gegebene System (33). Auch erhält man, wenn $\varkappa = 4$, solcherweise alle möglichen Darstellungen (65), da ja unter den gemachten Voraussetzungen alle Geraden der Congruenz (66) in der singulären Ebene $u_\xi = 0$ gelegen sind (Nr. 13 und 19). Im Falle $\varkappa = 3$ dagegen existirt noch eine zweite Kategorie von Darstellungen (65); denn die dreigliedrige Congruenz (66) setzt sich jetzt aus zweierlei Arten von Geraden zusammen: aus denjenigen, die in der singulären Ebene liegen, und aus denjenigen, die durch den gemeinsamen Schnittpunkt P der singulären Mannigfaltigkeiten unserer ∞^2 speziellen Complexe hindurchgehen. Hat P die Coordinaten ξ', so haben die Gleichungen (62) die Lösung ξ_i' gemein, und das vorgelegte Pfaff'sche System gestattet die infinitesimale Transformation $X'f$ der Nr. 29, kann also in ein $n-5$-gliedriges System mit $n-1$ Variabeln verwandelt werden; reducirt man das letztere irgendwie auf $n-2$ Terme [2]), so erhält man für das erstere die allgemeinste Darstellung (65) der zweiten Art.

31. Indem wir uns nunmehr der Betrachtung des Falles $\varrho = 3$, $2\sigma = 4$ zuwenden, fassen wir zunächst diejenigen Fälle $\varkappa \geqq 3$ ins Auge, in denen durch einen beliebigen Punkt des R_4 eine und nur eine Gerade der Congruenz (66) hindurchgeht

---

[1]) Leipziger Berichte 1898, pag. 213 f.

[2]) Vgl. die analoge Betrachtung der Nr. 26.

(Nr. 19, 20). In meiner früheren Abhandlung[1]) habe ich die Frage nach der Möglichkeit einer Darstellung (65) zurückgeführt auf die Untersuchung des Differentialsystems

$$(67)\qquad \frac{\partial x_{5+h}}{\partial u}=\sum_1^5{}^i a_{ih}\frac{\partial x_i}{\partial u};\quad \frac{\partial x_{5+h}}{\partial v}=\sum_1^5{}^i a_{ih}\frac{\partial x_i}{\partial v};$$

$$(68)\qquad \sum_1^5{}^i\sum_1^5{}^k a_{ikh}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}=0\quad (h=1\,..\,n-5).$$

Infolge der gemachten Annahmen reduciren sich die Gleichungen (68), wenn man darin $\frac{\partial x_1}{\partial v}\,..\,\frac{\partial x_5}{\partial v}$ als lineare homogene Variable betrachtet, auf nur drei Gleichungen, die linear unabhängig sind, solange die $\frac{\partial x_i}{\partial u}$ nicht gewisse Bedingungsgleichungen erfüllen (Nr. 20 und 21). Wir dürfen dann, um die Ideen zu fixiren annehmen, dass die Gleichungen (67) (68) nach den Grössen

$$\frac{\partial x_{5+h}}{\partial u},\ \frac{\partial x_{5+h}}{\partial v},\ \frac{\partial x_3}{\partial v},\ \frac{\partial x_4}{\partial v},\ \frac{\partial x_5}{\partial v}$$

aufgelöst seien; und dieses System ist offenbar passiv[2]), da ja die beiden Ausdrücke für $\frac{\partial^2 x_{5+h}}{\partial u\,\partial v}$, die sich durch Derivation der Gleichungen (67) ergeben, wegen der Form des Differentialsystems (67) (68) identisch ausfallen.

Wie in Nr. 14 meiner früheren Arbeit[3]) schliessen wir jetzt, dass durch eine beliebige Integralcurve

$$x_i=\psi_i(u)\quad (i=1,\,..\,n)$$

des vorgelegten Pfaff'schen Systems (33) eine und nur eine zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit

$$x_i=\psi_i(u,v)\quad (i=1,\,..\,n)$$

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 276 ff.

[2]) a. a. O., pag. 278 ff.

[3]) a. a. O., pag. 288.

des Systems hindurchgeht. Wählt man also eine Schaar von ∞^{n-2} Integralcurven beliebig, und ermittelt die bezw. durch sie hindurchgehenden 2-fach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten, so kann der Inbegriff der letzteren nach Elimination der Parameter u, v durch Gleichungen der Gestalt

$$f_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = c_i \quad (i = 1 \ldots n - 2)$$

definirt werden, womit eine Darstellung (65) des vorgelegten Pfaff'schen Systems gefunden ist. Mithin haben wir den Satz:

Gestattet ein $n - 5$-gliedriges Pfaff'sches System in n Variabeln eine infinitesimale Transformation der Schaar (63), (d. h. haben die Complexe (66) den singulären Punkt gemein), oder ist $\varkappa = 4$ und der Fall b) der Nr. 20 realisirt, oder ist $\varkappa = 3$, so lässt sich das vorgelegte System stets auf unbegrenzt viele Arten in einer Form mit nur $n - 2$ Differentialelementen schreiben.

Dasselbe gilt a fortiori für $\varkappa = 2$ oder 1; in diesen Fällen gibt es durch jede Integralcurve ∞^{∞} zweifach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeiten.

Wenn das gegebene System eine infinitesimale Transformation der Form (63) zulässt, so erhält man die allgemeinste Darstellung (65) am einfachsten durch die Methode, die am Schluss der Nr. 30 angegeben wurde. In den beiden übrigen der oben genannten Fälle erfordert die Herstellung der reducirten Form die Integration des Differentialsystems (67) (68), ein Problem, das mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit einer Unbekannten und zwei Independenten zahlreiche Analogien aufweist[1]).

32. In allen denjenigen Fällen $\varkappa \geqq 4$, die keiner der soeben behandelten Kategorien angehören, und in denen die Congruenz (66) aus dreifach unendlich vielen Geraden besteht, existirt nach Nr. 22 im Raum R_5 immer eine „ausgezeichnete" Ebene $u_\xi = 0$, auf der die ∞^3 Congruenzgeraden liegen und

[1]) Die letztere Theorie ist in der ersteren als Spezialfall enthalten; vgl. diese Berichte 1900, pag. 290, Zeile 3—8.

einen allgemeinen oder speziellen R_3-Complex bilden; die u sind rationale Funktionen der a_{ikh}. Die Ermittelung der allgemeinsten reducirten Form mit $n - 2$ Termen kommt jetzt darauf hinaus, das in Nr. 28 angegebene $n - 4$-gliedrige Pfaff'sche System (56) auf die Gestalt

$$d f_{2+h} = \Phi_{1h}\, d f_1 + \Phi_{2h}\, d f_2 \quad (h = 1 \,..\, n - 4)$$

zu bringen, und diese Darstellung ist nach Nr. 14 meiner früheren Arbeit[1]) immer möglich, da sich die Bilinearformen (66) vermöge $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$ auf eine einzige reduciren, und das Pfaff'sche System (56) sonach eine oder zwei linear unabhängige bilineare Covarianten besitzt, je nachdem der Rang der Matrix (43) gleich 2 oder grösser als 2 ist. Mithin können wir die Resultate dieser und der vorigen Nr. dahin resumiren, dass eine reducirte Form mit $n - 2$ Termen immer dann (und zwar auf unendlich viele Arten) hergestellt werden kann, wenn die Congruenz (66) aus dreifach unendlich vielen Geraden besteht.

33. In allen bisher nicht genannten Fällen, für die $\varkappa \geqq 4$ ist, kann die Congruenz (66) nach Nr. 22 aus höchstens zweifach unendlich vielen Geraden bestehen. Nehmen wir also an, dass die Congruenz (66) mehr als dreigliedrig sei und ∞^2 Geraden enthalte, so werden die letzteren durch ein oder mehrere Gleichungstripel der Form:

$$\sum_1^5{}^k \mu_{ik}\, \xi_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

definirt sein, worin die μ_{ik} Funktionen von $x_1 \,..\, x_n$ bedeuten, die ausserdem noch von zwei willkürlichen Parametern τ_1, τ_2 rational abhängen. Jedes dieser Tripel liefert, wenn man es zu dem vorgelegten Pfaff'schen System (33) hinzufügt, je ein $n - 2$-gliedriges Pfaff'sches System, und die so erhaltenen Systeme wollen wir bezw. mit S, S', S''.. bezeichnen. Existirt nun für das vorgelegte System (33) eine reducirte Form mit

---

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 288 f.

$n-2$ Termen, und sind $df_1, .. df_{n-2}$ die darin auftretenden Differentialelemente, so lassen sich die Grössen τ_1, τ_2 als Funktionen der x derart bestimmen, dass eines der Pfaff'schen Systeme $S, S', ..$, wenn man $\tau_1 \tau_2$ durch ihre Ausdrücke ersetzt, unbeschränkt integrabel wird und die Funktionen $f_1, .. f_{n-2}$ zu Integralen hat. Um also die allgemeinste reducirte Form mit $n-2$ Termen zu finden, haben wir τ_1 und τ_2 in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass eines der Systeme $S^{(i)}$ unbeschränkt integrabel wird.

Zu diesem Zwecke fassen wir eines dieser Systeme, etwa S, ins Auge, betrachten es als $n-2$-gliedriges Pfaff'sches System in $n+2$ unabhängigen Variabeln:

$$x_1, x_2, .. x_n, \tau_1, \tau_2, \tag{69}$$

und untersuchen, ob es sich auf eine Form mit n Differentialelementen

$$df_i(x_1 .. x_n, \tau_1, \tau_2) \tag{70}$$

reduciren lässt, derart, dass unter den Relationen $f_i = c_i$ wenigstens zwei existiren, die nach τ_1 und τ_2 auflösbar sind. Da der Unterschied zwischen der Anzahl der Variabeln und der Anzahl der Gleichungen des Systems S gleich vier ist, so lässt sich dies Problem nach den Methoden behandeln, die ich in meiner früheren Arbeit[1]) entwickelt habe. Man hat darnach die Gleichungen S etwa nach $dx_3, dx_4 .. dx_n$ aufzulösen und die zugehörigen alternirenden Bilinearformen in den 4 Variabelnpaaren:

$$dx_1, \delta x_1; \; dx_2, \delta x_2; \; d\tau_1, \delta\tau_1; \; d\tau_2, \delta\tau_2$$

aufzustellen; diese Formen reduciren sich offenbar auf höchstens drei linear unabhängige. Sodann hat man das allgemeinste Relationenpaar

$$d\tau_1 = u_{11}\, dx_1 + u_{12}\, dx_2,$$
$$d\tau_2 = u_{21}\, dx_1 + u_{22}\, dx_2,$$

[1]) Diese Berichte 1900, pag. 288—298.

zu suchen, welches mit dem congruenten, in δx, $\delta \tau$ geschriebenen zusammen die genannten Bilinearformen anullirt, und im Verein mit S ein n-gliedriges unbeschränkt integrables System in den $n+2$ Variabeln (69) darstellt. Nach den citirten Untersuchungen ergeben sich dabei verschiedene Fälle, in denen die genannte Reduction von S möglich ist; jeder einzelne dieser Fälle ist durch je ein System von Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen a_{iks}, μ_{ik} und ihren partiellen Ableitungen nach den x und τ charakterisirt. Wir wollen diese verschiedenen Relationensysteme mit Σ_1, $\Sigma_2, \ldots$ bezeichnen.

Ist eines der Systeme Σ_i identisch, also für beliebige Werte der $n+2$ Variabeln (69) erfüllt, dann und nur dann erhält man für S, also auch für das vorgelegte $n-5$-gliedrige Pfaff'sche System (33) eine reducirte Form mit n Termen (70). Wenn man also τ_1 und τ_2 aus zweien der Gleichungen $f_i =$ const. als Funktionen von $x_1 \ldots x_n$ berechnet und in die genannte reducirte Form substituirt, so ergibt sich eine Darstellung mit $n-2$ Differentialelementen.

Ist keines der Systeme Σ_i identisch befriedigt, so ist die Reduction von S nicht möglich; man erkennt aber leicht, dass jedes Paar von Funktionen $\tau_1\, \tau_2$ der Variabeln x, welches in S eingesetzt dies System unbeschränkt integrabel macht, wenigstens eines der Gleichungssysteme Σ_i erfüllen muss.

Lassen sich also aus jedem der Systeme Σ_i durch Elimination der Variabeln τ_1, τ_2 Relationen in den x allein ableiten, so kann man mittels des gerade betrachteten Systems S überhaupt zu keiner reducirten Form des Pfaff'schen Systems (33) gelangen.

Reducirt sich eines der Systeme Σ_i auf zwei unabhängige Gleichungen, die τ_1 und τ_2 als Funktionen der x zu bestimmen gestatten, so ist noch zu untersuchen, ob diese Funktionen das System S unbeschränkt integrabel machen, und man erhält dann für die Gleichungen (33) eine ganz bestimmte Darstellung mit $n-2$ Termen.

Besteht endlich eines der Systeme $\sum_i$ aus nur einer Relation, die nach einer der Grössen τ_1, τ_2 auflösbar ist, etwa in der Form:

$$\tau_2 = \varphi(\tau_1, x_1 \ldots x_n),$$

so verwandelt sich S, wenn man τ_2 durch φ ersetzt, in ein n — 2-gliedriges Pfaff'sches System $\bar{S}$ mit $n + 1$ Variabeln, welches jetzt in analoger Weise zu behandeln ist wie vorhin S.

Man hat zunächst zu untersuchen[1]), ob sich $\bar{S}$ auf eine Form mit $n - 1$ Termen

$$d\varphi_i(\tau_1, x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1 \ldots n - 1)$$

bringen lässt, derart, dass wenigstens eine der Gleichungen $\varphi_i =$ const. nach τ_1 auflösbar ist, und erhält wieder gewisse Systeme von Bedingungsgleichungen $\bar{\sum}_1$, $\bar{\sum}_2, \ldots$, deren jedes, falls es identisch erfüllt ist, einen der Fälle charakterisirt, in denen die genannte Reduction möglich ist.

Gibt es für $\bar{S}$ eine solche reducirte Form, so findet man ganz ähnlich wie oben durch Elimination von τ_1 mittels einer der Gleichungen $\varphi_i =$ const. für das vorgelegte n — 5-gliedrige System eine Darstellung mit $n - 2$ Termen. Eine solche erhält man auch, wenn eines der Systeme $\bar{\sum}_i$ sich auf eine einzige Gleichung der Form

$$\tau_1 = \psi(x_1 \ldots x_n)$$

reducirt, und wenn die so definirte Funktion τ_1 das System $\bar{S}$ unbeschränkt integrabel macht. Ist keine dieser beiden Voraussetzungen erfüllt, so liefert $\bar{S}$ überhaupt keine reducirte Form des gegebenen Pfaff'schen Systems.

Führt man die vorstehende Rechnung für jedes der Systeme $S, S', \ldots$ durch, so gelangt man in allen Fällen entweder zu der Gesamtheit der überhaupt möglichen reducirten Formen, oder zu dem Nachweis der Unmöglichkeit einer solchen Darstellung.

---

[1]) Diese Berichte 1900, p. 283—285.

Der Fall, dass die Congruenz (66) nur aus einfach unendlich vielen Geraden oder aus einer endlichen Zahl von Geraden besteht, ist durch die Entwickelungen dieser Nr. miterledigt.

34. Als wichtigstes Ergebnis der vorliegenden Untersuchung wollen wir zum Schluss noch constatiren:

Die Reduction eines Pfaff'schen Systems, für das die Zahl der Variabeln um fünf grösser ist als die Zahl der Gleichungen, lässt sich immer auf die Reduction solcher Pfaff'scher Systeme zurückführen, für die der genannte Unterschied kleiner als fünf ist, mit einziger Ausnahme zweier in Nr. 31 behandelter Fälle.

Berichtigung. Zu dem Schlusssatz der Nr. 25 ist ergänzend nachzutragen, dass in dem ersten der beiden genannten Fälle die Determinante (43) stets identisch verschwindet, die Reduction auf $n-3$ Terme also immer möglich ist.

In meiner früheren Arbeit (diese Berichte Bd. 30 (1900), p. 300, Zeile 1 v. o. ist zu lesen: „in n Variabeln" statt „in m Variabeln".

Periodische Seespiegelschwankungen (Seiches), beobachtet am Starnberger See.[1]

Von H. Ebert.

(Eingelaufen 10. Dezember.)

Am Genfer See wurde bekanntlich zuerst eine Erscheinung beobachtet, deren allgemeinere Bedeutung für die Binnenseen überhaupt man erst allmählich erkannte. Man fand, dass sich am Rhoneausfluss bei Genf der Wasserspiegel rhytmisch in regelmässigen Perioden hebt und senkt und zwar um Beträge, die daselbst gelegentlich mehr als Meterhöhe erreichen können. Diese auch für den Wasserabfluss aus dem See, der in Genf grosse Turbinenwerke speist, wichtige Erscheinung nennt man nach einer Lokalbezeichnung „Seiches", ein Name, der für analoge Phänomene an anderen Seen allgemein angenommen wurde.

Eine einfache Vermehrung oder Verminderung der gesammten Wassermasse in Folge periodisch gesteigerten oder geschwächten Wasserzuflusses konnte diese Seiches nicht erzeugen; denn ihre Periode beträgt am Genfer See 73 Minuten und es war von vornherein unwahrscheinlich, dass innerhalb so kurzer Zeitintervalle sich die Wasserführung der Speisewässer um so erhebliche Beträge ändern sollte; vor allem wäre die vollständig regelmässige Wiederkehr des Anwachsens und

[1] Die vorliegende Untersuchung wurde ermöglicht durch eine von dem Präsidium der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften gewährte Geldunterstützung aus den Renten der Münchener Bürger-Stiftung für das Jahr 1900.

Sinkens des Seespiegels nach je 73 Minuten vollständig unverständlich geblieben. F. A. Forel, der sich zuerst eingehender mit dem Seichesproblem beschäftigte, fand vielmehr, dass die gesammte Wassermasse des Sees bei fast unveränderter Gesammtmenge regelmässige Pendelschwingungen ausführt, derart, dass diese Wassermasse periodisch bald gegen das westliche, Genfer Seeende andrängt und dort den Wasserspiegel hebt, bald gegen das Ostende, also gegen den Rhoneeinfluss zurückflutet, und zwar innerhalb 73 Minuten dasselbe Spiel fast das ganze Jahr unausgesetzt wiederholend; denn feinere Beobachtungsinstrumente liessen bald erkennen, dass das Seichesphänomen beinahe niemals erlischt, sondern zu jeder Tages- und Jahreszeit vorhanden ist, wenn so grosse Seespiegelschwankungen, wie die oben genannten, auch nur ausnahmsweise zu Stande kommen. Um näher in die feineren Einzelheiten dieser überraschenden Erscheinung einzudringen, construirte Forel einen selbstregistrirenden Pegel, sein „Limnimeter", welches von Plantamour und namentlich von Ed. Sarasin verbessert wurde. Letzterer richtete das Instrument so ein, dass es verhältnismässig leicht transportabel wurde und der Reihe nach an verschiedenen Punkten des Seeufers aufgestellt werden konnte („Limnimètre enregistreur transportable"). Als er seinen Apparat in La Tour de Peilz bei Vevey in der Nähe des Ostendes des Sees schreiben liess, während gleichzeitig der Apparat von Plantamour in Sécheron bei Genf, also am Westende, der von Forel in Morges nahe der Mitte des langgestreckten Seebeckens arbeitete, wurde durch den Vergleich der mit genauen Zeitmarken versehenen Registrir-Curven unzweifelhaft festgestellt, was Forel bereits früher wahrscheinlich gemacht hatte, dass man in den Seiches eine stehende Pendelschwingung vor sich habe. Wenn der Seespiegel bei Vevey sich hob, senkte er sich in der gleichen Zeit bei Genf und umgekehrt. Dagegen blieben die Amplituden der Seespiegelschwankung bei Morges fast die ganze Zeit über nahezu gleich Null. Hier in der Nähe ging also eine sog. „Knotenlinie" quer über den See. Solche Schwingungen mit

einem Knoten in der Mitte, sog. Schwingungsbäuchen an den Enden, nennt man „uninodale" Schwingungen. Sie entsprechen vollkommen den Schwingungszuständen bei den stehenden Seilwellen oder den Schwingungen in der Mitte festgeklemmter Stäbe, oder den durch einen Steg zur Bildung eines Knotens gezwungenen Saitenschwingungen in der Akustik. Ausser dieser uninodalen Grund- und Hauptschwingung wurde noch eine Oberschwingung von der kürzeren Periode von 35 Minuten entdeckt, die sich der ersteren überlagert. Diese veranlasste ein gleichzeitiges Ansteigen der Wassermassen an den beiden Enden des Sees, ein Herabgehen des Spiegels nahe der Mitte in der einen Phase der stehenden Schwingung, dagegen ein Sinken an den Enden, ein Anschwellen der Wassermasse in der Mitte der Längserstreckung des Sees in der entgegengesetzten Phase der Schwingung. Hier müssen sich zu beiden Seiten der Mitte zwei Zonen finden, in denen der Seespiegel relativ ruhig ist. Es ist dies daher eine zweiknotige, „binodale" Schwingung.

Wie man sieht stehen die Schwingungszeiten beider Systeme nicht in einem einfachen harmonischen Verhältnisse zu einander. Zu Zeiten, in denen beide Schwingungen deutlich ausgeprägt sind, tritt nun ein eigentümliches Ineinandergreifen der von ihnen an einem Orte erzeugten periodischen Bewegungen ein, wie wir es bei der Durchkreuzung zweier Wellensysteme zu studiren Gelegenheit haben. Man nennt diese Erscheinung in der Wellenlehre Interferenz; bei den Seichesschwingungen hat Forel für diesen Fall des Ineinandergreifens von Grund- und Oberschwingung die Bezeichnung: dikrote Schwingungsform eingeführt.

Durch die Arbeiten der genannten Forscher sind die Schwingungsverhältnisse am Genfer See im Laufe der Jahre vollkommen klar gestellt worden. Doch muss es bezüglich der Erklärung des Seichesphänomens im höchsten Grade erwünscht erscheinen, vorerst auch andere Seen genau auf diese Erscheinung hin zu studiren. Denn von der früher wohl gelegentlich geäusserten Vermutung, dass diese periodischen See-

spiegelschwankungen der Binnenseen durch dieselben allgemeinen kosmischen Kräfte der Mond- und Sonnenanziehung veranlasst würden, wie die Gezeiten der oceanischen Wasseransammlungen, kam man bald zurück. Auch das Heranziehen von Erdbeben, sei es lokaler, sei es entfernter, und in ihren Wirkungen sich weit verbreitender seismischer Störungen als Ursache der Seiches musste als aussichtslos fallen gelassen werden. Vielmehr hat man im Laufe der Zeit immer mehr die Ueberzeugung gewonnen, dass es meteorologische Faktoren sind, Windverhältnisse, ungleiche Luftdruckverteilung, welche die hier in Rede stehenden Pendelschwingungen anregen. Sind dieselben einmal geweckt, so vollziehen sie sich nach Gesetzen, welche durch die Grösse, Gestalt und das Tiefenrelief des betreffenden Seebeckens ein für alle Mal eindeutig bestimmt sind. Die limnimetrische Forschung hat daher für jeden See auch nach dieser Richtung hin eine individuelle Bedeutung und erst wenn viele in ihrer Ausgestaltung, Lage, geographischen Beziehung zur Umgebung möglichst verschiedene Binnenseen genau auf Seiches hin untersucht sind, lassen sich allgemeinere Gesichtspunkte erwarten. Darum unternahm es schon Ed. Sarasin selbst mit seinem transportablen Limnimeter die Seespiegelstellungen auch anderer Schweizer Seen genau zu registrieren. Züricher und Neuchateler See lieferten wenig klare Schwingungsbilder; unregelmässige Gestaltung des Untergrundes liess hier offenbar regelmässige Pendelschwingungen der Wassermasse von grösserer Dauer nicht zu Stande kommen. Dagegen zeigten sich in dem östlichen Teile des Vierwaldstätter Sees ausserordentlich regelmässig verlaufende Seiches, die in dem bei Fluelen stationirten Instrumente klare und regelmässige Aufzeichnungen ergaben. Auch der Bodensee zeigt das Phänomen. Ausserhalb des Schweizergebietes sind Seichesforschungen in Oesterreich, England und Amerika im Gange.[1])

---

[1]) Bezüglich der Litteratur verweise ich auf das umfassende Handbuch der Geophysik von S. Günther, 2. Aufl., II. Bd., 1899. Sechste Abteilung, Kapitel IV, § 7, p. 456 ff. Die Entwickelung der Seiches-

Auffallend zurück stand in dieser Beziehung seither noch Deutschland; ausser am Bodensee hat meines Wissens noch an keinem der deutschen Binnenseen die eigentliche Seichesforschung eingesetzt. Wenn auch der Wasserstand der Seen, — wie hier in Bayern durch das hydrotechnische Bureau als einer Abteilung der Obersten Baubehörde im kgl. Staatsministerium des Innern, — einer unausgesetzten Controle unterworfen, und von dieser Behörde in dankenswertester Weise schätzbarstes Material an regelmässigen Pegelablesungen, an einigen Orten sogar mit Hilfe selbstregistrierender Pegelapparate, geliefert wird, so haben diese Bestimmungen doch ihrer ganzen Natur nach einen anderen Zweck vor Augen; es soll in erster Linie der absolute Seespiegelstand unter Anschluss an genau mit dem Netze der Landesvermessung in Beziehung gesetzte Fixpunkte in der Umgebung für jeden Tag festgesetzt und die Wasserführung im Allgemeinen unter Controle gehalten werden. Die Seichesmessungen dagegen haben zunächst nur Relativbestimmungen des Spiegelstandes zum Ziele, sollen dagegen vor allem den schnellen, sich innerhalb weniger Minuten vollziehenden kleinen Seespiegelschwankungen möglichst bis in alle Einzelheiten hinein folgen. Angesichts des herrlichen Seenmateriales, welches die Natur gerade unserem Bayernlande zur Verfügung gestellt hat, musste es daher im höchsten Grade erwünscht erscheinen, diese Messungen auch hier in Angriff zu nehmen und zwar womöglich mit Hilfsmitteln, welche den bei den Schweizer Seen angewendeten in jeder Hinsicht entsprechend sind, damit die erhaltenen Resultate möglichst direkt mit denen der Schweizer Seenforschung vergleichbar werden. Es ist daher als überaus dankenswert zu begrüssen, dass das Hohe Präsidium der kgl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München bereitwilligst

---

forschung findet man in Forels Monographie „Le lac Léman". Bd. II, p. 39—213, Lausanne 1895. Ueber die auf schweizerischem Gebiete gemachten Fortschritte giebt der dem internationalen Congress für Paris 1890 von den Herren F. A. Forel und Ed. Sarasin erstattete Bericht eine treffliche Uebersicht.

die Mittel zur Anschaffung zweier Limnimètre enregistreur transportable, System Sarasin, zur Verfügung stellte, und ich möchte nicht verfehlen auch öffentlich meinen ergebensten Dank für diese Förderung auszusprechen.

Die Apparate wurden bei der Société génèvoise pour la construction d'instruments de physique bestellt. Herr Ed. Sarasin hatte sich in liebenswürdigster Weise bereit erklärt die Anfertigung und Justierung der Instrumente selbst zu überwachen und alle seine bei seiner langjährigen Thätigkeit auf diesem Gebiete gesammelten reichen Erfahrungen den neuen beiden Apparaten zu Gute kommen zu lassen. Auch ihm möchte ich für seine rastlosen Bemühungen und zahlreichen Ratschläge und Winke bei dieser Untersuchung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Hervorzuheben ist noch der Umstand, dass zu gleicher Zeit ein gleicher Apparat auch von der italienischen Regierung bestellt wurde und von Italien aus mit diesem die Erforschung der südalpinen Seen in Angriff genommen werden wird; es ist klar, dass gleichzeitige Untersuchungen der süd- und nordalpinen Seen mit Instrumenten, die an Empfindlichkeit, Construction, Handhabung u. s. w. einander vollkommen gleichen und direkt vergleichbare Angaben liefern, interessante Aufschlüsse über den etwaigen Einfluss weitgreifender meteorologischer Faktoren, wie z. B. Föhnbewegungen u. dergl., auf die Seicheserregungen in Aussicht stellen. Ein Zusammengehen mit dem italienischen Forscher auf diesem Gebiete ist in Aussicht genommen.

Einer der Apparate traf im Juli dieses Jahres hier ein und wurde zunächst einer weitgehenden Prüfung unterworfen, die ihn nach einigen kleinen Abänderungen als ausserordentlich zuverlässiges Instrument erwies.

Eine ausführliche Beschreibung des Instrumentes unterlasse ich an dieser Stelle und verweise auf die kurzen Angaben, die Herr Sarasin über sein älteres Modell macht.[1]) Ich möchte

---

[1]) Ed. Sarasin, Arch. des scienc. phys. et nat. (3). 2. Nr. 12. Dec. 1879.

bezüglich unseres Apparates nur noch folgendes bemerken: Der aus Zinkblech gefertigte, als Schwimmer dienende Hohlkörper hat 26 cm Durchmesser und 14 cm Höhe, also 7,4 Liter Deplacement bei völligem Eintauchen, einem Auftriebe von 7,4 kg entsprechend. Beim Heben und Senken des Wasserspiegels wird er also mit grosser Sicherheit mitgenommen. Der Schwimmer ist unten an einer Stahlstange befestigt, welche oben durch eine Führung hindurchgeht. Seitlich an derselben ist ein nach oben gehendes Kupferband befestigt, welches über eine mit Rand versehene Messingscheibe geht und am anderen Ende durch ein Bleigewicht gespannt ist. Beim Auf- und Abgehen des Schwimmers wird dadurch die Messingscheibe mitgenommen und die Vertikalbewegung des Seespiegels in eine Drehbewegung umgesetzt. Diese wird durch eine mit zwei Universalgelenken versehene Stange in das Innere des eigentlichen Registrierapparates übertragen. Die Stange dreht eine mit Zähnen versehene Scheibe, in welche eine darüber liegende und durch eine zweite Messingscheibe horizontal getragene Zahnstange eingreift, die den in einer Hülse vertikal beweglichen Schreibstift führt. Wenn der Seespiegel auf und niederschwankt, wird der Stift um gleiche Beträge horizontal hin und her geführt. Dabei gleitet er quer über einen Papierstreifen ohne Ende von 25 cm Breite, der von einem Walzenpaare, das von einem sehr kräftigen Genfer Federuhrwerke betrieben wird, seiner Länge nach unter dem Stifte durchgezogen wird. Der Stift schreibt in dieser Weise Curven auf, deren Ordinaten die Seespiegelschwankungen selbst sind. Gleichzeitig zeichnet ein zweiter an einem ruhenden Arm in einer vertikalen Hülse leicht auf und ab beweglicher Schreibstift eine der Längskante des Papierstreifens parallel verlaufende gerade Linie, welche zur Markierung des mittleren Pegelstandes dient. Durch das Uhrwerk wird der Arm nach jeder Stunde ein wenig abgelenkt; auf der Geraden entsteht dadurch eine Zeitmarke. Diese Zeitmarkierungen gestatten den zu jedem Spiegelstand gehörigen Moment zu bestimmen; jedesmal beim Aufziehen des Werkes, was nur alle zwei Tage zu geschehen

braucht, wird ausserdem zur Controle die Zeit an die gerade unter den Schreibstiften befindlichen Stellen des Papierstreifens geschrieben.

Da die Streifenbreite nur 25 cm beträgt, der Seespiegel im Laufe der Jahreszeiten im allgemeinen aber um grössere Beträge sinkt oder steigt, so muss von Zeit zu Zeit das Instrument wieder neu eingestellt werden. Dies geschieht dadurch, dass man die Verbindung der den Schwimmer unten tragenden Stahlstange mit der Führung derselben löst und die Stange weiter durch die Führung, an der das Kupferband befestigt ist, nach unten durchschiebt oder nach oben emporzieht und dann Stange und Führung wieder mit einander in einer solchen gegenseitigen Stellung verschraubt, dass der Schreibstift etwa in der Mitte des Papierstreifens spielt. —

Als erstes Objekt für die bayerischen Seiches-Untersuchungen wurde der Starnberger See in's Auge gefasst. Er empfiehlt sich in erster Linie durch seine einfache Gestalt. Als langgestreckte schmale Rinne von 19,6 km Länge und 4,7 km maximaler Breite, erstreckt er sich mit seiner Längsachse ziemlich genau von Süden nach Norden mit einer schwachen Krümmung, deren concave Seite nach Osten gekehrt ist. Seine Tiefenverhältnisse sind von Dr. Alois Geistbeck[1]) genauer festgestellt worden. Bei mittlerem Stande liegt der Seespiegel 586 m über dem Meere; er bedeckt ein Areal von 55,9 Quadratkilometer. Seine Maximaltiefe wurde von Geistbeck zu 114 m bestimmt, die mittlere Tiefe des Gesamtbeckens zu 52 m berechnet. Der See fasst 2 912 000 000 Cubikmeter Wasser und sein Tiefenrelief hat einen mittleren Böschungswinkel von 3,5 Grad, nach der von Herrn Professor Finsterwalder eingeführten präcisen Bestimmung dieses für die Oroplastik so wichtigen Begriffes.[2]) Wenn die Geistbeck'schen

[1]) Alois Geistbeck, Die Seen der Deutschen Alpen. Herausgegeben von dem Verein für Erdkunde zu Leipzig. 1885.

[2]) S. Finsterwalder, Ueber den mittleren Böschungswinkel und das wahre Areal einer topographischen Fläche. (Sitzungsber. Münchener Akademie. Math.-phys. Cl. 20. 1. p. 35, 1890). Die Zahlen stammen aus Penck, Morphologie der Erdoberfläche, Bd. 2. p. 323. Stuttgart 1894.

Messungsergebnisse nach den neuesten Forschungen des verdienten Limnologen Prof. W. Ule in Halle auch im Einzelnen vielfach der Verbesserung bedürfen, so stellen sie doch das allgemeine Tiefenrelief des Sees für unsere Zwecke genau genug dar, so dass wir uns an seine Zahlen halten können, bis die Ule'schen genaueren Werte in extenso publiciert sein werden. Danach besteht der Starnberger See aus einer schmaleren und tieferen Nordrinne, in deren Mitte Tiefen bis zu 114 m gelotet werden und einem breiteren und flacheren Südbecken. Dort, wo auch schon an der äusseren Umrandung des Seespiegels selbst am Westufer eine Art Abgrenzung bemerkbar wird, in der Verlängerung des zwischen Unter-Zaismering und Bernried am sog. Karpfenwinkel hervortretenden Ufervorsprungs, läuft eine sanft ansteigende Bodenschnelle quer unter dem See nach dem östlichen Ufer hinüber. Dieselbe trennt das Seebecken in zwei Teile, deren Längen sich ungefähr wie 1 zu 2 verhalten, so dass das längere nördliche Becken etwa $^2/_3$ von der Gesamtlänge des ganzen Sees umfasst.

Die Längsachse des Sees liegt angenähert parallel der Streichrichtung der die nördliche Kalkalpenkette an dieser Stelle durchbrechenden Querthäler, der Senke des Kesselbergjoches zwischen Walchen- und Kochelsee einerseits, des von Partenkirchen-Garmisch über Murnau herabkommenden Loisachthales andererseits. Es konnte von vornherein keinem Zweifel unterliegen, dass, wenn der Starnberger See überhaupt das Seichesphänomen zeigt, derselbe längs seiner nord-südlichen Hauptachse zu Pendelschwingungen von einigermassen nachweisbarer Amplitude erregt werden würde.

Forel weist auf eine Formel hin, die schon 1828 von R. Merian[1]) für die Periodendauer der stehenden Pendelschwingungen abgeleitet wurde, welche Wassermassen in flachen Gefässen von bestimmten einfachen Profilen vollführen, wenn sie längs eines Schnittes durch diese Gefässe in Bewegung ge-

---

[1]) R. Merian, Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Basel 1828.

setzt werden. Bedeutet l die Länge der Spiegellinie des Profiles, h seine mittlere Tiefe, so ist die Dauer einer einfachen Schwingung

$$t = \frac{l}{\sqrt{g\,h}}$$

wo g die Beschleunigung durch die Erdschwere (9,81 m/sec^2) bedeutet. Eine ganze aus Hin- und Hergang bestehende Schwingung, wie wir sie hier in Deutschland im Gegensatz zur französischen Zählung bei oscillatorischen Vorgängen zu zählen pflegen, wird also in der Zeit

$$T = \frac{2\,l}{\sqrt{g\,h}}$$

ausgeführt.

Geistbeck hat auf Tafel VII des zu seinem Werke gehörigen Atlas das Längenprofil des Starnberger Sees im Massstab 1 : 50 000 für die Horizontalerstreckungen, 1 : 10 000 für die Tiefen construiert. Hieraus liess sich die zu erwartende Periode für die Längsschwingung des Sees, die zugleich seine Haupt- und Grundschwingung sein musste, auf Grund der Merian'schen Formel berechnen, wenn man die mittlere Profiltiefe h nach dem Geistbeck'schen Diagramm ermittelte. Dazu wurde in folgender Weise verfahren:

Das Profil wurde auf einen starken Carton abgezeichnet, aber mit Verzehnfachung aller Tiefenwerte, und das so vergrösserte Längsprofil des Sees ausgeschnitten. Aus demselben Carton wurde ein Rechteck von 200 cm^2 Fläche geschnitten und darauf beide Flächenstücke gewogen. Als Gewichte ergaben sich 7,395 bezw. 4,925 gr, so dass die Profilfläche 300,2 cm^2 umfasste, was mit Rücksicht auf den Massstab der Zeichnung einen Mittelwert für die Profiltiefe von 75,7 m ergiebt.

Wie man bemerkt ist dieser Wert nicht unerheblich grösser, als die mittlere Seetiefe. Dies ist nicht zu verwundern; denn unser Wert giebt an, wie breit ein Flächenstreifen sein muss, welcher bei einer Länge gleich der Seelänge von

19,6 km dieselbe Fläche wie das Längenprofil des Sees hat; der oben angegebene Mittelwert von 52 m dagegen stellt die Tiefe dar, welche ein überall gleich tiefes Becken von der Grösse des Sees haben müsste, das dieselbe Wassermasse wie dieser selbst fasst; namentlich die breiten und flachen Partieen des Südendes verkleinern diesen Tiefenwert gegenüber dem von uns bestimmten mittleren Tiefenwert der Längsrinne.

In unsere Formel haben wir die Tiefe des Schnittes einzuführen, längs dessen die zu untersuchende Schwingung stattfindet. Aus dem gefundenen Wert für h ergiebt sich T zu rund 24 Minuten.

Wie wir später sehen werden, stimmt der so berechnete Wert so genau mit dem wirklich für diese Schwingung gefundenen Wert (25 Minuten) überein, als man nur erwarten kann. Denn einmal ist es ja von vorn herein gar nicht sicher, ob der von Geistbeck gezeichnete Schnitt wirklich genau mit der Fläche zusammenfällt, längs deren sich die Wasserteilchen bei der longitudinalen Grundschwingung bewegen; ferner aber hängt, wie nicht anders zu erwarten, die Periodendauer von der Gesamtwasserführung des Sees ab, so dass bei anderer Pegelstellung etwas andere Schwingungsdauern resultieren. Genaue Uebereinstimmung kann endlich bei der Angenähertheit des ganzen Verfahrens überhaupt nicht erwartet werden.

Daher liefern die erhaltenen Zahlen immerhin eine schöne Bestätigung der Forel'schen Theorie des Seichesphänomens, welche sich auf die Merian'sche Formel stützt.

Bei der Auswahl des Punktes, an welchem das Limnimeter zunächst aufgestellt werden sollte, war der Gesichtspunkt leitend, dass es sich ja vor der Hand in erster Linie darum handelte, den Nachweis zu führen, ob ein so kleines Seebecken, wie das in Rede stehende, überhaupt im Stande sei, Seiches von merklichem Betrage zu zeigen. Aus diesem Grunde musste dem Nordende für die Aufstellung der Vorzug gegeben werden. Denn wenn die Wassermassen im See von Norden nach Süden und umgekehrt hin- und herschwanken, so musste sich die

Flut in dem engeren, tiefem Starnberger Nordende höher zusammen stauen, als in dem breiteren und flacheren Seeshaupter Südende. In Starnberg selbst oder in der unmittelbaren Nachbarschaft den Apparat zu montieren, empfahl sich nicht, weil er hier erheblichen Störungen durch Badende, Rudernde und vor allem durch den starken Dampfschiffverkehr ausgesetzt gewesen wäre. Ihn am Nordende selbst, am Ausfluss der Würm oder bei Percha aufzustellen, schien gleichfalls nicht günstig, da der See hier in eine sehr seichte, von Schilf dicht bewachsene Untiefe ausläuft und es nicht unwahrscheinlich ist, dass die periodischen Bewegungen des Tiefenwassers sehr stark gedämpft werden, wenn sie auf solches Flachterrain auslaufen. Am geeignetsten erschien ein Platz am Nordostufer unterhalb des Dorfes Kempfenhausen, dort, wo das steilere Höhenufer wieder dicht an den See herantritt und schon in geringer Entfernung vom Ufer beträchtliche Tiefen sich finden.

Auch legen hier die Dampfer nicht an, sondern sie fahren weit vom Ufer entfernt direkt von Starnberg nach Berg hinüber, so dass die durch sie verursachten Wasserbewegungen, wie direkte Vorversuche zeigten, nur wenig merklich sind.

Hier steht ein neugebautes, sehr solid fundiertes Badehaus, dessen Eigentümer, Herr Lehrer Hartlmaier in Wangen bei Starnberg in freundlichster Weise gestattete, dass das Limnimeter an der Aussen-Gallerie seines Badehauses montiert werde. Ein 56 m langer Steg führt vom Ufer zu dieser Gallerie hinaus; am Orte, wo der Apparat befestigt wurde, fand sich im Juli über 2 m Wassertiefe. Noch war es nötig den Schwimmer vor den gewöhnlichen Wellen der Wasseroberfläche so zu schützen, dass er gleichwohl den Bewegungen der gesammten Wassermassen leicht und schnell folgen konnte. Wir haben zu dem Zwecke eine oben offene grosse Holzkiste zur unteren Hälfte im Wasser so unterhalb des Schwimmers befestigt, dass selbst hohe Wellen nicht von oben her in das Innere, das immer einen ruhigen Spiegel zeigte, hineinschlagen konnten; in den Boden der Kiste war eine Anzahl 2 cm weiter Löcher gebohrt, durch die das Innere mit dem See communicierte. Dadurch

war der in das Wasser tauchende Apparat zugleich gegen das Anfahren von Booten genügend geschützt.

Herr Ingenieur und Bezirkstechniker für das kgl. Bezirksamt München II, Franz H. Haertinger, hatte die Güte, den von mir gewählten Aufstellungspunkt einzunivellieren und an die Höhencoten der Landesvermessung anzuschliessen. Gleichzeitig wurde an dem Badehaus selbst ein Punkt genau markiert, der gegen einen, durch einen grossen, am Ufer eingegrabenen Stein versicherten Höhenpunkt einnivelliert wurde. Hierdurch war es möglich, jederzeit zu kontrollieren, ob nicht etwa eine Senkung des Aufstellungsterrains stattgefunden hatte und zweitens war ein direktes Beziehen der Limnimeterangaben zu den Würmseepegelablesungen dadurch ermöglicht, dass der genannte Punkt gegen den Nullpunkt dieses Pegels einnivelliert wurde.

Der Apparat bedurfte namentlich im Anfange einer regelmässigen Ueberwachung und da das Uhrwerk alle zwei Tage aufgezogen werden musste, so war ausser der natürlich öfter wiederholten, von München aus unternommenen Kontrole, die Inanspruchnahme anderweitiger freundlicher Unterstützung notwendig. Der genannten Mühewaltung haben sich Herr und Frau Kaufmann Hartlmaier aus München, sowie Herr stud. Seitz aus München unterzogen; ich möchte allen Genannten für ihre Mühe auch öffentlich hierdurch meinen besten Dank aussprechen, sowie vor allem Herrn Lehrer Hartlmaier auch dafür, dass er den Apparat noch über die ursprünglich in Aussicht genommene Zeit auf seinem Besitze beherbergt und uns die Fortsetzung der Messungen an dem genannten Orte, der sich als überaus günstig erwiesen hat, in zuvorkommendster Weise gestattet hat. Endlich gebührt auch dem kgl. Bezirksamte München II, sowie den Behörden, Bürgermeistereien wie Gendarmerien Dank, welche das Instrument unter ihren Schutz nahmen.

Der Apparat ist seit dem 7. Juli am genannten Orte in Thätigkeit, allerdings nicht ununterbrochen, da eine grössere Reparatur und einige kleine Abänderungen eine Pause zwischen

19. Juli und 1. August nötig machten. Vom 7.—19. Juli arbeitete er mit langsamem Streifengang ($1^h = 2$ cm), da vorerst festgestellt werden sollte, ob das Seichesphänomen überhaupt vorhanden ist.

Schon als der Apparat zu schreiben begann, zeichnete der Schreibstift unzweifelhafte Seicheskurven, reine Sinusschwingungen von ca. 25 Minuten Periodendauer und mehreren Centimetern Amplitude auf, d. h. am Nordende des Starnberger Sees hebt sich die gesammte Wassermasse während $12^1/_2$ Minuten um einige Centimeter über die mittlere Höhe, um in den darauffolgenden $12^1/_2$ Minuten um ebenso viel wieder zu sinken. Diese periodische Bewegung stellt sich ebenso gut in der Nacht wie am Tage und zu jeder Stunde ein, sie kann daher nicht etwa von den Dampferbewegungen, wechselndem Zu- oder Abfluss oder sonstigen Störungen herrühren. Selbstverständlich verbindet sich diese pendelnde Bewegung, die einer Atembewegung des Sees gleicht, mit dem Steigen des Wassers bei Regengüssen, ebenso wie mit dem Sinken bei anhaltender Trockenheit, dem sie sich überlagert.

Nachdem der Beweis erbracht war, dass auch im Starnberger See das Seichesphänomen heimisch ist und sich mit dem verwendeten Hilfsmittel trefflich studieren lässt, wurde vom 1. August an zu rascher Streifenbewegung übergegangen ($1^h = 6$ cm, 1 mm = 1 Minute), wodurch die Zacken, welche der Apparat schrieb, länger ausgezogen wurden, so dass zahlreiche interessante Einzelheiten im zeitlichen Verlaufe der Erscheinung zu Tage traten.

Im Folgenden soll nur das Beobachtungsmaterial diskutiert werden, welches in den ersten beiden Monaten (7. Juli bis 10. September) am Apparate erhalten wurde. So kurz diese Zeitspanne auch ist, so lassen sich doch schon die wesentlichsten Züge des Phänomens, wie es unserem See eigentümlich ist, unzweifelkaft erkennen. Späteren Arbeiten soll die Diskussion längerer Beobachtungsreihen überlassen bleiben, welche wichtige Ergänzungen und neue Einzelheiten in Aussicht stellen. —

Beim Durchsehen der erhaltenen Registrierkurven ergiebt

sich als erstes Resultat, dass der Zustand regelmässiger pendelnder Bewegung für die Gesamtwassermasse des Starnberger Sees die Regel bildet; der Zustand vollkommener Ruhe hat in der genannten Zeit nur während weniger Stunden angehalten, und auch hier kann man fragen, ob das Fehlen jeglicher Bewegung in der erhaltenen Kurve wirklich einem absoluten Fehlen der Seichesbewegung zuzuschreiben ist, oder nicht vielmehr einer gewissen vorübergehenden Trägheit des Schwimmers, die ihn verhinderte, den feinsten Bewegungen der Wassermasse nachzugehen. Die überaus zahlreichen periodischen Bewegungen, die bald nur eben angedeutet sind, bald Seespiegelschwankungen bis zu 8 cm Niveaudifferenz anzeigen, lassen nun unzweifelhaft erkennen:

I) eine Haupt- oder Grundschwingung der Wassermassen. Die Periode derselben stimmt genau genug mit der oben nach der Merian-Forel'schen Formel S. 445 zu 24 Minuten berechneten überein, dass es keinem Zweifel unterliegen kann, dass wir hier die longitudinale Hauptschwingung vor uns haben, an der die Gewässer des Sees als Ganzes Teil nehmen, und welche dem Längsschnitt des Beckens entlang von Norden nach Süden hin und umgekehrt erfolgt. Da es die uninodale Schwingung in dem Seite 437 angegebenen Sinne ist, so wird der Seespiegel durch dieselbe am Starnberger Ende gehoben in demselben Augenblicke, wo er sich am Seeshaupter Ende senkt; nach halber Schwingungsdauer findet das Umgekehrte statt; die Wassermassen fluten vom Nordende zurück und stauen sich nach Süden immer höher und höher an. Dazwischen liegt, etwa in der Mitte des Sees, vielleicht zwischen Tutzing und Ammerland eine Zone, wo sich der Seespiegel unter dem Einflusse dieser Schwingung weder hebt noch senkt, die „Knotenlinie" der Schwingung. Daraus dürfen wir freilich nicht schliessen, dass sich hier die Wassermassen selbst etwa in Ruhe befinden; im Gegenteil: der Transport so gewaltiger Wassermassen, wie sie einem Steigen des Sees an einem Ende um mehrere Centimeter entsprechen und die Umlagerung dieser Massen in der Zeit von wenigen Minuten,

muss sehr starke Strömungen, und da nach der Theorie die gesamte Wassermasse bis zum Boden hin in diese Pendelung hineingezogen wird, vor allem starke Unterströmungen in dem im Vergleich zu seiner Länge schmalen Seebecken hervorrufen. Höchst wahrscheinlich hängt hiermit die seit langem bekannte und gefürchtete Erscheinung des sog. „Rinnens" unseres Sees zusammen, das heftige Strömen der Wassermassen und das Auftreten grosser Verschiedenheiten in der Strömungsgeschwindigkeit der übereinander liegenden Schichten selbst bei ganz ruhigem Wetter, das so heftig werden kann, dass den Fischern die Netze fortgerissen werden. Aus Zu- und Abfluss am Seebecken lässt sich diese Erscheinung keineswegs erklären, sie dürfte durch das Studium der Seiches so vollkommen aufgeklärt werden können, dass man die Periode dieser Miniaturgezeiten des Sees für die einzelnen Monate wird voraus berechnen können.

Um die Periodendauer der Hauptschwingung möglichst genau zu bestimmen, wurde aus den häufig auf den Streifen notierten Zeitmarken (S. 442) zunächst der wahre Streifengang ermittelt. Er ergab sich bei der kleinen Uebersetzung zu

1 Millimeter = 3,042 Zeitminuten,

bei der grossen und dem rascheren Streifengange zu

1 Millimeter = 1,019 Zeitminuten.

Wurde dann die Gesamtlänge einer bestimmten Anzahl von Wellenbergen in dem Diagramm gemessen, so ergab sich durch Division durch die Anzahl der einzelnen Spiegelschwankungen ein Mittelwert für die Periodendauer. Aus den Aufzeichnungen wurden verschiedenen Zeiten entsprechend Gruppen einer grösseren oder kleineren Anzahl deutlich ausgeprägter aufeinander folgender Hauptschwingungen herausgegriffen und in dieser Weise zur Ableitung einer mittleren Schwingungsdauer für das benutzte Zeitintervall verwendet. In der folgenden Tabelle ist das so erhaltene Zahlenmaterial zusammengestellt. In derselben bedeuten die Zahlen der letzten Colonne die für die

genannten Zeiten geltenden Mittelwerte der Differenzen aus höchstem und tiefstem Spiegelstande. Sie geben also ein ungefähres Mass der Amplituden der Pendelschwingungen, wenn dieselben auch im allgemeinen für ein solches Zeitintervall, welches durch besonders gut ausgeprägte Schwingungen ausgezeichnet ist, durchaus nicht für jede Schwingung gleich gross sind. (Die mitgeteilten Werte stellen also das Doppelte von dem dar, was der Physiker als Amplitude in den mathematischen Ausdruck für die Schwingung einführen würde.) Die Horizontalstriche begrenzen die Beobachtungen einer, auf je einem Streifen enthaltenen Beobachtungsreihe.

Periodendauer der Hauptschwingung.

Tag	Dauer T in Minuten	Zahl der gemessenen Schwingungen	Mittlere Seespiegelschwankung
7. Juli	24,79	10	18 mm
8.	25,00	9	10
9.	24,82	18	12
10.	24,79	15	10
10.	25,04	10	10
11.—12.	24,91	44	10
13.	24,61	6	7
14.	24,79	12	6
17.	24,94	37	11
19.	24,97	12	5
2. August	25,06	11	20
3.	24,84	10	14
5.	25,24	4	22
6.	24,96	8	—
8.—9.	25,37	10	—
9.—10.	25,00	50	—
10.—11.	25,38	8	—
13.	25,04	5	14
13.—14.	25,11	43	—
14.—16.	25,15	109	10
18.—19.	24,76	20	6
19.	24,96	14	10
20.—21.	25,04	37	22

Pendelschwingung zu thun haben, wird die Seelänge gerade von einer halben Wellenlänge ausgefüllt. Die Länge der studierten Welle beträgt also ca. 39 km.

Diese Grundschwingung fehlt fast nie. Oft ist sie in ununterbrochenem Zuge mehrere Tage lang herrschend. So reihen sich die ihr entsprechenden Maxima und Minima der Spiegelhöhe vom 14. August Abends 7 Uhr an bis zum 16. August Nachmittags 4 Uhr, also während beinahe 48 Stunden ohne Unterbrechung aneinander, über 100 einzelne Perioden voll zum Ausdruck bringend! Selbst wenn der Seespiegel ganz ruhig liegt und die Limnimetercurve fast eine gerade Linie darstellt, ist die Hauptperiode durch kleine Zacken angedeutet. Wenn sie allein und ungestört ausgebildet ist (vergl. weiter unten), so ist der Curvenverlauf ein rein sinoidaler, d. h. es tritt nicht etwa ein langsames Ansteigen und dann schnelleres Fallen oder umgekehrt ein, sondern die Schwingung ist rein harmonisch, wie man sich in der Akustik ausdrücken würde, die entsprechende Seichescurve vollkommen symmetrisch nach beiden Seiten hin. —

Ausser dieser langsamen Grundschwingung tritt aber sehr häufig noch

II) eine Oberschwingung von kürzerer Periode auf, welche als eine Teil- oder Partialschwingung aufgefasst werden muss. Die Amplitude dieser Schwingung ist meist kleiner als die der Hauptschwingung. Oft ist sie ganz allein ausgebildet und dann beherrscht sie augenscheinlich das ganze Seebecken. Auch hier handelt es sich nicht um ein gelegentliches Auftreten einzelner Zacken; ist diese Schwingungsform einmal zur Herrschaft gelangt, so kann sie viele Stunden lang ununterbrochen andauern; so wurde sie am 23. August von früh 6 Uhr bis abends 10 Uhr, also während 16 Stunden ununterbrochen vom Schwimmerstift registriert. Die genauere Periodendauer ersieht man aus der beifolgenden Tabelle:

Periodendauer der Oberschwingung.

Tag	Dauer in Minuten	Zahl der gemessenen Schwingungen	Mittlere Seespiegelschwankung
12. Juli	15,73	30	3 mm
8. August	15,42	15	—
14.	15,87	60	—
20.	15,90	10	3
20.	15,97	6	3
21.	15,93	8	4
23. August	15,83	49	20
3. September	15,91	21	24
9.	15,60	20	8

Eine Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude ist auch bei dieser Schwingung nicht vorhanden. Eine Zunahme der Schwingungsdauer mit der Zeit ist nicht bemerklich. Als Mittelwert aus den 219 Einzelmessungen, welche zur Ableitung der Periodendauer verwendet wurden, ergiebt sich

$$T_1 = 15{,}78 \text{ Minuten oder } 15 \text{ Minuten } 47 \text{ Sekunden.}$$

Die Dauer ist also wesentlich kürzer, die Schwingung selbst daher höher in der Sprache der Tonlehre als die Grundschwingung, und zwar verhalten sich die Schwingungszahlen wie 1,00 zu 1,58. Das musikalisch harmonische Verhältnis von Grundton zu Quinte (C : G) weist ein Schwingungszahlenverhältnis von 2 : 3 oder 1,00 : 1,50, das des Grundtones zur Sext (C : A) von 3 : 5 oder 1,00 : 1,67 auf. Unsere Oberschwingung liegt also zwischen den Intervallen der Quinte und Sext und würde etwa dem musikalischen schon weniger einfachen Intervall C : Gis oder C : As der übermässigen Quinte oder kleinen Sext entsprechen. Wir sehen, dass **Grundschwingung und erste Oberschwingung des Starnberger Sees nicht in einem einfachen, musikalisch reinen Intervallenverhältnisse zu einander stehen,**

die Oberschwingung ist etwas höher als die Quinte, etwas niedriger als die Sext.

Wir können nicht daran zweifeln, dass wir die binodale Schwingung S. 437 des Sees vor uns haben. Dementsprechend würde sich der Seespiegel gleichzeitig am Nord- und am Südende heben, in der Mitte senken und umgekehrt, wenn diese Oberschwingung den See beherrscht. Dazwischen würden wir zwei Knotenlinien haben. Der Schwingungsdauer von 947 Secunden entspricht eine reducierte Pendellänge von 223 km und eine Wellenlänge von 25 km; 12,4 km würde der Abstand der beiden Knotenlinien von einander betragen und wir können daher dieselben einerseits etwa zwischen Possenhofen und Leoni, andererseits zwischen der nach Osten vorspringenden Halbinsel südlich von Bernried und Schallenkamm auf der gegenüberliegenden Uferhöhe annehmen. Wir dürften nicht irren, wenn wir annehmen, dass die S. 443 erwähnte unter dem Seespiegel bei Unter-Zaismering querüber laufende Bodenschwelle, welche das Seebecken gewissermassen in zwei ungleich lange Rinnen unterteilt, die Ursache für die erwähnte Schwingungsunterteilung des ganzen Sees bilde. Der See wird dadurch wie eine schwingende Saite durch einen Steg unterteilt und wir hätten in der Oberschwingung von der Periode $T_1 = 15{,}8$, welches ungefähr gleich $^2/_3\ T$ [$T = 25{,}0$; $^2/_3\ T = 16{,}7$ Minuten], demnach die Eigenschwingung des durch den unterseeischen Rücken abgegrenzten nördlichen Beckens vor uns. —

Im Allgemeinen sind nun immer beide Schwingungen gleichzeitig ausgebildet und dadurch entsteht mitunter ein ziemlich verwickeltes Curvenbild. Dasselbe wird indessen leicht entziffert, wenn man die Perioden der beiden zusammentretenden Schwingungssysteme bereits kennt und auf sie die Gesetze der physikalischen Interferenz periodischer Bewegungen in Anwendung bringt. Dabei ergiebt sich zunächst Folgendes: Auch bei den überaus langsamen Schwingungen, denen Wellenlängen von vielen Kilometern entsprechen, gilt das in der Physik der Erklärung der Interferenzerscheinungen zu Grunde gelegte Princip der Coexistenz der Schwingungsbe-

wegungen: Bei dem Zusammentreten behalten die Einzelschwingungen ihre Perioden bei; die resultierende Seespiegelschwankung ist einfach gleich der Summe der von jeder einzelnen Schwingung herbeigeführten Spiegelverlegung. Gewöhnlich ist zunächst die Grundschwingung ausgebildet; das Hinzutreten der Oberschwingung stört dann die Dauer der Grundschwingung nicht. Aber freilich werden nun je nach der Phasendifferenz in der Ausbildung, mit der die beiden harmonischen Schwingungen zusammentreffen und je nach dem Amplitudenverhältnisse beider die mannichfachsten Abänderungen der Hauptcurve resultieren. Sind die Amplituden der Oberschwingung gegenüber denjenigen der Hauptschwingung klein, so bemerkt man das Auftreten der ersteren zunächst nur an beginnenden Asymmetrien der Hauptcurve; die Maxima folgen sich nicht mehr äquidistant, in regelmässiger Folge zeigen sie sich in ihrer Höhe vermindert und an anderen Stellen entsprechend überhöht. Wird die Oberschwingung kräftiger, so flacht sie die Maxima der Hauptcurve ab dort wo Maxima der ersten Curve mit Minimis der anderen zusammentreffen; dort wo Maxima auf Maxima treffen ist die resultierende Curvenhöhe die Summe beider Amplituden. Dazwischen erscheinen die Curvenzacken einseitig ausgebaucht, ähnlich wie im Profilbilde einer Bergkette, wenn einem Hauptgipfel ein Nebengipfel vorgelagert ist. Es sind dies die „dikroten“ Schwingungen Forels vgl. S. 437. Aber immer vermag man in der grossen Mannigfaltigkeit von Curvenbildern mit Hilfe des Interferenzprincipes die beiden einfachen Schwingungen, deren Betrachtung wir vorangestellt haben, wieder zuerkennen. Man kann das Verhältnis ihrer Schwingungsdauern natürlich auch aus dem Interferenzbilde, also aus Aufzeichnungen, bei denen sie beide beteiligt sind, ableiten. Da dieses Verhältnis aber, wie wir sahen, kein einfaches harmonisches ist, so ist dies nicht so leicht. Die Aufgabe ist streng nur durchführbar durch eine sog. harmonische Analyse, welche den periodischen Vorgang dann durch eine Fourier'sche Reihe, die nach Sinus und Cosinus der ganzzahligen Vielfachen eines bestimmten

Bogens fortschreitet, darstellen lässt. Diese Entwickelung liefert auch die Phasenverschiebung und das Amplitudenverhältnis der mit einander interferierenden periodischen Bewegungen und lässt durch die höheren Glieder derselben auch erkennen, ob eventuell noch höhere Oberschwingungen bei dem Processe beteiligt sind. Das mathematische Seminar der kgl. technischen Hochschule besitzt einen sog. mechanischen Analysator neuester Construction, der die angedeutete nicht ganz unerhebliche rechnerische Arbeit durch einen rein mechanischen Integrations-Process zu ersetzen gestattet. Mit demselben sollen demnächst Analysen besonders charakteristischer Curvenstücke vorgenommen werden. —

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen über meteorologische Einflüsse auf die Seicheserregungen: Um eventuelle Beziehungen zu plötzlichen Luftdruckänderungen genauer verfolgen zu können, wurde in dem Badehaus, auf dessen Aussengallerie das Limnimeter montiert war, ein selbstregistrierendes Aneroid-Barometer, das Herr Baron von und zu Aufses gütigst zur Verfügung stellte, in Betrieb gesetzt. Wenn dasselbe auch keine sehr grosse Empfindlichkeit hatte, so zeigte es doch z. B. die vor einem Gewitter eintretenden, so überaus charakteristischen, als sog. „Gewitternasen“ bekannten Luftdruckänderungen deutlich an.

Dadurch liess sich nun konstatieren, dass, wenn der See fast vollkommen ruhig war, plötzlich eintretende Luftdruckänderungen das Eintreten kräftiger Seichesbewegungen sehr häufig im Gefolge hatten. Ein ganz besonders charakteristischer derartiger Fall ereignete sich am 21. August. Am 21. und 22. zeigen die Wetterkarten ein engbegrenztes, lokales Luftdruckmaximum über der Münchener Gegend. Der Tag war schwül und klar. Plötzlich, gegen Abend zeigt das Registrierbarometer ein allmähliches Herabgehen, dann ein schnelleres Ansteigen des Druckes an, das von einigen kleinen Zacken gefolgt wird, verzeichnet also eine typische Gewitternase. Die Limnimeterkurve war noch am Nachmittag des 21. August sehr ruhig; die Hauptschwingung war schwach angedeutet. Plötzlich 10 Uhr

abends fängt der Seespiegel an um 24 mm zu sinken, ausserordentliche Spiegelschwankungen um das mittlere Niveau setzen ein, welche schon um $10^1/_2$ Uhr Amplituden von über 80 mm erreichen. In der Nacht entlud sich ein heftiges Gewitter. Die Seiches dauerten noch den nächsten ganzen Tag an und klangen erst am 23. aus. Während anfangs nur die Hauptschwingung vorhanden war, trat am 22. früh 3^h die Oberschwingung hinzu. Es folgte eine lange Reihe deutlich markierter Interferenzen, bis am 23. früh 6 Uhr die Oberschwingung die Oberhand gewann, die dann allein noch bis zum Abend dieses Tages den See beherrschte. —

Die Oberschwingung klingt schneller ab als die Grundschwingung. Die Dämpfungen, welche die Schwingungen erfahren, müssen mit den Reibungskräften, die sich den Pendelbewegungen entgegen stellen, auf's innigste zusammenhängen. Diese wieder sind bedingt ausser durch die Zähigkeit des sich bewegenden Mediums von dem Untergrunde, der Gestalt des Seebeckens und seiner Gesamtfläche. Bei einer grossen Reihe von Schwingungen, welche augenscheinlich einem einmaligen Bewegungsimpulse ihr Entstehen verdanken, ist auf den erhaltenen Curvenstreifen eine deutliche und sehr regelmässige Abnahme der aufeinanderfolgenden Amplituden zu erkennen, so dass sich hier ein Dämpfungsverhältnis und damit ein logarithmisches Decrement wie bei einer gedämpft schwingenden Magnetnadel für die Seichesschwingungen bestimmen liesse.

Hierdurch würde eine neue, vielleicht nicht unwichtige charakteristische Constante für eine in einem Seebecken angesammelte Wassermasse gewonnen. Indessen erachte ich es noch für verfrüht auf die Art und die Ursachen der Erregungen, welche die Seichesbewegungen im vorliegenden Falle auslösen, sowie die Gesetze, nach denen dieselben wieder abklingen und auf die Faktoren, welche ihre allmähliche Dämpfung bedingen, schon jetzt näher einzugehen.

Dagegen möchte ich als bereits festgestellte Ergebnisse dieser Untersuchung die folgenden bezeichnen:

1) Das Seichesphänomen ist am Starnberger See in unzweifelhafter Weise und in durchaus typischer Form ausgeprägt.

2) Die Schwingungen, welche die gesamte Wassermasse fast ununterbrochen ausführt, sind reine d. h. einem Sinusgesetze folgende, harmonische Pendelschwingungen und zwar stehende Schwingungen im Sinne der Forel'schen Theorie.

3) Vorhanden ist zunächst eine Haupt- oder Grundschwingung von rund 25 Minuten voller Periodendauer (Hin- und Hergang). Es ist die Längsschwingung des ganzen Sees; sie ist einknotig, uninodal und erzeugt immer entgegengesetzte Schwingungsphasen an den beiden Seeenden. Die Knotenlinie dürfte etwa bei Tutzing quer über den See laufen.

4) Die aus dem Längsprofil mit Zugrundelegung der Merian'schen Formel berechnete Schwingungsdauer (24 Minuten) stimmt so genau mit der wirklich gefundenen überein, dass die Forel'sche Theorie durch die vorstehende Untersuchung eine neue Bestätigung erhält.

5) Das „Rinnen" des Starnberger Sees, welches sich besonders durch eine auffallend starke Unterströmung in beiden Richtungen geltend macht, scheint mit dem grossen Deplacement erheblicher Wassermassen bei der Seichesbewegung im engsten Zusammenhange zu stehen.

6) Ausser der Grundschwingung ist noch eine Oberschwingung von etwas weniger als 2/3 Schwingungsdauer der Grundschwingung vorhanden; die genaue Periodendauer beträgt $15\,^3/_4$ Minuten. Das Intervall beider Schwingungen ist demnach kein einfaches harmonisches, sondern liegt zwischen Quinte und Sext.

7) Bei beiden Schwingungen ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Amplitude; das Gesetz des Isochronismus der Pendelschwingungen gilt also auch hier.

8) Beide Schwingungssysteme machen sich meist gleichzeitig geltend, freilich mit sehr wechselnden Amplitudenverhältnissen und den mannigfachsten Phasenverschiebungen. Es

entstehen „dikrote Schwingungen" der verschiedensten Art. Sie sind aber immer in ihre beiden Componenten auflösbar und zeigen dann, dass das Princip der Coexistenz elementarer Schwingungsbewegungen auch noch bei der Interferenz dieser 39 bezw. 25 km grossen Wellenlängen gilt.

9) Von meteorologischen Einflüssen, welche unmittelbar kräftige Seichesschwingungen erregen können, sind bisher besonders plötzlich eintretende Luftdruckänderungen (z. B. Gewitternasen) hervorgetreten.

Es wird sowohl in geophysikalischer, wie rein physikalischer, geographischer, geologischer, meteorologischer und vielleicht auch technischer Hinsicht von Wichtigkeit sein, die Seichesforschung an den bayerischen Seen weiter zu führen. Zunächst bietet sich am Starnberger See selbst noch eine Fülle weiterer Fragen. Vor allem wird die genauere Fixierung der Knotenlinien und damit die gesamte Configuration des ganzen Schwingungssystems festzustellen sein, wozu gleichzeitig mit zwei an verschiedenen Punkten des Sees registrierenden Limnimetern gearbeitet werden muss.

Ferner sind die Beziehungen der absoluten Spiegelstände selbst, also der wirklichen Wasserführung zu den Seiches näher zu studieren. Weiter wird ein Studium darüber, wie sich verschiedene meteorologische Erscheinungen in der Erregung der Wassermasse zu Pendelschwingungen wiederspiegeln, sehr fruchtbar sein. Dass es in hygienischer Hinsicht für das organische Leben im und am See von grösster Wichtigkeit ist, dass die gesamte Wassermasse nicht stagniert, sondern bis zum Grunde hin in fortwährender lebendiger Bewegung erhalten wird, ist ein neuer Gesichtspunkt, welcher die Seichesforschung von ganz anderer Seite her empfiehlt. Beobachtungen über die im See auftretenden, oft sehr heftigen Strömungen und Unterströmungen werden, wenn sie mit den regelmässig erfolgenden Aufzeichnungen des Limnimeters verglichen werden, über die

Mechanik dieser Bewegungen Neues und Interessantes lehren. Endlich kann es kaum einem Zweifel unterliegen, dass sich die Seichesbewegungen bis zu einem gewissen Grade in den Grundwasserständen der umliegenden Ortschaften, namentlich an den beiden Enden des Sees, sowie in den Abflussmengen der Würm wiederspiegeln werden. Sollte dies der Fall sein, so würde den Aufzeichnungen des Apparates auch ein unmittelbar praktisch-technisches Interesse beizumessen sein.

Ueber die Convergenz periodischer Kettenbrüche.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 1. Dezember.)

Allgemeine Kriterien zur Beurtheilung der Convergenz und Divergenz periodischer Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern sind zuerst von Herrn O. Stolz angegeben worden.[1]) Später hat Herr G. Landsberg[2]) den Fall, dass sämmtliche Theilzähler und Theilnenner reell und rational sind, mit Hülfe einer besonders einfachen und sinnreichen Methode behandelt, welche zugleich auch den Zusammenhang zwischen dem betreffenden Kettenbruche und einem anderen, durch geeignete Inversion der Periode daraus hervorgehenden unmittelbar erkennen lässt und auf diese Weise die Verallgemeinerung eines bekannten, von Galois[3]) zunächst nur für sog. regelmässige Kettenbrüche bewiesenen Satzes liefert. Da Herr Landsberg seinen Untersuchungen eine etwas andere und zwar, wie die Durchführung der Rechnung lehrt, weniger zweckmässige Kettenbruchform zu Grunde legt,[4]) als Herr Stolz, so erscheint die Vergleichung der beider-

---

[1]) Innsbrucker Ber. 17. Febr. 1886. Die Beweise der daselbst mitgetheilten Sätze findet man in den Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II (1886), p. 299 ff. Ein dort noch nicht angeführtes Divergenz-Kriterium giebt Stolz: Innsbr. Ber. 1887/88, p. 1. 2.

[2]) Journ. für Math. Bd. 109 (1892), p. 231—237. Vgl auch: E. Netto, ebendas. Bd. 110 (1892), p. 349.

[3]) Gergonne Annales, T. 19 (1828—1829), p. 294.

[4]) S. weiter unten p. 465, Fussnote 2).

seitigen Endresultate einigermaassen erschwert. Ueberträgt man aber die Landsberg'sche Methode, die überdies in einigen Einzelheiten eine noch etwas elementarere und durchsichtigere Darstellung gestattet, auf Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern in der von Herrn Stolz benützten Form, so kann man in der That mit den denkbar einfachsten Hülfsmitteln zu einer äusserst einfachen und übersichtlichen Formulirung der Stolz'schen Convergenz- und Divergenz-Kriterien gelangen. Zugleich ergiebt sich dann auch die oben erwähnte Verallgemeinerung des Galois'schen Satzes für Kettenbrüche mit ganz beliebigen Theilzählern und Theilnennern.

Die Durchführung dieses Gedankens bildet den Inhalt der folgenden Mittheilung.

---

§ 1. Nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Convergenz eines rein periodischen Kettenbruches.

Ich bezeichne den Kettenbruch:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

durch eins der Symbole:

$$\left(b_0 ; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{oder:} \quad \left[b_0 ; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n},$$

seinen auf Grund der bekannten Beziehungen:

$$(1) \begin{cases} A_0 = b_0 & B_0 = 1 \\ A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 2) \end{cases}$$

formal gebildeten ν^{ten} Näherungsbruch mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ oder K_ν und setze:

$$(2) \qquad \left(b_0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_\nu}{b_\nu}\right) = \frac{A_\nu}{B_\nu} \equiv K_\nu,$$

gleichgültig, ob der Kettenbruch als solcher einen bestimmten Sinn besitzt,[1]) sofern nur K_ν selbst eine bestimmte Zahl vorstellt, d. h. B_ν von Null verschieden ist.

Im Falle $b_0 = 0$ schreibe ich statt:

$$\left(0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \text{ bezw. } \left[0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}$$

kürzer:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \text{ bezw. } \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}.$$

Bedeuten dann a_ν, b_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) irgendwelche complexe Zahlen (mit Einschluss der reellen und für die b_ν auch der Null, während durchweg: $|a_\nu| > 0$), welche den Bedingungen genügen:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{\lambda p+\mu} = a_\mu \\ b_{\lambda p+\mu} = b_\mu \end{cases} \left(\begin{matrix} \lambda = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.} \\ \mu = 1, 2, \ldots p \end{matrix}\right),$$

so soll der unendliche Kettenbruch:

$$(4) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$$

als ein rein periodischer[2]) und zwar mit der p-gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$$

---

[1]) Vgl. Stolz, Allg. Arithm. II, p. 269.

[2]) Darnach gilt der Kettenbruch:

$$\left[b_n; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty,$$

anders geschrieben:

$$b_n + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

schon als unrein periodisch. Es ist dies diejenige Form, welche Herr Landsberg zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen gewählt hat.

bezeichnet werden, wobei noch angenommen wird, dass p die kleinste Zahl bedeutet, für welche die beiden Beziehungen (3) erfüllt sind.

Wenn nun der Kettenbruch (4) überhaupt convergirt, so muss sein Werth x der Relation genügen:

$$x = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p + x}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\,x}{B_p + B_{p-1}\,x}, \tag{5}$$

sodass also x eine bestimmte Wurzel der quadratischen Gleichung sein muss:

$$B_{p-1}\,x^2 + (B_p - A_{p-1})\,x - A_p = 0, \tag{I}$$

sofern nicht etwa gerade $B_{p-1} = 0$ ist. In diesem Specialfalle reducirt sich diese Gleichung auf eine lineare, und sie wird überdies gänzlich hinfällig, wenn auch noch $B_p - A_{p-1} = 0$ ist. Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall:

I. $|B_{p-1}| > 0$.

Die beiden Wurzeln x der Gleichung (I) werden dann durch den Ausdruck dargestellt:

$$x = \frac{1}{2\,B_{p-1}} \{A_{p-1} - B_p \pm \sqrt{D}\}, \tag{6}$$

wo D die Discriminante von (I) bedeutet, also:

$$\begin{aligned} D &= (A_{p-1} - B_p)^2 + 4\,A_p\,B_{p-1} \\ &= (A_{p-1} + B_p)^2 + 4\,(A_p\,B_{p-1} - A_{p-1}\,B_p) \end{aligned} \tag{7a}$$

oder auch:

$$D = S^2 - 4\,P, \tag{7b}$$

wenn man beachtet, dass:

$$A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = (-1)^{p-1} \cdot a_1\,a_2 \dots a_p = -\prod_{\nu=1}^{p}(-a_\nu) \tag{8}$$

und sodann die Abkürzungen einführt:

$$A_{p-1} + B_p \equiv S, \quad \prod_{\nu=1}^{p}(-a_\nu) \equiv P. \tag{9}$$

Um die Convergenz oder Divergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, d.h. schliesslich die Beziehung von $\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} K_\nu$ zu einer der beiden Zahlen x festzustellen, untersuchen wir allgemein einen Ausdruck von der Form $H - x$, wo:

$$(10) \qquad H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\,h}{B_p + B_{p-1}\,h},$$

also zunächst:

$$H - x = \frac{A_p - B_p\,x + (A_{p-1} - B_{p-1}\,x)\cdot h}{B_p + B_{p-1}\,h}.$$

Da aber aus Gl. (I) folgt:

$$(11) \qquad A_p - B_p\,x = -(A_{p-1} - B_{p-1}\,x)\cdot x,$$

so hat man:

$$(12) \qquad H - x = \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\,x}{B_p \quad + B_{p-1}\,h}\cdot(h - x).$$

Für die weitere Untersuchung ist nun zu unterscheiden, ob Gl. (I) zwei verschiedene Wurzeln besitzt oder nicht, d. h. ob $|D| > 0$ oder $D = 0$.

I[a]. $|D| > 0$.

Werden alsdann die beiden verschiedenen Wurzeln von Gl. (I) mit x_1, x_2 bezeichnet, so kann man dieselben nach Gl. (6) definiren durch die Beziehungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\,B_{p-1}\,x_1 = A_{p-1} - B_p + \varepsilon\cdot\sqrt{D} \\ 2\,B_{p-1}\,x_2 = A_{p-1} - B_p - \varepsilon\cdot\sqrt{D} \end{cases},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der betreffenden Quadratwurzel bedeutet und $\varepsilon = +1$ oder -1 in der Weise fixirt werden soll, dass der Kettenbruch, falls er überhaupt convergirt, gerade den Grenzwerth x_1 besitzt. Setzt man dann in Gl. (12) $x = x_1$ bezw. $x = x_2$, so folgt durch Division der resultirenden Gleichungen:

(14) $$\frac{H - x_1}{H - x_2} = M \cdot \frac{h - x_1}{h - x_2}$$

wo:

(15) $$M = \frac{A_{p-1} - B_{p-1} x_1}{A_{p-1} - B_{p-1} x_2} = \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}\ ^{1)}.$$

Man hat nun für $\nu > p$ in Folge der Periodicität der a_ν, b_ν:

(16) $$K_\nu = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p + K_{\nu-p}}\right),$$

d. h. es wird: $H = K_\nu$ für: $h = K_{\nu-p}$ und daher nach Gl. (14):

(17) $$\frac{K_\nu - x_1}{K_\nu - x_2} = M \cdot \frac{K_{\nu-p} - x_1}{K_{\nu-p} - x_2}.$$

Substituirt man hier der Reihe nach $\nu = p + \mu$, $2p + \mu$, $\dots \lambda p + \mu$ (wo μ eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, 2, \dots p$), so folgt durch Multiplication der resultirenden Beziehungen:

(18) $$\frac{K_{\lambda p+\mu} - x_1}{K_{\lambda p+\mu} - x_2} = M^\lambda \cdot \frac{K_\mu - x_1}{K_\mu - x_2} = M^\lambda \cdot \frac{A_\mu - B_\mu x_1}{A_\mu - B_\mu x_2}$$

d. h.

(19) $$K_{\lambda p+\mu} = \frac{x_1 (A_\mu - B_\mu x_2) - M^\lambda \cdot x_2 (A_\mu - B_\mu x_1)}{(A_\mu - B_\mu x_2) - M^\lambda \cdot (A_\mu - B_\mu x_1)}$$

$$= x_1 + M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A_\mu - B_\mu x_1}{(A_\mu - B_\mu x_2) - M^\lambda \cdot (A_\mu - B_\mu x_1)}.$$

Damit also $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1$ werde (für: $\mu = 1, 2, \dots p$) ist nothwendig und hinreichend, dass:

(20) $$\lim_{\lambda=\infty} M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A_\mu - B_\mu x_1}{(A_\mu - B_\mu x_2) - M^\lambda (A_\mu - B_\mu x_1)} = 0.$$

Da aber $(x_1 - x_2)$ von Null verschieden und auch $(A_\mu - B_\mu x_1)$ zum mindesten nicht für jedes $\mu = 1, 2, \dots p$

---

1) Wegen:
$$B_{p-1} (x_1 + x_2) = A_{p-1} + B_p$$
kann man M auch in die Form setzen:
$$M = \frac{B_p + B_{p-1} x_2}{B_p + B_{p-1} x_1}.$$

verschwinden kann[1]), so findet die Beziehung allemal dann und nur dann statt, wenn:

(a) $$\lim_{\lambda=\infty} M^{\lambda} = 0 \quad \text{d. h.} \quad |M| < 1,$$

und ausserdem der Nenner des Ausdruckes (20) für $\lambda = \infty$ nicht verschwindet, d. h. wenn:

(b) $$|A_{\mu} - B_{\mu} x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots p.$$

Die Bedingung (a) verlangt aber genau folgendes: es muss $\varepsilon = \pm 1$ so fixirt werden, dass (s. Gl. (15)):

(21) $$\left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| < 1,$$

und dies kann offenbar allemal und zwar bei vollkommen eindeutiger Bestimmbarkeit von ε erzielt werden, sofern nicht gerade:

(22) $$|M| \equiv \left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| = 1,$$

in welchem Falle dann ε willkürlich $= \pm 1$ angenommen werden kann. Setzt man nun etwa:

(23) $$\frac{S}{\sqrt{D}} = \alpha + \beta i,$$

so geht die Bedingung (22) in die folgende über:

$$\left| \frac{\alpha - \varepsilon + \beta i}{\alpha + \varepsilon - \beta i} \right| = 1,$$

d. h. $$(\alpha - \varepsilon)^2 + \beta^2 = (\alpha + \varepsilon)^2 + \beta^2,$$

also schliesslich:

$$\alpha = 0$$

oder, wenn man allgemein den reellen Theil einer complexen Zahl z mit $\Re(z)$ bezeichnet:

(24) $$\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0.$$

---

[1]) Dies gilt offenbar auch im Falle $p = 1$.

Hiernach ist also die Bedingung (a) bei geeigneter Normirung von ε stets erfüllbar, wenn:

$$\text{(A)} \qquad \left| \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) \right| > 0.$$

Dass im entgegengesetzten Falle, also für $|M| = 1$ wirklich Divergenz stattfindet, erkennt man unmittelbar aus Gl. (19), wenn man berücksichtigt, dass für $|M| = 1$ — da die Möglichkeit $M = 1$ hier definitiv ausgeschlossen erscheint[1]) — stets $M = -1$ oder M eine nicht-reelle Zahl mit dem absoluten Betrage 1 sein muss, und dass daher M^λ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ eine unbegrenzte Folge periodisch wiederkehrender oder durchweg von einander verschiedener Werthe annimmt (letzteres, wenn M keine Einheitswurzel).

Im übrigen lässt sich die Divergenz-Bedingung (21) noch in folgender Weise umformen. Da dieselbe genau soviel

---

[1]) Denn aus $M = 1$ würde folgen $D = 0$, was unter den weiterhin zu behandelnden Fall I^b gehört.

Ist $M = -1$, d. h. $S = 0$, so folgt aus Gl. (19) für gerade λ:

$$\lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + \mu} = K_{\lambda p + \mu} = K_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots p),$$

dagegen für ungerade λ:

$$\lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + \mu} = K_{\lambda p + \mu} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} \text{ d. h. } = K_{p + \mu}.$$

Da nämlich allgemein:

$$x_1 x_2 = -\frac{A_p}{B_{p-1}}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und, wegen $S = 0$, d. h. $A_{p-1} = -B_p$, speciell sich ergiebt:

$$x_1 + x_2 = \frac{2\, A_{p-1}}{B_{p-1}} = -\frac{2\, B_p}{B_{p-1}}$$

so findet man in der That:

$$\frac{(x_1 + x_2) \cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} = \frac{A_{p-1} K_\mu + A_p}{B_{p-1} K_\mu + B_p} = K_{p + \mu}.$$

besagt, dass $\frac{S}{\sqrt{D}}$ rein imaginär oder Null, also $\frac{S^2}{D}$ wesentlich negativ oder Null, so kann man sie zunächst durch die folgende ersetzen:

$$\frac{S^2}{D} = -\varrho \quad (0 \leqq \varrho < +\infty)$$

oder, wegen: $D = S^2 - 4P$, auch:

$$S^2 = \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot 4P.$$

Da hier $\frac{\varrho}{1+\varrho} = \vartheta$ für $0 \leqq \varrho < \infty$ jeden Werth des Intervalles $0 \leqq \vartheta < 1$ annimmt, vice versa — so gewinnt man schliesslich statt der Bedingung (24) die folgende:

$$(24^a) \qquad S^2 = 4\vartheta \cdot P \quad (0 \leqq \vartheta < 1),$$

anders geschrieben:

$$D \equiv S^2 - 4P = -4(1-\vartheta) \cdot P$$

und, wenn man noch $1 - \vartheta = \eta$ setzt:

$$(24^b) \qquad D = -4\eta \cdot P \quad (0 < \eta \leqq 1).$$

In Bezug auf die Convergenz-Bedingung (b) ist noch zu bemerken, dass dieselbe für $\mu = p - 1$ und $\mu = p$ allemal eo ipso erfüllt ist. Da nämlich (nach Gl. (11) für $x = x_2$):

$$(25) \qquad A_p - B_p x_2 = -(A_{p-1} - B_{p-1} x_2) \cdot x_2,$$

so würde zunächst aus:

$$A_{p-1} - B_{p-1} x_2 = 0$$

jedesmal folgen, dass auch:

$$A_p - B_p x_2 = 0$$

und — sofern nur $|x_2| > 0$ angenommen wird — auch umgekehrt. Alsdann hätte man aber:

$$\frac{A_{p-1}}{B_{p-1}} = \frac{A_p}{B_p} \quad (\text{nämlich} = x_2),$$

was in Folge der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ unmöglich ist. Schliesst man also den Fall $x_2 = 0$ vorläufig aus, so genügt die Existenz der Bedingung (b) schon in dem folgenden Umfange:

$$\text{(B)} \qquad |A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots (p-2),$$

sodass dieselbe hiernach überhaupt erst für $p \geq 3$ in Betracht kommt.

Angenommen nun, man habe (falls $p \geq 3$) für ein oder mehrere specielle $\mu = m$:

$$\text{(26)} \qquad A_m - B_m x_2 = 0 \quad \text{d. h. } K_m = x_2,$$

so folgt aus Gl. (19), dass allgemein:

$$\text{(27)} \qquad K_{\lambda p + m} = x_2, \quad \text{also auch: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p + m} = x_2,$$

während für alle von m verschiedenen μ die Beziehung verbleibt:

$$\text{(28)} \qquad \lim_{\mu=\infty} K_{\lambda p + \mu} = x_1.$$

Hat also irgend einer der ersten $(p-2)$ Näherungsbrüche den Wert x_2, so gilt das gleiche von allen denjenigen K_ν, deren Index um ein Multiplum von p grösser ist, während die Folge der übrigen nach x_1 convergirt.

Was den oben zunächst ausgeschlossenen Fall $x_2 = 0$ betrifft, so bemerke man, dass derselbe nach Gl. (25) nur dann eintreten kann, wenn:

$$\text{(29)} \qquad A_p = 0.$$

Nun nimmt aber für $A_p = 0$ die Gleichung (I) die folgende Form an:

$$\text{(30)} \qquad B_{p-1} x^2 + (B_p - A_{p-1}) x = 0,$$

und zwar hat man (wegen: $A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = -4P \neq 0$) hierbei stets:

$$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0$$

und auch:

$$|B_p - A_{p-1}| > 0$$

(da die Annahme: $B_p - A_{p-1} = 0$ auf den Fall einer Doppelwurzel $x = 0$ führt, also unter I[b] gehört). Sodann wird:

$$(31) \qquad \text{entweder: } x = 0, \quad \text{oder: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und daher

$$(32) \qquad \begin{aligned} \text{entweder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\,x = A_{p-1}, \\ \text{oder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\,x = B_p. \end{aligned}$$

Um jetzt die Convergenz-Bedingung (a), nämlich:

$$|M| = \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_2} \right| < 1$$

(deren Herleitung in keiner Weise auf der Voraussetzung $|A_p| > 0$ beruhte, also auch für $A_p = 0$ giltig bleibt) zu erfüllen hat man also zu setzen:

$$(33) \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| < 1,$$

dagegen:

$$(34) \quad x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad x_2 = 0, \qquad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| > 1.$$

Im ersten Falle convergirt also der Kettenbruch nach $x_1 = 0$, wenn noch die Bedingung (B) in dem dort bezeichneten Umfange besteht (da ja hier die Nebenbedingung $|x_2| > 0$ erfüllt ist). Im zweiten Falle ist der Kettenbruch niemals convergent, da ja, wegen $A_p = 0$, $x_2 = 0$, stets:

$$(35) \qquad A_p - B_p\,x_2 = 0, \text{ d. h. } K_p = x_2 = 0$$

wird, sodass also der durch Gl. (27), (28) charakterisirte Divergenz-Fall eintritt; d. h. man hat:

$$(36) \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p} = x_2 = 0, \text{ im übrigen: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

(sofern nicht gerade μ eine solche Zahl m bedeutet, für die ebenfalls noch $A_m - B_m\,x_2 = 0$ wird).

Hiernach ergiebt sich also das folgende Gesammtresultat:

was in Folge der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ unmöglich ist. Schliesst man also den Fall $x_2 = 0$ vorläufig aus, so genügt die Existenz der Bedingung (b) schon in dem folgenden Umfange:

$$\text{(B)} \qquad |A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots (p-2),$$

sodass dieselbe hiernach überhaupt erst für $p \geqq 3$ in Betracht kommt.

Angenommen nun, man habe (falls $p \geqq 3$) für ein oder mehrere specielle $\mu = m$:

$$\text{(26)} \qquad A_m - B_m x_2 = 0 \quad \text{d. h. } K_m = x_2,$$

so folgt aus Gl. (19), dass allgemein:

$$\text{(27)} \qquad K_{\lambda p+m} = x_2, \quad \text{also auch: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+m} = x_2,$$

während für alle von m verschiedenen μ die Beziehung verbleibt:

$$\text{(28)} \qquad \lim_{\mu=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1.$$

Hat also irgend einer der ersten $(p-2)$ Näherungsbrüche den Wert x_2, so gilt das gleiche von allen denjenigen K_ν, deren Index um ein Multiplum von p grösser ist, während die Folge der übrigen nach x_1 convergirt.

Was den oben zunächst ausgeschlossenen Fall $x_2 = 0$ betrifft, so bemerke man, dass derselbe nach Gl. (25) nur dann eintreten kann, wenn:

$$\text{(29)} \qquad A_p = 0.$$

Nun nimmt aber für $A_p = 0$ die Gleichung (I) die folgende Form an:

$$\text{(30)} \qquad B_{p-1} x^2 + (B_p - A_{p-1}) x = 0,$$

und zwar hat man (wegen: $A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = -4P \neq 0$) hierbei stets:

$$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0$$

und auch:

$$|B_p - A_{p-1}| > 0$$

(da die Annahme: $B_p - A_{p-1} = 0$ auf den Fall einer Doppelwurzel $x = 0$ führt, also unter I[b] gehört). Sodann wird:

$$(31) \qquad \text{entweder: } x = 0, \quad \text{oder: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und daher

$$(32) \qquad \begin{aligned} \text{entweder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\,x = A_{p-1}, \\ \text{oder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\,x = B_p. \end{aligned}$$

Um jetzt die Convergenz-Bedingung (a), nämlich:

$$|M| = \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_2} \right| < 1$$

(deren Herleitung in keiner Weise auf der Voraussetzung $|A_p| > 0$ beruhte, also auch für $A_p = 0$ giltig bleibt) zu erfüllen hat man also zu setzen:

$$(33) \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| < 1,$$

dagegen:

$$(34) \quad x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad x_2 = 0, \qquad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| > 1.$$

Im ersten Falle convergirt also der Kettenbruch nach $x_1 = 0$, wenn noch die Bedingung (B) in dem dort bezeichneten Umfange besteht (da ja hier die Nebenbedingung $|x_2| > 0$ erfüllt ist). Im zweiten Falle ist der Kettenbruch niemals convergent, da ja, wegen $A_p = 0$, $x_2 = 0$, stets:

$$(35) \qquad A_p - B_p\,x_2 = 0, \text{ d. h. } K_p = x_2 = 0$$

wird, sodass also der durch Gl. (27), (28) charakterisirte Divergenz-Fall eintritt; d. h. man hat:

$$(36) \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p} = x_2 = 0, \text{ im übrigen: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

(sofern nicht gerade μ eine solche Zahl m bedeutet, für die ebenfalls noch $A_m - B_m\,x_2 = 0$ wird).

Hiernach ergiebt sich also das folgende Gesammtresultat:

I[a]. Ist: $|B_{p-1}| > 0, \quad |D| > 0, \quad |A_p| > 0,$
so sind die Bedingungen (A) und (B) *nothwendig* und *hinreichend* für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$, und zwar hat man:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth bedeutet und $\varepsilon = \pm 1$ vermöge der Ungleichung (21) eindeutig bestimmt ist.

Im Falle $A_p = 0$ hat man[1]):

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = 0, \text{ wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

während der Kettenbruch *divergirt*,

$$\text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1.$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass die Convergenz des Kettenbruches nicht alterirt wird, wenn unter den Näherungsbrüchen K_μ ($\mu = 1, 2, \ldots p$) einer oder mehrere durch das Verschwinden des Nenners B_μ sinnlos werden. Angenommen nämlich, es sei für irgend ein bestimmtes $\mu = n$: $B_n = 0$ (in welchem Falle dann allemal: $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (19):

$$K_{\lambda p + n} = \frac{x_1 - M^\lambda \cdot x_2}{1 - M^\lambda}, \tag{37}$$

---

[1]) Beispiel: Für den unendlichen Kettenbruch mit der dreigliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, -\frac{b_2}{1}\right)$$

hat man:

$$\begin{array}{ll} A_1 = a_1 & B_1 = b_1 \\ A_2 = a_1 b_2 & B_2 = a_2 + b_1 b_2 \\ A_3 = 0 & B_3 = a_2. \end{array}$$

Der Kettenbruch convergirt also nach Null, wenn $\left|\frac{A_2}{B_3}\right| < 1$, d. h. $|a_2| - |a_1 b_2| > 0$.

sodass alle $K_{\lambda p+n}$ für $\lambda \geq 1$ endlich und bestimmt ausfallen und $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+n} = x_1$ wird.

I^b. $D = 0$.

Ist $D = 0$, so hat man:

(38) $(A_{p-1} - B_p)^2 = -4 A_p B_{p-1}$ anders geschrieben: $S^2 = 4P$ (also sicher: $|S| > 0$). Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) fallen dann in die eine zusammen:

$$(39) \qquad x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}} = -\frac{2 A_p}{A_{p-1} - B_p},$$

und es wird daher:

$$(40) \qquad \left.\begin{cases} A_{p-1} - B_{p-1} x = A_{p-1} - \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) \\ B_{p-1} x + B_p \quad = \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) + B_p \end{cases}\right\} = \frac{1}{2} S,$$

sodass Gl. (12) sich zunächst in die Form setzen lässt:

$$(41) \qquad H - x = \frac{B_p + B_{p-1} x}{B_p + B_{p-1} h} \cdot (h - x).$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten $(h - x)$, so wird:

$$H - h = \frac{B_{p-1}(x - h)}{B_p + B_{p-1} h} \cdot (h - x)$$

$$= -\frac{B_{p-1}}{B_p + B_{p-1} x} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \text{ (nach Gl. (41))}$$

$$(42) \qquad = -\frac{2 B_{p-1}}{S} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \text{ (nach Gl. (40))}.$$

Hieraus findet man wieder für: $h = K_{\nu-p}$, also: $H = K_\nu$, die Recursionsformel:

$$(43) \qquad K_\nu - K_{\nu-p} = -\frac{2 B_{p-1}}{S} (K_\nu - x)(K_{\nu-p} - x),$$

aus welcher zunächst hervorgeht, dass für: $K_{\nu-p} - x = 0$ auch: $K_\nu - x = 0$ (nämlich: $K_\nu = K_{\nu-p}$) wird und umgekehrt.

Ist also $K_{\nu-p} - x$ von Null verschieden, so gilt das gleiche von $K_\nu - x$, und man kann also in diesem Falle

Gl. (43) durch Division mit $(K_\nu - x) \cdot (K_{\nu-p} - x)$ in die Form setzen:

$$(44) \qquad \frac{1}{K_\nu - x} = \frac{1}{K_{\nu-p} - x} + N, \quad \text{wo: } N = \frac{2 B_{p-1}}{S},$$

sodass sich durch Substitution von $\nu = p + \mu, 2p + \mu, \ldots \lambda p + \mu$ und Addition der betreffenden Gleichungen ergiebt:

$$(45) \qquad \frac{1}{K_{\lambda p+\mu} - x} = \frac{1}{K_\mu - x} + \lambda N,$$

also schliesslich:

$$(46) \quad K_{\lambda p+\mu} = x + \frac{K_\mu - x}{1 + \lambda N (K_\mu - x)} = x + \frac{A_\mu - B_\mu x}{B_\mu + \lambda N (A_\mu - B_\mu x)}$$

und:

$$(47) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x.$$

Ist andererseits für irgend ein $\mu = m$: $K_m = x$, so folgt auf Grund der oben gemachten Bemerkung, dass auch: $K_{p+m} = x$, sodann: $K_{2p+m} = x$ u. s. f., d. h. man hat in diesem Falle:

$$(48) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+m} = K_{\lambda p+m} = x.$$

Wird ferner für irgend ein $\mu = n$: K_n sinnlos, also $B_n = 0$ (wobei dann sicher $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (46):

$$(49) \qquad K_{\lambda p+n} = x + \frac{1}{\lambda N}, \text{ also ebenfalls: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+n} = x.$$

Betrachtet man schliesslich noch den speciellen Fall: $A_p = 0$ (wobei dann: $|A_{p-1}| > 0$, $|B_p| > 0$), so wird hier nach Gl. (38) auch: $A_{p-1} - B_p = 0$ (also: $S = 2 B_p$), d. h. die quadratische Gleichung (I) reducirt sich auf die folgende:

$$(50) \qquad B_{p-1} x^2 = 0$$

mit der Doppelwurzel $x = 0$. Die zuvor angestellten Betrachtungen behalten dann durchweg ihre Gültigkeit, man hat lediglich in Gl. (42) — (49) $x = 0$ zu setzen und findet in jedem der betreffenden Fälle:

$$(51) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = 0.$$

Hiernach ergiebt sich also der Satz:

I[b]. Ist: $|B_{p-1}| > 0, \quad D = 0$

so *convergirt* $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$ in jedem Falle gegen den Werth:

$$x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}} = -\frac{2 A_p}{A_{p-1} - B_p}$$

und man hat speciell:

$$x = 0, \text{ falls: } A_p = 0.$$

Es bleibt jetzt noch der Fall zu betrachten:

$$\text{II.} \quad B_{p-1} = 0.$$

Aus: $A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = -P$, wo: $|P| > 0$, folgt dann, dass allemal:

(52) $$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0.$$

Der Werth x des Kettenbruches, falls derselbe überhaupt convergirt, hätte hier der Relation zu genügen:

(53) $$x = \frac{A_p + A_{p-1} x}{B_p}$$

sodass an die Stelle der quadratischen Gleichung (I) die folgende lineare tritt:

(II) $$(B_p - A_{p-1}) x - A_p = 0.$$

Für die weitere Untersuchung sind nun folgende Unterfälle zu unterscheiden:

$$\text{II}^{a}. \quad |A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| > 0.$$

Man hat also:

(54) $x = \frac{A_p}{B_p - A_{p-1}}$ d. h. endlich und von Null verschieden.

Da sodann, wegen $B_{p-1} = 0$, die Beziehung besteht:

(55) $$H \equiv \left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1} h}{B_p},$$

so folgt:

$$H-x=\frac{A_{p-1}}{B_p}\cdot h+\frac{A_p}{B_p}-\frac{A_p}{B_p-A_{p-1}}=\frac{A_{p-1}}{B_p}\cdot h-\frac{A_{p-1}\,A_p}{B_p(B_p-A_{p-1})},$$

d. h.

$$(56)\qquad H-x=M\cdot(h-x),\quad \text{wo: } M=\frac{A_{p-1}}{B_p}$$

und hieraus, analog wie im Falle I^a:

$$(57)\qquad K_{\lambda p+\mu}-x=M^{\lambda}\cdot(K_\mu-x)\quad(\mu=1,2,\ldots p).$$

Hieraus erkennt man, dass der Kettenbruch sicher divergirt, wenn $|M|\geqq 1$ (wobei der Fall $M=1$, d. h. $B_p-A_{p-1}=0$ auf Grund der Voraussetzung vorläufig noch ausgeschlossen erscheint). Aber auch im Falle $|M|<1$ findet Divergenz statt. Hier wird zwar:

$$(58)\qquad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu}=x,$$

sobald μ einen solchen Index bedeutet, für welchen K_μ eine bestimmte Zahl vorstellt. Dagegen wird $K_{\lambda p+\mu}$ für jedes λ gleichzeitig mit K_μ sinnlos, und da dies, wegen $B_{p-1}=0$, für $\mu=p-1$ sicher (eventuell auch noch für andere Werthe von μ) der Fall ist, so enthält die Folge der Näherungsbrüche $K_{\lambda p+\mu}$ allemal unbegrenzt viele sinnlose[1]), sodass also der unendliche Kettenbruch als divergent bezeichnet werden muss[2]).

---

[1]) Dies wurde von Herrn Landsberg (a. a. O. p. 287) übersehen, sodass er in dem betreffenden Falle Convergenz deducirt.

[2]) Beispiel: Der Kettenbruch mit der 3 gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1},\ -\frac{b_1}{1},\ \frac{a_2}{b_2}\right).$$

Man hat: $B_2=0$

und allgemein:

$$B_{3\lambda+2}=0\quad(\lambda=1,2,3,\ldots).$$

$$\text{II}^b. \quad |A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| = 0.$$

Da hier $A_{p-1} = B_p$, so lässt sich Gl. (54) in die Form setzen:

$$H = \frac{A_p + B_p h}{B_p} = h + \frac{A_p}{B_p} \tag{59}$$

sodass sich ergiebt:

$$K_{\lambda p + \mu} = K_\mu + \lambda \cdot \frac{A_p}{B_p}, \tag{60}$$

d. h. der Kettenbruch divergirt nach ∞ (mit dem Vorzeichen von $\frac{A_p}{B_p}\Big)$.

$$\text{II}^c. \quad A_p = 0.$$

Man hat hier aus Gl. (54):

$$H = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h \tag{61}$$

und daher:

$$K_{\lambda p + \mu} = \left(\frac{A_{p-1}}{B_p}\right)^\lambda \cdot K_\mu. \tag{62}$$

Der Kettenbruch ist also, wie auch $\left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right|$ beschaffen sein möge, schon aus dem Grunde divergent, weil die Reihe der Näherungsbrüche unendlich viele sinnlose (nämlich für $\mu = p - 1$) enthält.

Da hiernach der Kettenbruch im Falle $B_{p-1} = 0$ allemal divergirt, so kann man schliesslich die gefundenen Ergebnisse in folgender Weise zusammenfassen:

Für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches mit der p-gliedrigen Periode $\left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p}\right)$ ist *nothwendig*, dass:

[1] $$|B_{p-1}| > 0.$$ [1])

Diese Bedingung ist auch *hinreichend*, wenn: $D \equiv (A_{p-1} - B_p)^2 + 4\,A_p\,B_{p-1} = 0$ und man hat:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p}{2\,B_{p-1}}.$$

Ist dagegen $D > 0$, so ist weiter *nothwendig*, dass:

[2] $$\left|\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0 \quad (\text{wo: } S = A_{p-1} + B_p).$$ [2])

Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich $\varepsilon \cdot \sqrt{D}$ (wo $\varepsilon = \pm 1$ und $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der Quadratwurzel bedeutet) eindeutig so fixiren, dass:

$$|S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}| < |S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}|,$$

sodass also:

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2\,B_{p-1}}, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2\,B_{p-1}}$$

eindeutig bestimmte Zahlen vorstellen. Im Falle $|A_p| > 0$ convergirt alsdann der Kettenbruch gegen den Werth x_1, sofern $p \leqq 2$, während für $p \geqq 3$ noch die folgende Bedingung als *nothwendig und hinreichend* hinzutreten muss:

[3] $$|A_\mu - B_\mu\,x_2| > 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots (p-2)).$$

---

[1]) Ist $p = 1$, so hat man nach üblicher Weise zu setzen:

$$B_{p-1} \equiv B_0 = 1,$$

sodass also die fragliche Bedingung hier stets eo ipso erfüllt ist. Im übrigen hat man in diesem Falle:

$$A_{p-1} = 0, \; A_p = a_1, \; B_p = b_1, \; S = b_1, \; D = b_1^2 + 4\,a_1.$$

[2]) Die Bedingung [2] lässt sich mit Rücksicht auf Gl. (24[a]), (24[b]) auch folgendermaassen formuliren:

Es darf *keine* Relation bestehen von der Form:

$$S^2 = 4\,\vartheta\,P \quad (0 \leqq \vartheta < 1)$$

oder anders geschrieben:

$$D = -4\,\eta\,P \quad (0 < \eta \leqq 1).$$

In dem besonderen Falle $A_p = 0$ lässt sich die Bedingung [2] durch die folgende ersetzen:

$$[2^a] \qquad \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1$$

und man hat alsdann $x_1 = 0$ als Grenzwerth des Kettenbruches.

Sind S und D reell, was offenbar insbesondere stets der Fall ist, wenn die a_ν, b_ν durchweg reell sind, so besteht offenbar die Divergenz-Bedingung (24): $\mathfrak{R}\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0$ im Falle $D > 0$ ausschliesslich dann, wenn $S = 0$; dagegen im Falle $D < 0$ für jedes S.

Da andererseits im Falle $D > 0$, $|S| > 0$ von den beiden Werthen des Ausdruckes

$$S + \varepsilon \cdot \sqrt{D} \quad \text{(wo jetzt: } \sqrt{D} > 0)$$

derjenige der numerisch grössere ist, bei welchem ε gleiches Vorzeichen mit S besitzt, also: $\varepsilon = \frac{S}{|S|}$ gesetzt werden kann, so gewinnt man hier die folgende einfachere Formulirung:

Sind S, D *reell* (eventuell auch *Null*), so ist für die *Convergenz* des fraglichen Kettenbruches *nothwendig:*

$$|B_{p-1}| > 0 \quad |S| > 0 \quad D \geqq 0.$$

Diese Bedingungen sind auch *hinreichend* im Falle $D = 0$ [1]) und für $p \leqq 2$ auch im Falle $D > 0$, und man hat:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{1}{2B_{p-1}}\left\{A_{p-1} - B_p + \frac{S}{|S|}\cdot\sqrt{D}\right\}.$$

---

[1]) Die Bedingung $|S| > 0$ ist in diesem Falle stets eo ipso erfüllt: s. Gl. (38), p. 475.

Im Falle $p \geqq 3$ ist jedoch noch erforderlich, dass:

$$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad (\mu = 1, \ldots (p-2)),$$

wo:

$$x_2 = \frac{1}{2B_{p-1}}\left\{A_{p-1} - B_p - \frac{S}{|S|}\cdot\sqrt{D}\right\}.$$

---

§ 2. Der einem rein periodischen Kettenbruche conjugirte Kettenbruch.

Bedeutet K einen unendlichen rein periodischen Kettenbruch mit der p-gliedrigen Periode $\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$, so soll als zu K conjugirt derjenige unrein periodische Kettenbruch K' bezeichnet werden, welcher besteht aus dem Anfangsgliede b_p und einem rein periodischen Kettenbruche mit der Periode $\left(\frac{a_p}{b_{p-1}}, \frac{a_{p-1}}{b_{p-2}}, \ldots \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_p}\right)$, also:

$$K' \equiv \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}, \ldots\right). \tag{63}$$

Für den Fall $p = 1$, in welchem diese Definition keinen Sinn besitzt, hat man zu setzen:

$$K' \equiv \left(b_1; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots\right) \text{ d. h. } \equiv b_1 + K. \tag{64}$$

Wenn nun in dem zuletzt bezeichneten Falle der Kettenbruch K überhaupt convergirt, so hat man[1]):

$$(65)\quad \begin{cases} K = x_1 = \frac{1}{2}(b_1 + \varepsilon\cdot\sqrt{b_1^2 + 4a_1}), & \text{wenn: } |b_1^2 + 4a_1| > 0, \\ \text{bezw. } K = x\ = \frac{1}{2}b_1, & \text{wenn: } b_1^2 + 4a_1 = 0, \end{cases}$$

und daher:

$$(66)\quad \begin{cases} K' = -\frac{1}{2}(b_1 - \varepsilon\cdot\sqrt{b_1^2 + 4a_1}) & \text{d. h. } = -x_2, \\ \text{bezw. } K' = -\frac{1}{2}b_1 & \text{d. h. } = -x. \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. p. 480, Fussnote 1).

Um nachzuweisen, dass ein ganz analoger Zusammenhang zwischen K und K' auch für $p \gtreqless 2$ stattfindet, schicken wir zunächst die folgende Hülfsbetrachtung voraus. Setzt man:

$$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{R_2}\right) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{R_2}}, \tag{67a}$$

so folgt:

$$-R_2 = \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}} = \left(\frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right), \tag{67b}$$

und umgekehrt.

Substituirt man:

$$R_2 = b_2 + \frac{a_3}{R_3},$$

so wird:

$$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{R_3}\right), \tag{68a}$$

und zunächst:

$$-\frac{a_3}{R_3} = b_2 + \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}},$$

also:

$$-R_3 = \left(\frac{a_3}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right) \text{ — vice versa.} \tag{68b}$$

Angenommen, es bestehen für irgend ein bestimmtes n allemal gleichzeitig die beiden Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} H &= \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{R_n}\right) \\ -R_n &= \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \dots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right), \end{aligned}\right. \tag{69}$$

so folgt durch die Substitution:

$$R_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}$$

zunächst:

$$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_n}{b_n}, \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}\right)$$

und:

$$-\frac{a_{n+1}}{R_{n+1}} = b_n + \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right)$$

also schliesslich:

$$-R_{n+1} = \left(\frac{a_{n+1}}{b_n}, \frac{a_n}{b_{n-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right).$$

Damit ist aber die Allgemeingültigkeit der Beziehungen (69) erwiesen, da deren Richtigkeit für $n = 2, 3$ bereits erkannt wurde.

Setzt man jetzt in Gl. (69)

$$n = p \geq 2, \quad H = -H', \quad R_p = b_p - h', \tag{70}$$

so ergeben sich als allemal gleichzeitig bestehend die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} H' &= \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}, \frac{a_p}{b_p - h'}\right) \\ h' &= \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{H'}\right). \end{aligned}\right. \tag{71}$$

Zugleich besteht dann aber, falls $|D| > 0$, zwischen h' und H' die folgende, aus Gl. (10) und (14) für $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende Relation:

$$\frac{h' + x_2}{h' + x_1} = M \cdot \frac{H' + x_2}{H' + x_1} \quad \left(\text{wo: } M = \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}\right). \tag{72}$$

Bezeichnet man jetzt die Näherungsbrüche des oben mit K' bezeichneten unrein periodischen Kettenbruches mit

$$K'_\nu \equiv \frac{A'_\nu}{B'_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots .),$$

sodass also insbesondere:

$$\left\{\begin{aligned} K'_0 &= b_p \\ K'_1 &= \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ K'_p &= \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}\right), \end{aligned}\right. \tag{73}$$

so hat man für $\nu \geqq p$:

$$(74)\qquad K'_\nu = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \frac{a_2}{b_1},\ \frac{a_1}{K'_{\nu-p}}\right),$$

also, wie die Vergleichung mit (71) zeigt, $h' = K'_\nu$ für: $H' = K'_{\nu-p}$. In Folge dessen ergiebt sich aber aus Gl. (72):

$$(75)\qquad \frac{K'_\nu + x_2}{K'_\nu + x_1} = M \cdot \frac{K'_{\nu-p} + x_2}{K'_{\nu-p} + x_1}$$

und hieraus, analog wie in § 1:

$$(76)\qquad \frac{K'_{\lambda p+\mu} + x_2}{K'_{\lambda p+\mu} + x_1} = M^\lambda \cdot \frac{K'_\mu + x_2}{K'_\mu + x_1} \quad (\mu = 0, 1, \dots (p-1)),$$

also:

$$(77)\qquad K'_{\lambda p+\mu} = -x_2 + M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A'_\mu + B'_\mu x_2}{(A'_\mu + B'_\mu x_1) - M^\lambda (A'_\mu + B'_\mu x_2)}$$

und daher, falls $|M| < 1$:

$$(78)\qquad \lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu} = -x_2,$$

sofern noch die Bedingung erfüllt ist:

$$(79)\qquad |A'_\mu + B'_\mu x_1| > 0, \text{ zunächst für: } \mu = 0, 1, \dots (p-1).$$

Es lässt sich aber auch hier wiederum zeigen, dass diese Bedingung für die beiden l e t z t e n Werthe $\mu = p-2,\ p-1$ nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Um dies nachzuweisen, hat man nur A'_μ, B'_μ für $\mu = p-2$, $p-1$ durch entsprechende A_μ, B_μ auszudrücken, was auf folgende Weise geschehen kann. Setzt man:

$$(80)\qquad \frac{q}{r} = \left(\frac{a_1}{b_1},\ \dots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}},\ \frac{a_p}{b_p - h'}\right)$$

$$= \frac{-A_{p-1} h' + A_p}{-B_{p-1} h' + B_p},$$

so folgt aus Gl. (71):

$$h' = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \frac{a_2}{b_1},\ \frac{a_1 r}{-q}\right)$$

$$(81) \qquad = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \frac{a_3}{b_2},\ \frac{a_2 q}{b_1 q - a_1 r}\right).$$

Andererseits ergiebt sich aus Gl. (80):

$$(82) \qquad h' = \frac{A_p r - B_p q}{A_{p-1} r - B_{p-1} q}$$

und daher, durch Combination von Gl. (81), (82), für $r = 0$ bezw. $q = 0$:

$$(83) \qquad \begin{cases} \left(b_p;\ \dfrac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \dfrac{a_3}{b_2}\right) = \dfrac{A_p}{A_{p-1}} \\ \left(b_p;\ \dfrac{a_p}{b_{p-1}},\ \ldots \dfrac{a_3}{b_2},\ \dfrac{a_2}{b_1}\right) = \dfrac{B_p}{B_{p-1}} \end{cases}$$

Da aber aus den Beziehungen:

$$\begin{matrix} A_1 = a_1 & A_2 = a_1 b_2 & A_{\nu+1} = a_{\nu+1} A_{\nu-1} + b_{\nu+1} A_\nu \\ B_1 = b_1 & B_2 = a_2 + b_1 b_2 & B_{\nu+1} = a_{\nu+1} B_{\nu-1} + b_{\nu+1} B_\nu \end{matrix} \quad (\nu \geqq 2)$$

resultirt, dass A_p, A_{p-1} formal (d. h. für ganz beliebige a_ν, b_ν) den grössten gemeinsamen Theiler a_1, dagegen B_p und B_{p-1} überhaupt keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so folgt aus Gl. (83):

$$(84) \qquad \frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}} = \frac{a^{-1} \cdot A_p}{a^{-1} \cdot A_{p-1}}, \quad \frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} = \frac{B_p}{B_{p-1}}.$$

Da ferner x_1 eine Wurzel der quadratischen Gleichung (I) (p. 466), so hat man:

$$(85) \qquad (B_p + B_{p-1} x_1) \cdot x_1 = A_p + A_{p-1} x_1,$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (84):

$$(86) \qquad (A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1) \cdot x_1 = (A'_{p-2} + B'_{p-2} x_1) \cdot \dot{a}_1.$$

Daraus erkennt man aber, dass die Beziehung:

$$A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1 = 0$$

allemal die folgende:

$$A'_{p-2} + B'_{p-2}\, x_1 = 0$$

nach sich ziehen würde und, sofern nur $|x_1| > 0$, auch umgekehrt: man hätte dann also: $\frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} = \frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}}$, was wiederum unmöglich ist. Da andererseits im Falle $x_1 = 0$ nach Gl. (85) auch $A_p = 0$ sein muss, so ergiebt sich, wenn man den Fall $A_p = 0$ vorläufig ausschliesst, dass die Bedingung (79) in der That nur für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ gefordert zu werden braucht, sodass sie also überhaupt nur für $p > 3$ in Betracht kommt.

Was sodann den vorläufig ausgeschlossenen Fall $A_p = 0$ betrifft, so hat man nach Gl. (33) zu setzen:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}, \quad \text{wenn:} \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| < 1,$$

und somit:

$$(87) \qquad A_p + A_{p-1}\, x_1 = 0, \quad \text{d. h.} \quad A'_{p-2} + B'_{p-2}\, x_1 = 0,$$

sodass also in diesem Falle die Bedingung (79) für $\mu = p - 2$ nicht erfüllt ist und der Kettenbruch K' daher divergirt.

Dagegen hat man nach Gl. (34):

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}, \quad x_2 = 0, \quad \text{wenn:} \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| > 1,$$

also $x_1 > 0$: der Kettenbruch K' convergirt also in diesem Falle nach $-x_2 = 0$, sofern nur die Bedingung (79) für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ erfüllt ist. —

Ist jetzt $D = 0$, so tritt an die Stelle von Gl. (72), die folgende, aus Gl. (42) durch Substitution von $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende:

$$(88) \quad h' - H' = -\frac{2 B_{p-1}}{S} (h' + x) \cdot (H' + x) \quad \left(\text{wo: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}} \right),$$

sodass für: $H' = K'_{\nu-p}$, also: $h' = K'_\nu$ (s. Gl. (71)), sich ergiebt:

$$(89) \quad K'_\nu - K'_{\nu-p} = -N(K'_\nu + x) \cdot (K'_{\nu-p} + x) \quad \left(\text{wo: } N = \frac{2 B_{p-1}}{S} \right)$$

und, falls $|K'_{\nu-p} + x| > 0$ und somit auch $|K'_{\nu} + x| > 0$:

$$(90) \qquad \frac{1}{K'_{\nu} + x} = \frac{1}{K'_{\nu-p} + x} + N.$$

Daraus folgt dann, genau wie in § 1, I[b]:

$$(91) \qquad \frac{1}{K'_{\lambda p+\mu} + x} = \frac{1}{K'_{\mu} + x} + \lambda N$$

und:

$$(92) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu} = -x.$$

Ist aber für irgend ein $\mu = m$: $K'_m + x = 0$, so folgt aus Gl. (89), dass $K'_{p+m} = K'_m = -x$, und allgemein: $K'_{\lambda p+m} = -x$, also auch:

$$(93) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+m} = -x.$$

Dieses Resultat gilt auch wiederum noch in dem besonderen Falle $A_p = 0$, d. h. $x = 0$. Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich also in folgender Weise zusammenfassen:

Ist $|D| > 0$ und convergirt der Kettenbruch K nach x_1, so convergirt $-K'$ nach x_2, sofern für $p > 3$ noch die Bedingung erfüllt ist:

$$|A'_{\mu} + B'_{\mu} x_1| > 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots (p-3)).$$

Nur im Falle: $A_p = 0$, $|A_{p-1}| < |B_p|$, in welchem $K = 0$ wird, ist K' *divergent;* während für: $A_p = 0$, $|A_{p-1}| > |B_p|$ zwar K *divergirt,* dagegen K' nach 0 *convergirt.*

Ist $|D| = 0$ und $|B_{p-1}| > 0$, so hat man:

$$K = -K' = x \text{ d. h. } = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 14. November 1900.

Der Präsident der Akademie, Herr K. A. v. Zittel, eröffnet die Festsitzung mit einer Rede: „Ziele und Aufgaben der Akademien im 20. Jahrhundert“, welche in den Schriften der Akademie erscheinen wird.

Sodann verkündigten die Classensekretäre die Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, die der mathematisch-physikalischen Classe.

Von der mathematisch-physikalischen Classe wurden gewählt und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätiget:

I. zum ordentlichen Mitgliede:

Das bisherige ausserordentliche Mitglied Dr. Wilhelm Conrad Röntgen, k. Geheimer Rath und Professor der Physik an der Universität zu München;

II. zum ausserordentlichen Mitgliede:

Dr. Siegmund Günther, Professor der Erdkunde an der technischen Hochschule zu München;

III. zu correspondirenden Mitgliedern:

1. Dr. Otto Bütschli, Professor der Zoologie an der Universität zu Heidelberg;
2. Dr. Wilhelm His, k. Geheimer Rath und Professor der Anatomie an der Universität zu Leipzig;
3. Henri Poincaré, Professor der mathematischen Physik an der Faculté des sciences zu Paris;
4. Dr. Otto Stolz, Professor der Mathematik an der Universität zu Innsbruck;
5. Dr. Hugo de Vries, Professor der Botanik an der Universität zu Amsterdam.

Hierauf hielt das ausserordentliche Mitglied der historischen Classe, Professor Dr. Hans Riggauer, die Festrede: „Ueber die Entwicklung der Numismatik und der numismatischen Sammlungen im 19. Jahrhundert", welche ebenfalls in den Schriften der Akademie veröffentlicht wird.

Sitzung vom 1. Dezember 1900.

1. Herr F. Lindemann macht eine Mittheilung: „Zur Theorie der automorphen Funktionen II."

2. Herr H. Ebert hält einen Vortrag: „Ueber die Ergebnisse zweier zum Zweck der Untersuchung des elektrischen Zerstreuungsvermögens in den oberen Schichten der Atmosphäre angestellten Luftballonfahrten."

3. Herr Seb. Finsterwalder berichtet über eine Untersuchung: „Ueber die innere Struktur der Mittel-Moränen."

4. Herr A. Pringsheim berichtet: „Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der doppelperiodischen Funktionen."

5. Herr R. Hertwig legt eine Abhandlung des Privatdozenten an der hiesigen Universität Dr. Otto Maas vor: „Ueber Entstehung und Wachsthum der Kieselgebilde bei Spongien."



Zur Theorie der automorphen Functionen II.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 4. Januar.)

Bei Abfassung meines Aufsatzes über automorphe Functionen (diese Sitzungsberichte, 1899, Bd. 39, Heft III) war mir eine Stelle in einem Aufsatze von Ritter über automorphe Functionen vom Geschlechte Null (Math. Annalen Bd. 41, p. 56 ff.) entgangen, auf die ich inzwischen in dankenswerther Weise aufmerksam gemacht bin. Hier weist Ritter nach, dass die Summe der Polygonseiten (d. i. die Summe der Umfänge aller Fundamentalbereiche) nicht convergiren kann, wenn die Grenzpunkte sich längs irgend welcher Curven (wie z. B. am Hauptkreise bei Gruppen mit Hauptkreis) häufen; dazu bemerkt er, dass für diese Fälle die Reihen $\sum f_i'(z)$ nicht convergiren können. Herr College Fricke war so gütig, mir einen Beweis für diese Bemerkung mitzutheilen, der mit Hülfe der von Poincaré bei seinem Beweise benutzten Ungleichungen leicht zu führen ist (vgl. unten den Schluss der vorliegenden Arbeit).

Der an der Spitze meiner Untersuchungen stehende Beweis bezieht sich nun nicht auf die Reihe $\sum f_i'(z)$, sondern zunächst auf die Reihe $\sum f_i''(z)$; aus ihr hatte ich die Convergenz der Reihe $\sum (f_i'(z) - f_i'(z_0))$ durch Integration erschlossen, dabei dann allerdings das ergänzende Glied $f_i'(z_0)$ in Folge eines Irrthums weiterhin fortgelassen, indem ich den Werth $\frac{d_i}{c_i}$ mit $\frac{c_i}{d_i}$ verwechselte. Dieses Fortlassen lässt sich aber auf andere Weise rechtfertigen.

Im Folgenden habe ich den früheren Beweis für die Convergenz der Reihen $\sum f_i''(z)$ mit grösserer Ausführlichkeit und unter Hinzufügung mancher Ergänzungen wiederholt, und damit mein früheres Resultat bestätigt gefunden. Am Schlusse habe ich versucht, den hierin liegenden Widerspruch mit der Ritter'schen Bemerkung aufzuklären.

Eine Substitution der gegebenen Gruppe bezeichnen wir mit $f_i(z)$, setzen also

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}, \tag{1}$$

wobei i einen von 0 bis ∞ laufenden Index bezeichnet. Es sei $H(z)$ eine rationale Function von z, dann sei die Function $\Theta(z)$ durch die Gleichung

$$\Theta(z) = \sum_k H(f_k(z))\,[f_k'(z)]^m \tag{2}$$

definirt, wo nach Poincaré die rechts stehende Reihe für $m > 1$ stets absolut convergirt, allein ausgenommen die Pole der Function $H(z)$ und die Pole der Functionen

$$f_i'(z) = \frac{1}{(c_i z + d_i)^2}. \tag{3}$$

Letztere kommen nicht in Betracht, wenn es sich um eine Gruppe mit Hauptkreis handelt, denn dann liegen sie alle ausserhalb dieses Hauptkreises. Die Poincaré'sche Function Θ genügt der Gleichung

$$\Theta(f_i(z)) = \Theta(z) \cdot [f_i'(z)]^{-m} = \Theta(z) \cdot (c_i z + d_i)^{2m}. \tag{4}$$

Unsere Hauptaufgabe soll es sein, die Reihe

$$\sum_k f_k''(z) = -2 \sum_k \frac{c_k}{(c_k z + d_k)^3} \tag{5}$$

zu untersuchen. Aus (4) erhalten wir durch logarithmisches Differenziren:

$$-f_i''(z) = \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} f_i'^2 - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right]. \tag{6}$$

Die Untersuchung der Reihe (5) können wir daher auf die Untersuchung der beiden einzelnen Reihen

$$(7)\qquad \begin{aligned} U &= \sum_i \frac{1}{m} \frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2}, \\ V &= \sum_i \frac{1}{m} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i' \end{aligned}$$

zurückführen und haben dann den Vortheil, dass wir sowohl über die Zahl m, als über die in $\Theta(z)$ vorkommende rationale (oder transsccendente) Function $H(z)$ noch in besonders günstiger Weise verfügen dürfen. Von der Zahl m hängt auch die Function Θ ab; lassen wir also m vom Summationsindex i abhängen, so können auf den rechten Seiten der Gleichungen (7) keine gemeinsamen Factoren vor das Summenzeichen gesetzt werden. Wir können eine solche Abhängigkeit zwischen den Zahlen m und i unbedenklich einführen, weil die Gleichung (6) eine Identität ist.

Nach Poincaré ist die Reihe

$$(8)\qquad \sum f_i'(\zeta)^2$$

stets convergent, also sicher $\lim_{i=\infty} f_i'(\zeta) = 0$. Man kann demnach eine Zahl j so bestimmen, dass für alle Werthe von k, welche grösser als j oder gleich j sind, die Ungleichheit

$$(9)\qquad \text{abs}\, f_k'(\zeta) < 1$$

erfüllt ist. Da die Reihe (8) gleichmässig convergirt, ist die so definirte Zahl von ζ nicht abhängig; sie kann so gewählt werden, dass für alle Punkte ζ eines endlichen Bereiches dieselbe Zahl j genügt. Der Einfachheit wegen können wir uns hierbei die Substitutionen so geordnet denken, dass dem grösseren absoluten Betrage von $f_i'(z)$ ein kleinerer Index entspricht, ausserdem aber immer $f_0(z) = z$ gesetzt wird. Es ist nur zu beachten, dass es vielleicht unendlich viele Substitutionen geben wird, denen derselbe absolute Betrag von $f_i'(z)$ zukommt. Jede Substitution f_i nemlich hängt von vier Constanten a_i, b_i, c_i, d_i ab, die durch die Bedingung $a_i d_i - b_i c_i = 1$ an einander ge-

knüpft sind, und die ausserdem durch die Bedingungen der Gruppe beschränkt werden; in f_i' kommen aber nur zwei Constanten (c_i und d_i) vor. Dem entsprechend können wir jede Substitution f_i auch durch zwei Indices λ, μ charakterisiren, von denen sich λ auf die Grösse des absoluten Betrages bezieht, μ aber eine irgendwie festgelegte Ordnung bei gleichem absoluten Betrage andeutet. Es wird also

(10) $$\sum_i [f_i'(z)]^m = \sum_\lambda \sum_\mu [f_{\lambda\mu}'(z)]^m,$$

und hier ist

(11) $$\sum_\mu [f_{\lambda\mu}'(z)]^m = N_\varkappa [f_\varkappa'(z)]^m,$$

wo $\varkappa$ einen bestimmten Index i bezeichnet und $N_\varkappa$ die Anzahl derjenigen Substitutionen angibt, denen dieselben Werthe der Constanten c_i und d_i zukommen. Da die Reihe (8) convergirt, so hat die rechte Seite von (11) für jeden Index $\varkappa$ einen endlichen Werth; es ist also auch $N_\varkappa$ endlich für jeden endlichen Werth von $\varkappa$, und es wird

$$\lim_{\varkappa=\infty} N_\varkappa [f_\varkappa'(z)]^2 = 0.$$

Die von uns verlangte Anordnung der Glieder der Reihe wäre hiernach so herzustellen, dass man zunächst die Doppelreihe der rechten Seite von (10) bildet und dann diese in eine einfache Reihe verwandelt, indem man die auf einander folgenden Substitutionen mit einem einzigen, stets wachsenden Index i numerirt.

Jedenfalls kann man hiernach den Index j so bestimmen, dass

(12) $$\text{abs}\, f_{k+1}'(\zeta) \leqq \text{abs}\, f_k'(\zeta) < 1 \quad \text{für } k \geqq j$$

und

(12ᵃ) $$\text{abs}\, f_{j+1}'(\zeta) < \text{abs}\, f_j'(\zeta).$$

Die zur Construction der in (2) gegebenen Θ-Function benöthigte Function $H(z)$ bestimmen wir durch die Gleichung:

(13) $$H(z) = (z - f_1(\zeta))^2 (z - f_2(\zeta))^2 \ldots (z - f_j(\zeta))^2 (z - a),$$

wo j den soeben durch (12) definirten Index bedeutet, und

mit a eine von ζ abhängige Grösse bezeichnet wird, die der Bedingung $H'(\zeta) = 0$ entspricht. Sei also

$$g(z) = (z - f_1(\zeta))(z - f_2(\zeta)) \dots (z - f_j(\zeta)),$$

so machen wir:

$$2g'(\zeta) \cdot (\zeta - a) + g(\zeta) = 0. \tag{14}$$

Hierbei muss angenommen werden, dass $g'(\zeta)$ von Null verschieden sei. Wäre aber $g'(\zeta) = 0$, so hätten wir

$$H(z) = [g(z)]^2 \cdot (z - a)(z - \beta)$$

zu setzen, und dann der Bedingung

$$[2g'(\zeta) \cdot (\zeta - \beta) + g(\zeta)](\zeta - a) + (\zeta - \beta) g(\zeta) = 0 \tag{15}$$

zu genügen. Bestimmen wir die Grösse β auf irgend eine Weise so, dass die eckige Klammer der linken Seite von Null verschieden ist, so kann auch a aus dieser Gleichung berechnet werden. Ist gleichzeitig $g(\zeta) = 0$ und $g'(\zeta) = 0$, so kann in analoger Weise Abhülfe geschaffen werden. Durch Differentiation der Gleichung (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Theta'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} m\, H(f_k(z))\, [f'_k(z)]^{m-1} f''_k(z) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} H'(f_k(z))\, [f'_k(z)]^{m+1}. \end{aligned} \tag{16}$$

Setzen wir nun $z = \zeta$, so ist sowohl $H(f_k(\zeta))$ als auch $H'(f_k(\zeta))$ gleich Null für $k \leq j$, ausgenommen den Werth $k = 0$. Es wird also

$$\begin{aligned} \Theta(\zeta) &= H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^m \\ \Theta'(\zeta) &= \sum_{k=j+1}^{\infty} m\, H(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^{m-1} f''_k(\zeta) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{\infty} H'(f_k(\zeta))\, [f'_k(\zeta)]^{m+1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wie gesagt, denken wir uns die Zahl m von der Zahl i abhängig, und zwar so, dass m mit i in's Unendliche wächst. Wir wählen $m = i$, und setzen dem entsprechend den Index i an das Zeichen Θ; es ist also:

$$(18) \qquad \Theta_i(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\,[f'_k(\zeta)]^i.$$

Diese Function $\Theta(\zeta)$ ist keine Poincaré'sche Θ-Function, denn das Argument ζ kommt in dem Factor $H(f_k(\zeta))$ des allgemeinen Gliedes nicht nur im Argumente $f_k(\zeta)$, sondern nach (15) auch ausserdem explicite vor. Die Function $\Theta_i(z)$ wird nach Poincaré für eine gewisse endliche Anzahl von Punkten (die mit i wächst) in jedem Bereiche gleich Null; unter diesen Punkten ist aber ζ nicht enthalten, denn wäre ζ für alle Werthe von i ein Nullpunkt von $\Theta(z)$, so müsste $\Theta_i(\zeta)$ auch für $i = \infty$ gleich Null sein; es ist aber nach (9) und (18)

$$(19) \qquad \lim_{i=\infty} \Theta_i(\zeta) = H(\zeta),$$

und $H(\zeta)$ ist im Allgemeinen von Null verschieden. Der Fall $H(\zeta) = 0$ soll weiterhin besprochen werden.

Vielleicht könnte es für ganz specielle Lagen von ζ vorkommen, dass $\Theta_i(z)$ für $z = \zeta$ verschwindet; aber jedenfalls kann die Zahl solcher Stellen in jedem Bereiche nur eine endliche sein, denn wäre sie für alle Werthe unendlich gross, so müsste sie auch für $i = \infty$ unendlich gross bleiben, was nach (19) offenbar nicht der Fall ist. Diese Darlegung hatte ich in meiner früheren Arbeit in sehr knapper Form angedeutet, den entsprechenden Satz dann später bei der Correctur geändert, in der Meinung, ihn zu verbessern; thatsächlich war aber dadurch die irrige Bemerkung hineingekommen, dass die Anzahl der Nullpunkte der Function $\Theta_i(\zeta)$ mit wachsendem i unendlich gross werde.

Der absolute Betrag der Function $\frac{1}{\Theta_i(\zeta)}$ bleibt hiernach für alle Werthe von i stets unterhalb einer endlichen Grenze M:

$$(20) \qquad \operatorname{abs} \frac{1}{\Theta_i(\zeta)} < M.$$

Wir machen nun auch in der durch (7) definirten Reihe V die Substitution $m = i$, $z = \zeta$; dann wird

$$(\text{abs}\, V)_{z=\zeta} < M \sum_i \frac{1}{i} \text{abs}\,(\Theta_i'(\zeta) \cdot f_i'(\zeta)).$$

Setzen wir noch

$$P_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H\,(f_k(\zeta)) \left[\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right]^{i-1} f_k''(\zeta),$$

$$Q_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H'\,(f_k(\zeta)) \left[\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right]^{i+1},$$

so sind die Reihen P_i und Q_i, welche in die Gleichungen (17) einzuführen sind, nach den Poincaré'schen Sätzen für alle Werthe von i convergent; da ferner nach der oben getroffenen Festsetzung über die Anordnung der Functionen $f_i(z)$ stets

$$\text{abs}\, f_k'(\zeta) < \text{abs}\, f_j'(\zeta) \text{ für } k > j$$

ist, so haben die beiden Zahlenreihen

$$P_i,\quad P_{i+1},\quad P_{i+2}, \ldots\ldots$$
$$Q_i,\quad Q_{i+1},\quad Q_{i+2}, \ldots\ldots$$

die Eigenschaft, dass ihre absoluten Beträge mit wachsendem i stets abnehmen, sich also für $i = \infty$ endlichen Grenzen nähern. Sei

$$P_i' = \text{abs}\, P_i, \quad Q_i' = \text{abs}\, Q_i,$$

so wird

$$(21) \quad (\text{abs}\, V)_{z=\zeta} < M \sum_i \left[P_i' \,\text{abs}\,(f_j'(\zeta))^{i-1} + \frac{1}{i} Q_i' \,\text{abs}\,(f_j'(\zeta))^{i+1} \right] \text{abs}\, f_i'(\zeta).$$

Da die Reihe $\sum_i (f_j'(\zeta))^{i+1}$ in Folge der Forderung (9) sicher convergirt, so folgt, dass auch die Reihe V für $z = \zeta$ sicher convergent, und zwar absolut convergent ist. Ausgenommen sind die Punkte $\zeta = -\frac{d_i}{c_i}$, für welche die Functionen $f_i'(\zeta)$ unendlich gross werden, welche indessen für Functionen mit Hauptkreis (weil ausserhalb desselben liegend) nicht in Betracht kommen. Ausgenommen sind auch zunächst noch die Nullpunkte der Function $H(\zeta)$.

Etwas umständlicher gestalten sich die entsprechenden Ueberlegungen für die Reihe U, welche durch die erste Gleichung (7) definirt war. Damit die Gleichung (6) erfüllt, d. h.

$$\sum_i f_i'(\zeta) = V(\zeta) - U(\zeta)$$

sei, muss die Function Θ in U ebenso, wie in V definirt sein; es muss also auch jetzt $m = i$ gesetzt werden. Wir haben für $z = \zeta$

$$U(\zeta) = \sum_i \frac{1}{i} \frac{\Theta_i'(f_i(\zeta))}{\Theta_i(\zeta)} f_i'(\zeta)^{i+2}. \tag{22}$$

Die in $\Theta_i(z)$ eingehende Function $H(z)$ müsste wieder gemäss Gleichung (13) und der Index j durch die Ungleichung (9) bestimmt werden. Diese Forderung bereitet hier einige Schwierigkeiten, denn in $\Theta_i'(f_i(\zeta))$ treten die Grössen $f_k'(f_i(\zeta))$ an Stelle der Grössen $f_k'(\zeta)$ auf. Es müsste also j so gewählt werden, dass für $k \geqq j$, die Ungleichung

$$\text{abs}\, f_k'(f_i(\zeta)) < 1 \tag{23}$$

erfüllt ist, und dadurch wird j vom Index i abhängig. Es besteht nemlich die Gleichung

$$f_k'(f_i(\zeta)) = \frac{f_{ki}'(\zeta)}{f_i'(\zeta)}, \tag{24}$$

wenn $f_{ki}(\zeta) = f_k(f_i(\zeta))$ gesetzt wird. Um die Ungleichung (23) zu befriedigen, muss also j so gross gewählt werden, dass für $k \geqq j$

$$\text{abs}\, f_{ki}'(\zeta) < \text{abs}\, f_i'(\zeta) \quad \text{und} \quad \text{abs}\, f_{j+1,i}'(\zeta) < \text{abs}\, f_{j,i}'(\zeta) \tag{25}$$

wird. Für endliche Werthe von i wird man dieser Forderung durch einen endlichen Werth von j stets genügen können; mit unendlich wachsendem i wird aber auch der zugehörige Werth von j unbegrenzt zunehmen. In Folge dessen wächst mit j auch die Anzahl der Factoren von $H(z)$ in's Unendliche; und $H(z)$ wird für $j = \infty$ durch ein unendliches Product dargestellt, das nicht nothwendig convergent ist. Nach den bekannten Sätzen von Weierstrass und Mittag-

Leffler über eindeutige analytische Functionen können wir indessen dies Product durch Hinzufügen von Exponentialfunctionen zu den einzelnen Factoren stets convergent machen. Wir ersetzen daher die Gleichung (13) durch die folgende

$$H_i(z) = [G_i(z)]^2 \cdot (z - a_i), \tag{26}$$

wo durch Beisetzen des Index i daran erinnert werden soll, dass für jede Function $\Theta_i(z)$ eine andere Function $H_i(z)$ zu benutzen ist. Hierbei sei

$$G_i(z) = \left(1 - \frac{z}{f_1(\zeta)}\right) e^{g_1(z)} \cdot \left(1 - \frac{z}{f_2(\zeta)}\right) e^{g_2(z)} \cdots \cdot \left(1 - \frac{z}{f_j(\zeta)}\right) e^{g_j(z)}, \tag{27}$$

wo die ganzen Functionen $g_k(z)$ in bekannter Weise zu bilden sind; und zur Bestimmung von a diene die Gleichung:

$$2\, G_i'(\zeta) \cdot (\zeta - a_i) + G_i(\zeta) = 0. \tag{28}$$

Ist zufällig $G_i'(\zeta) = 0$, so sind entsprechende Ueberlegungen anzustellen, wie oben im Anschlusse an die Gleichung (15). Nach diesen Festsetzungen behält $H_i(\zeta)$ auch für $i = \infty$ einen endlichen Werth.

Von den beiden Zahlen j, welche einerseits durch die Forderung (9), andererseits durch die Forderung (23) bestimmt werden, ist jedesmal die grössere auszuwählen, welche dann beiden Ungleichungen genügt. Es ist sodann auch in V die frühere Function $H(z)$ durch die jetzige $H_i(z)$ zu ersetzen; im übrigen sind die obigen Ueberlegungen zu wiederholen, wodurch wieder die Convergenz der Reihe (21) erwiesen wird; denn die Grössen P_i und Q_i bleiben auch jetzt stets endlich, wie wir sogleich noch sehen werden.

Dieselben Ueberlegungen genügen jetzt aber auch für die Function $U(\zeta)$. Wir definiren eine Zahl j (die von i abhängt und mit i in's Unendliche wächst) durch die Ungleichung (23) bezw. (25), (12) und (12ᵃ), dann die Function $H_i(z)$ durch (26), (27) und (28); ferner setzen wir

$$\Theta_i(z) = \sum_k H_i(f_k(z))\, [f_k'(z)]^t,$$

und diese Gleichung soll jetzt sowohl für die Reihe U, als für die Reihe V gelten. Lassen wir z mit ζ zusammenfallen, so wird

$$(29)\qquad \Theta_i(\zeta) = H_i(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i(f_k(\zeta))\,[f_k'(\zeta)]^i$$

und in Folge von (28)

$$(30)\quad \Theta_i'(\zeta) = \sum_{k=j+1}^{\infty} i\,H_i(f_k(\zeta))\,[f_k'(\zeta)]^{i-1} f_k''(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i'(f_k(\zeta))\,[f_k'(\zeta)]^{i+1}.$$

Die Function $\Theta_i(\zeta)$ ist im Allgemeinen von Null verschieden, und die Anzahl der Nullpunkte ist eine endliche, so lange i endlich bleibt; sie wächst vielleicht in's Unendliche mit wachsendem i, bleibt aber discret; denn wir haben hier

$$\lim_{i=\infty} \Theta_i(\zeta) = H_\infty(\zeta),$$

wo nun rechts nach (27) ein convergentes unendliches Product steht. Es lassen sich hieran dieselben Ueberlegungen anknüpfen, wie oben an Gleichung (19). Es gilt somit auch hier die Ungleichung (20), wenn auch für M jetzt vielleicht ein anderer Werth gewählt werden muss. Ferner ist

$$(31)\qquad \text{abs}\, U(\zeta) \leq M \sum_i \frac{1}{i} \text{abs}\,[\Theta_i'(f_i(\zeta))\, f_i'(\zeta)^{i+2}].$$

Setzen wir

$$R_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i\big(f_k(f_i(\zeta))\big) \left[\frac{f_k'(f_i(\zeta))}{f_j'(f_i(\zeta))}\right]^{i-1} f_k''(f_i(\zeta)),$$

$$S_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i'\big(f_k(f_i(\zeta))\big) \left[\frac{f_k'(f_i(\zeta))}{f_j'(f_i(\zeta))}\right]^{i+1}$$

so sind die Reihen R_i und S_i für alle Werthe von i convergent. Da nemlich die Functionen $H_i(f_k(f_i(\zeta)))$ und $H_i'(f_k(f_i(\zeta)))$ gewisse endliche Werthe nicht überschreiten, so genügt es, die Reihe

$$A_i = \sum_{k=j+1} \left[\frac{f_k'(f_i(\zeta))}{f_j'(f_i(\zeta))}\right]^{i-1}$$

zu untersuchen. Wir betrachten zunächst die Reihe

$$L_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left[\frac{f'_k(\zeta)}{f'_j(\zeta)}\right]^{i-1},$$

welche zu obiger Function P_i in derselben Beziehung steht, wie A_i zu R_i.

Da $i > 2$ ist, so steht rechts eine stets absolut convergente Reihe. Ersetzen wir i durch $i+1$, so ist es möglich, dass j denselben Werth behält; und dann wäre, wenn ε_j den absoluten Betrag von $f'_j(\zeta)$ bezeichnet:

$$(32) \qquad \text{abs}\, L_i < \Sigma \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)^{i-1}, \quad \text{abs}\, L_{i+1} \leq \Sigma \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)^{i}$$

also auch, da $\varepsilon_k < \varepsilon_j$ ist:

$$(33) \qquad \lambda_{i+1} < \lambda_i,$$

wenn die rechte Seite der ersten Ungleichung (32) kurz mit λ_i bezeichnet wird.

Wächst aber j gleichzeitig mit i (wie es im Allgemeinen zu erwarten ist), so müssen wir einen andern Weg einschlagen.

Es ist

$$\text{abs}\, L_i < \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs} \left(\frac{f'_k(\zeta)}{f'_j(\zeta)}\right)^{i-1},$$

und die rechte Seite ist gleich

$$\frac{1}{\text{abs}\, f'_j(\zeta)^{i-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs}\,(f'_k(\zeta))^{i-1} = \frac{1}{\text{abs}\, f'_j(\zeta)^{i-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \text{abs}\, f'_{lj}(\zeta)^{i-1},$$

denn die links stehende Reihe ist absolut und unbedingt convergent, also unabhängig von der Anordnung der Glieder, und die jetzt rechts stehende Reihe unterscheidet sich von ihr nur durch eine Umstellung der einzelnen Glieder. Nach Gleichung (24) ist aber diese rechte Seite auch

$$(34) \qquad = \sum_{l=0}^{\infty} [\text{abs}\, f'_l(f_j(\zeta))]^{i-1}.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_l f'_l(z)^m$$

für $m > 1$ stets convergirt, wenn z einen Punkt im Innern des Hauptkreises bedeutet, so ist auch die Reihe (34) für jeden endlichen Werth von j convergent, und somit bleiben die Grössen L_i endlich bei wachsendem i, so lange j endlich bleibt.

Wird aber j mit i unendlich gross, so rückt der Punkt $f_j(\zeta)$ dem Rande des Hauptkreises bei wachsendem i beliebig nahe. Demselben Rande nähern sich von aussen die Punkte $-\frac{d_i}{c_i}$ bei wachsendem Index i. In der Reihe (34) kommen daher Terme vor, die über alle Grenzen hinaus wachsen; und dadurch wird die Convergenz der Reihe (34) für Punkte des Randes gestört (vgl. Poincaré a. a. O. 198). Nun ist aber nach der Definition

$$L_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{f'_k(\zeta)}{f'_j(\zeta)}\right)^{i-1} = \sum_l [f'_l(f_i(\zeta))]^{i-1}$$

eine Summe, in der alle Terme wegen der Bedingung (23) kleiner als Eins sind; die Summe enthält in Folge der über j getroffenen Festsetzungen von selbst diejenigen Terme der Reihe (34) nicht, welche die Convergenz der letztern stören. Folglich behält auch in diesem Falle die Reihe L_i einen endlichen Werth auch bei unbegrenzt wachsendem Index i; und dasselbe gilt für die in (21) vorkommende Function P_i; auch letztere bleibt für alle Werthe von i stets endlich.

Was nun die Grössen A_i anbetrifft, so ist nach Analogie zu (34)

$$(35) \qquad A_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} [f'_l(f_j(f_i(\zeta)))]^{i-1},$$

wenn der Index l bei der Summation so gewählt wird, dass die Gesammtheit der vorkommenden Functionen $f_l(f_j(\zeta))$ identisch ist mit der Gesammtheit der Functionen $f_k(\zeta)$, die ursprünglich in A_i auftreten. Die Grösse A_i entsteht also aus L_i, indem man ζ durch $f_i(\zeta)$ ersetzt; auf A_i lassen sich daher dieselben Ueberlegungen anwenden, wie sie soeben für L_i durchgeführt wurden, denn nach (23) ist der Index j so bestimmt, dass auch hier die absoluten Beträge aller Glieder auf der

rechten Seite von (35) kleiner als Eins sind, so dass die Convergenz nicht gestört wird, wenn der Punkt $f_j(f_i(\zeta))$ mit wachsendem i der Peripherie des Hauptkreises beliebig nahe kommt. Auch die Zahlen A_i, und damit die absoluten Beträge R_i' und S_i' der Grössen R_i und S_i bleiben daher stets unterhalb endlicher Grenzen.

Somit folgt aus (30) und (31):

$$\text{abs}\; U(\zeta) \leq M \sum_i \Big[R_i' \,\text{abs}\, \{f_j'(f_i(\zeta))\}^{i-1}$$

$$+ \frac{1}{i} S_i' \,\text{abs}\, \{f_j'(f_i(\zeta))\}^{i+1} \Big] \,\text{abs}\, f_i'(\zeta)^{i+2}.$$

Da $\lim f_i(\zeta) = 0$ ist für $i = \infty$, und da wegen der Ungleichung (23)

$$\text{abs}\, f_j'(f_i(\zeta)) < 1$$

ist, so steht auf der rechten Seite eine convergente Reihe, denn wenn φ den grössten Werth bezeichnet, der unter allen Werthen $f_j'(f_i(\zeta))$ vorkommt, so ist auch $\varphi < 1$ und die Reihen

$$(36) \qquad \sum_i \varphi^{i-1} \quad \text{und} \quad \sum \varphi^{i+1}$$

sind einzeln convergent.

Um diese Schlüsse in ihrer Reihenfolge genauer klar zu legen, verfahre man in folgender Weise:

Man wähle eine positive Grösse φ aus, welche kleiner als 1 ist, und wähle ν so gross, dass die Reihe

$$(37) \qquad \sum_{i=\nu}^{\infty} \varphi^{i-1}$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als ε werde. Man bestimme ferner eine Zahl μ so gross, dass

$$(38) \qquad \text{abs}\, f_i'(\zeta) < \varphi$$

wird für $i \geq \mu$. Die grösste dieser beiden Zahlen ν und μ werde mit n bezeichnet. Sodann werde ein Index j (der von i abhängt) so bestimmt, dass nach (23) und (25)

$$\text{abs}\, f_k'(f_i(\zeta)) < 1 \quad \text{für} \quad k \geq j,$$

und gleichzeitig $\quad \text{abs}\, f_k'(\zeta) \quad < \varphi \quad " \quad k \geq j.$

Mit Hülfe dieses Werthes von j werde die Function $H_i(\zeta)$ und darauf $\Theta_i(\zeta)$ definirt. Es ist dann zunächst:

$$\text{abs} \sum_{i=n}^{\infty} [\{f_j'(f_i(\zeta))\}^{i-1} + \{f_j'(f_i(\zeta))\}^{i+1}]\, f_i'(\zeta)^{i+2}$$

$$< 2 \sum_{n}^{\infty} \varphi^{i-1} < 2 \cdot \varepsilon.$$

Die Factoren R_i' und $S_i' \frac{1}{i}$ bleiben nach Obigem stets endlich, sagen wir kleiner als S''; es ist also:

$$\text{abs}\, U(\zeta) < 2\, S''\, M \cdot \varepsilon,$$

und ebenso:

$$\text{abs}\, V(\zeta) < M \cdot P'' \cdot \sum_{n}^{\infty} \varphi^{i-1}$$

$$< M\, P'' \cdot \varepsilon,$$

wenn P'' den grössten Werth bezeichnet, den die Ausdrücke

$$\text{abs}\, (P_i + i^{-1}\, \varphi \cdot Q_i)$$

annehmen können. Es ist demnach

$$\text{abs}\, (V_n(\zeta) - U_n(\zeta)) < M\, \varepsilon\, (P'' + 2\, S''),$$

also kleiner, als eine mit ε unendlich klein werdende Grösse, wobei $U_n(\zeta)$ und $V_n(\zeta)$ die Reste der Reihen $U(\zeta)$ und $V(\zeta)$ bedeuten.

Da nun $f_i''(\zeta) = V(\zeta) - U(\zeta)$ ist, so convergirt auch die Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ absolut.

Bei dem eingeschlagenen Beweisgange mussten allerdings gewisse Punkte ζ vorläufig noch ausgenommen werden, nemlich die Nullpunkte der Functionen $\Theta_i(\zeta)$. Diese Nullpunkte können in zwei Klassen getheilt werden: solche, die allen Functionen $\Theta_i(\zeta)$ gemeinsam sind, und solche, für die nur

einzelne dieser Functionen verschwinden. Die ersteren müssen auch als Nullpunkte der Function $\Theta_\infty(\zeta) = H_x(\zeta)$ auftreten.

Letztere kann man durch Aenderung der Definition der Function $H_i(\zeta)$ an andere Stellen bringen; in der That ist diese Definition noch in hohem Grade willkürlich: man kann auf der rechten Seite von (26) noch eine beliebige rationale Function von z als Factor hinzufügen, ohne etwas wesentliches an der ganzen Betrachtung zu ändern. Es entspricht dies Verfahren ganz demjenigen, welches oben im Anschlusse an die Gleichungen (16), (17) und (18) zur Anwendung kam. Die Nullpunkte einzelner Functionen $\Theta_i(\zeta)$ sind daher für die Convergenz der Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ nicht von wesentlicher Bedeutung.

Was nun die Nullpunkte und Unendlichkeitspunkte der Function $H_x(\zeta)$ betrifft, d. h. die Nullpunkte der Function $\zeta - f_k(\zeta)$ oder $f_k'(\zeta)$, so können sie ebenfalls nicht ein wesentliches Hinderniss der Convergenz bilden. Wäre nemlich ζ z. B. zufällig ein Nullpunkt der Gleichung

$$\zeta - f_\nu(\zeta) = 0 \text{ oder } f_\nu(\zeta) = 0,$$

so lassen wir bei der Definition $\mathrm{H}_i(z)$ den Factor $\left(1 - \frac{z}{f_\nu(\zeta)}\right)$ fort. Es sind dann für das Glied $f_\nu''(\zeta)$ der Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ die obigen Werthe für $\Theta_i(\zeta)$ und $\Theta_i'(\zeta)$ nicht anwendbar; es sind vielmehr auf den rechten Seiten der Gleichungen (17), (29) und (30) für $i = \nu$ die Summen von $k = 1$ (nicht $j + 1$) bis $k = \infty$ zu erstrecken. Für dies eine Glied $f_\nu''(\zeta)$ sind also die benutzten Umformungen nicht anwendbar, sie bleiben es aber für alle anderen Glieder der Reihe. Diese anderen Glieder bilden auch jetzt eine convergente Reihe, und folglich convergirt auch hier die Reihe $\sum f_i''(\zeta)$.

Diese Ausnahmepunkte stören die Definition der Hülfs-Function $H_i(z)$ und der Zahl j, sie stören aber nicht die Bestimmung der Zahl n gemäss den im Anschlusse an die Ungleichungen (37) und (38) getroffenen Bestimmungen.

Die Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ ist daher gleichmässig convergent.

Sie kann demnach gliedweise integrirt werden; folglich ist auch die Reihe

$$\Phi(\zeta, \zeta_0) = \sum_i [f_i'(\zeta) - f_i'(\zeta_0)] \tag{38}$$

absolut convergent. Ersetzen wir hier ζ durch $f_\nu(\zeta)$, ζ_0 durch $f_\nu(\zeta_0)$, so folgt:

$$\Phi(f_\nu(\zeta), f_\nu(\zeta_0)) = \sum_i \left(\frac{f_{i\nu}'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta)} - \frac{f_{i\nu}'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right),$$

andererseits aus (38):

$$\frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)} \Phi(\zeta, \zeta_0) = \sum_k \left(\frac{f_k'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta_0)} - \frac{f_k'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right)$$

oder nach Umordnung der Glieder auf der rechten Seite:

$$= \sum_i \left(\frac{f_{i\nu}'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta_0)} - \frac{f_{i\nu}'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right), \tag{39}$$

also auch

$$\Phi(f_\nu(\zeta), f_\nu(\zeta_0)) - \frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)} \Phi(\zeta, \zeta_0) = \left(\frac{1}{f_\nu'(\zeta)} - \frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)}\right) \sum_i f_{i\nu}'(\zeta).$$

Hieraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_i f_{i\nu}'(\zeta) = \sum_k f_k'(\zeta)$$

absolut convergirt. Und damit ist dasjenige Resultat gewonnen, welches meiner früheren Arbeit zu Grunde lag.

Andererseits hat Ritter gezeigt, dass die Reihe

$$\sum U_i$$

divergirt, wenn man mit U_i den Umfang desjenigen Polygons bezeichnet, das aus dem Fundamental-Polygon mit dem Umfange U_0 durch die Substitution $f_i(z)$ hervorgeht. Nun ist für $z_i = f_i(z)$

$$\sum_i U_i = \sum_i \int \operatorname{abs}(d z_i) < U_0 \sum_i M_i,$$

wenn M_i den grössten Werth von abs $f_i'(z)$ auf dem Umfange U_i bedeutet, ferner nach Poincaré

$$M_i < K m_i,$$

wenn K eine bestimmte, von i unabhängige Zahl, m_i den kleinsten Werth von abs $f_i'(z)$ bezeichnet, also

$$\sum U_i < U_0 \cdot K \cdot \sum m_i < U_0 \cdot K \sum \text{abs} f_i'(z).$$

Auch die Reihe $\sum m_i$ divergirt daher, und um so mehr die Summe $\sum$ abs $f_i'(z)$, was mit obigem Resultate in Widerspruch zu stehen scheint.

Indessen ist zu beachten, dass Ritters Beweis für die Divergenz der Reihe $\sum U_i$ auf der Annahme einer bestimmten Anordnung der Polygone (concentrisch um das erste Polygon) beruht, und ebenso unser Beweis auf der Annahme einer bestimmten anderen Anordnung (nach den Grössen der absoluten Beträge von $f_i'(\zeta)$), die mit der Ritter'schen Anordnung nicht nothwendig übereinstimmt.

In beiden Fällen haben wir es mit einer einfach unendlichen Reihe zu thun; bei der Anordnung nach concentrischen Ringen erscheinen immer gewisse Gruppen von Gliedern mit einander verbunden, so dass die Reihe der absoluten Beträge in der Form

$$\begin{gathered} v_{11} + v_{12} + \dots + v_{1\mathfrak{a}} \\ + v_{21} + v_{22} + \dots + v_{2\mathfrak{b}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + v_{\mu 1} + v_{\mu 2} + \dots + v_{\mu\mathfrak{m}} + \dots \end{gathered}$$

erscheint. Bei der von uns gewählten Anordnung seien die Glieder mit u_ν bezeichnet. Bei dem Beweise für die Gleichwerthigkeit der beiden Reihen $\sum u_\nu$ und $\sum v_{\mu\mathfrak{n}}$ wird vorausgesetzt, dass sich für jeden endlichen Index $\nu = n$, auch ein endlicher Werth $v_{\mu\mathfrak{m}}$ so angeben lasse, dass in der Summe $v_{11} + v_{12} + \dots + v_{\mu\mathfrak{m}}$ alle Glieder $u_0, u_1, \dots u_n$ vorkommen. Wenn nun die eine Reihe divergiren, die andere convergiren soll, so kann diese Bedingung nicht erfüllt sein. Unsere Reihe $\sum u_\nu$ ist nach der Grösse der Glieder geordnet; es müsste also nicht möglich sein, durch eine endliche Anzahl concentrischer Polygonringe, welche das erste Polygon successive umgeben, alle Polygone zu umfassen, in denen der absolute

Werth u_n des Differentialquotienten $f'_n(z)$ erreicht wird. Diese Unmöglichkeit würde z. B. eintreten, wenn es in beliebiger Nähe des umschliessenden Hauptkreises Punkte gibt, in denen der Werth von $f'_n(z)$ oberhalb einer angebbaren Grösse bleibt; dann aber würde auch die Reihe (8) nicht convergiren können.

Dieselbe Unmöglichkeit bietet sich aber auch, wenn an N Punkten z_m, die dem Rande beliebig nahe liegen, die Functionen $f'_n(z_m)$ sich mit wachsendem n verhalten wie N^{-1}, wo N eine mit n in's Unendliche wachsende Zahl bezeichnet; dann behält nemlich die Summe dieser Glieder einen endlichen Werth, und wenn diese Glieder in dem Reste der Reihe $\sum v_{\mu m}$ auftreten, so ist natürlich die Convergenz gestört, während die Convergenz der Reihe $\sum v_{\mu m}^2$ darunter nicht leidet.

Etwas derartiges scheint bei unseren Reihen in der That vorzukommen. Sei nemlich wieder $f_{i\nu}(z) = f_i(f_\nu(z))$, so ist

$$f'_{i\nu}(z) = f'_i(f_\nu(z)) \cdot f'_\nu(z) = \frac{1}{(z - \delta_\nu)^2 (f_\nu(z) - \delta_i)^2 c_\nu^2 c_i^2},$$

wo mit δ_ν der Punkt $-\frac{c_\nu}{d_\nu}$ bezeichnet ist. Es kann i so gewählt werden, dass der Punkt δ_i von aussen dem Hauptkreise beliebig nahe rückt; dann kann ν so bestimmt werden, dass sich der Punkt $f_\nu(z)$ derselben Stelle des Hauptkreises von innen beliebig nähert. In $f'_{i\nu}(z)$ wird so mit passend wachsendem i und ν, der zweite Factor des Nenners beliebig klein, während der erste endlich bleibt und die Factoren c_i^2 und c_ν^2 über alle Grenzen wachsen. Der Nenner wird also von der Form $0 \cdot \infty$ und bleibt jedenfalls sehr gross im Verhältniss zu den Werthen von $f'_{i\nu}(z)$ an anderen dem Hauptkreise benachbarten Stellen. Hierdurch dürfte sich der scheinbar vorhandene Widerspruch lösen.

Messungen der elektrischen Zerstreuung im Freiballon.

Von **Hermann Ebert.**

(*Eingelaufen 14. Januar.*)

Die Herren Elster und Geitel haben eine Reihe interessanter Beobachtungen über die Elektricitätsverluste wohl isolierter, elektrisch geladener Körper in der Luft angestellt,[1]) die sich nicht einfacher und vollkommener erklären lassen als durch die Annahme, dass in der freien Atmosphäre immer, aber namentlich an klaren, sonnigen Tagen, eine gewisse Menge frei beweglicher, elektrisch geladener kleinster Teilchen vorhanden ist, welche den Kräften elektrisierter Körper folgend deren Ladungen durch ihre Eigenladung in einer bestimmten Zeit zu neutralisieren vermögen. Wenn für diese Teilchen die Bezeichnung „Jonen" eingeführt wird, so bleibt vorläufig die nähere Beschaffenheit derselben noch völlig unentschieden; dahingestellt vor allem bleibt, ob sie identisch mit den Jonen der gewöhnlichen Elektrolyse sind, ob sie also als Teilproducte irgend eines der Bestandteile der Atmosphäre aufzufassen sind,

---

[1]) J. Elster und H. Geitel: Ueber einen Apparat zur Messung der Elektricitätszerstreuung in der Luft; Physikal. Zeitschrift 1, S. 11, 1899. Ueber die Existenz elektrischer Jonen in der Atmosphäre. Terrestrial Magnetism and atmospheric electricity 4, S. 213, 1899. Ueber Elektricitätszerstreuung in der Luft. Ann. der Physik 2, S. 425, 1900. J. Elster: Messungen der elektrischen Zerstreuung in der freien atmosphärischen Luft an geographisch weit von einander entfernt liegenden Orten, Physikal. Zeitsckrift 2, S. 113, 1900. H. Geitel: Ueber die Elektricitätszerstreuung in abgeschlossenen Luftmengen, Physikal. Zeitschrift 2, S. 116, 1900.

oder nicht vielmehr jenen kleinen elektrisch geladenen Teilchen, den sog. „Corpuskeln" oder „Elektronen" verwandt sind, welche in röntgenisierten Gasen, oder bei der Bequerelstrahlung aufzutreten scheinen. Auch über ihren Ursprung in der Atmosphäre und die Art ihrer Regeneration wissen wir vorläufig nichts näheres. Zwar wird man geneigt sein, an einen Zusammenhang mit der von Lenard[1]) entdeckten Erscheinung zu denken, wonach Durchstrahlung mit ultraviolettem Lichte in Luft einen Zustand der Jonisierung herbeiführt; es bleibt freilich auch hier vorerst noch zu ermitteln, ob die bei dem „Lenardeffect" auftretenden Jonen identisch mit jenen Partikelchen sind, welche die von Elster und Geitel gefundenen Erscheinungen in der freien Atmosphäre bedingen.

Um weiteren Aufschluss in diesen für das ganze Problem der atmosphärischen Elektricität so wichtigen Fragen zu erhalten, war es vor allem nötig einen Ueberblick über die räumliche Verteilung der Jonen in dem Luftocean im allgemeinen zu gewinnen. Elster und Geitel fanden schon das bedeutsame Resultat, dass die Zerstreuungsgeschwindigkeit mit der Erhebung in der Atmosphäre zunimmt. Die Beobachtungen auf Bergen werden aber durch die negative Eigenladung des Erdkörpers erheblich gestört. Die Erhebungen wirken wie Spitzen und sammeln um sich einen Ueberschuss an positiv geladenen Jonen an, so dass eine unipolare Leitfähigkeit der angrenzenden Luftmassen eintritt; die Ladung eines negativ elektrisierten, isolierten Conductors wird schneller neutralisiert, als eine gleich grosse entgegengesetzten Vorzeichens. Es musste daher von Interesse sein, die Verhältnisse im freien Luftmeere kennen zu lernen und hier bietet sich der Luftballon als vortreffliches Hilfsmittel dar.

Ich habe von München aus zwei Fahrten mit dem Freiballon für Zerstreuungsmessungen in höheren Schichten unter-

[1]) Ph. Lenard, Ueber Wirkungen des ultravioletten Lichtes auf gasförmige Körper; Ann. d. Phys. 1, S. 486, und: Ueber die Elektricitätszerstreuung in ultraviolett durchstrahlter Luft; Ann. d. Phys. 3, S. 298, 1900.

nommen, eine Sommerfahrt und eine Winterfahrt, also bei möglichst verschiedener allgemeiner Wetterlage und voraussichtlich auch verschiedenem elektrischen Zustande der Atmosphäre. Bei beiden Fahrten übernahm Herr Dr. Robert Emden die Ballonführung; die Fahrten fanden mit dem von der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften dem Münchener Verein für Luftschiffahrt geschenkten Kugelballon „Akademie" von 1300 cbm Inhalt von dem Platze der k. Militär-Luftschiffer-abteilung aus statt; sowohl bei den Vorarbeiten wie bei den Auffahrten selbst hatte ich mich des regsten Interesses und des Beistandes der Herren Offiziere der genannten Abteilung zu erfreuen, insbesondere von Seiten des Kommandeurs der Abteilung, des Herrn Hauptmann Weber, sowie der Herren Oberleutnants Casella und Dietel. Allen den genannten Herren spreche ich auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus.

Erste Fahrt am 30. Juni 1900.

Diese Fahrt war mehr eine allgemeine Orientierungsfahrt, bei der ausser dem luftelektrischen Apparate auch magnetische Instrumente mitgenommen wurden. Der Zerstreuungsapparat war nach Art des von Elster und Geitel beschriebenen zusammengesetzt. Es wurde besonderes Augenmerk darauf gerichtet, wie sich mit diesem Apparate im Ballon arbeiten lasse, welches die beste Art seiner Aufstellung sei, ob sich eine Eigenladung des Ballons bemerkbar mache, ob ferner die gleiche Genauigkeit wie bei festem Standorte erreicht werden könne, und ob sich endlich die Konstanten des Apparates bei der Fahrt merklich änderten.

Vor der Fahrt wurden Messungen am Aufstiegplatze in der Nähe des Ballons angestellt.

Der Aufstieg erfolgte bei klarem sonnigen Wetter um 8^h 55^m früh mit mässig starkem Auftrieb. Erst als $2^1/_2$ Sack Ballast ausgegeben wurden, stiegen wir auf 1000 m Meereshöhe, d. i. ca. 500 m über dem Boden, in welcher Höhe der Ballon ca. eine Stunde lang, fast ruhig über der nächsten Umgebung

Münchens stehend, erhalten werden konnte. Zunächst wurden ausschliesslich magnetische Messungen angestellt, über welche bei anderer Gelegenheit berichtet werden soll.

Gegen 10^h erreichten wir 1600 m, fielen aber stark, da wir in den Schatten einer Cumuluswolke geriethen. Nach Bremsung des Falles erhoben wir uns schnell auf 2000 m, gegen 11^h war 2600 erreicht und dann erhielt der Führer den Ballon längere Zeit in Höhen zwischen 2600 und 2900 m, was für die Anstellung der Beobachtungen sehr günstig war.

Die luftelektrischen Zerstreuungsmessungen konnten erst von 12^h an in Angriff genommen werden, als der Ballon auf der grössten bei dieser Fahrt erreichten Höhe von 2920 m angelangt war; er trieb dabei langsam über Erding nach Wartenberg zu, am Ostrande des Erdiuger Mooses im Osten der Isar zwischen München und Landshut dahin. Intensive, brennende Sommersonne lag auf dem Ballon.

Die Zerstreuungsversuche wurden daher mit Schutzdach ausgeführt, unter mehrmaligem Zeichenwechsel. Die Montierung des Instrumentes war nach Vorversuchen in der Weise bewerkstelligt worden, dass an dem Füllansatz des Ballons eine Schnur befestigt war, an der unten ein runder Holzdeckel in der Mitte befestigt wurde. Von den Rändern desselben gingen drei Schnüre herunter zu einem Fussbrett, auf welches das Instrument gesetzt wurde. Es hing auf diese Weise innerhalb der Gondel, etwa in Augenhöhe. Das Aufhängen an den drei Schnüren gab dem Ganzen noch nicht die gewünschte Stabilität; bei der zweiten Fahrt wurden daher mit grösserem Vorteil feste Verbindungen durch dünne Messingstangen zwischen den beiden Holzscheiben angewendet und das Instrument auf dem unteren Brette festgeschraubt. Die Aufhängung am Füllansatze hat sich im Ganzen bewährt. Nur wenn der Ballon viel an Gas verloren hat und bei starkem Fallen sich seine untere Hälfte einbauscht, ist diese Aufhängung keine ruhige mehr. Lästig ist freilich, dass man namentlich im Anfange oft die Schnur verlängern muss, da der Ballon sich immer mehr aufbläht und der Füllansatz dadurch in die Höhe steigt. Es soll

daher bei einer dritten, bereits geplanten Fahrt der Versuch gemacht werden, aussen am Korbrande ein Tischchen zu befestigen, auf dem der Apparat dann aufgestellt werden soll. Durch die Aufstellung ausserhalb der Gondel hoffe ich eine noch stabilere Montierung zu erzielen. Ausserdem stört dann der Apparat das freie Hantieren in der Gondel nicht mehr.

Schon als die Messungen begannen, hatten sich an den verschiedensten Punkten gewaltige Cumuluswolken von der Hochebene aus erhoben, die mit ihren Köpfen bis in unsere Höhe heraufreichten. Es ist klar, dass in diesen direkt vom Boden aufsteigenden Luftmassen nicht wesentlich andere Jonenmengen erwartet werden konnten, wie am Boden selbst. Ausserdem hatte aber durch die Vertikalströmungen eine sehr intensive Mischung der verschiedenen Luftarten stattgefunden. Es kann daher nicht Wunder nehmen, dass bei diesem labilen Zustande der Atmosphäre die Leitfähigkeit der Luft in der Höhe nicht mehr unipolar, sondern innerhalb der Fehlergrenzen für beide Vorzeichen gleich gross war.

Dieses Beispiel lehrt recht augenfällig, dass es unmöglich ist, ein für alle Witterungslagen passendes Gesetz über die Verteilung der Luftelektricität mit der Höhe auffinden zu wollen. Die Atmosphäre ist kein ruhendes und kein einheitliches Gebilde. Luftschichten der verschiedensten Herkunft und Beschaffenheit lagern sich übereinander; auf- und absteigende Luftströme ändern die Eigenschaften der in derselben Höhe nebeneinander liegenden Luftmassen. Dementsprechend muss der jeweilige elektrische Zustand, den wir in der Höhe antreffen, ein sehr verschiedener sein.

Bei unserer Fahrt drangen wir auch verschiedene Male in die Köpfe von Cumulussäulen selbst ein; daselbst befand sich der Wasserdampf der Luft am Kondensationspunkt, wie auch das Assmann'sche Aspirationspsychrometer bestätigte. In diesem Falle war das Zerstreuungsvermögen nur noch $^1/_3$ bis $^1/_4$ von dem normalen, ganz in Uebereinstimmung mit dem von Elster und Geitel angestellten Versuche, dem zu Folge die Jonen

in ihrer Beweglichkeit lahm gelegt werden, sowie sie sich als Kondensationskerne mit grösseren Massen von kondensiertem Wasser beladen. Die Neutralisation einer bestimmten Ladung auf dem Zerstreuungskörper muss eben um so schneller erfolgen, einmal je mehr Jonen von entgegengesetztem Zeichen überhaupt pro Cubikmeter Luft vorhanden sind, und zweitens, je leichter sie beweglich sind.

Um $1^h\ 20^m$ mussten wir uns zur Landung fertig machen, da der Ballon rapid sank und kein weiterer Ballast mehr geopfert werden durfte. Die Landung erfolgte $1^h\ 43^m$ bei Ruhmannsdorf, ca. 12 km ostnordöstlich von Landshut. Unmittelbar nach derselben wurden am Landungsplatze noch mehrere Messungen angestellt; es zeigte sich, dass die Konstanten des Apparates und vor Allem der Isolationszustand des Instrumentes keinerlei Veränderungen erfahren hatten. Ziemlich grosse Beträge der Zerstreuung wurden beobachtet, die mittägliche Junisonne hatte die Atmosphäre kräftig durchstrahlt. Das erhaltene Zahlenmaterial lässt das Grösser- oder Kleinerwerden oder das Konstantbleiben der Zerstreuung sehr deutlich erkennen; aber die Zahlen selbst sind mit den später gewonnenen nicht direkt vergleichbar, weil das bei der ersten Fahrt benutzte Elektroskop nicht genügend isolierte, so dass das Korrektionsglied einen grösseren Betrag erhielt, als dass man noch das vollkommene Zutreffen der bei seiner Ableitung gemachten Voraussetzungen für gewährleistet halten konnte. Das Elektroskop war leider nicht von Herrn O. Günther in Braunschweig, den die Herren Elster und Geitel empfehlen, und dessen Elektroskope wundervoll isolieren, sondern von einer anderen Firma bezogen worden, deren Fabrikat nicht angenähert mit den Originalapparaten von Herrn Günther konkurrieren kann. Aus diesem Grunde verzichte ich auf eine detaillierte Mitteilung des bei dieser ersten Fahrt erhaltenen Zahlenmateriales.

Zweite Fahrt am 10. November 1900.

Nachdem die erste Fahrt gezeigt hatte, dass man mit der neuen Methode sehr wohl luftelektrische Messungen im Freiballon anstellen kann, dass die Instrumente sich durch die Fahrt selbst nicht ändern, und nachdem eine Reihe von Erfahrungen gesammelt und die Vorversuche als abgeschlossen anzusehen waren, wurde die zweite Fahrt zu dem ganz speziellen Zwecke der Messung der Zerstreuungskoefficienten in verschiedenen Höhen unternommen. Ausser den zur Bestimmung der meteorologischen Daten nöthigen Instrumenten (Fahr-Aneroid, Bohner'sches Aneroid, Assmann-sches Aspirationspsychrometer, welche Herr Dr. Emden regelmässig ablas) wurde nur noch ein Glasapparat zur Entnahme einer Luftprobe in der Höhe und der mit neuem Elektroskop von O. Günther ausgerüstete Zerstreuungsapparat mitgenommen.

Um von vornherein auf eine ruhig geschichtete Atmosphäre ohne wesentliche Vertikalstörungen rechnen zu können, wurde eine Winterfahrt für diesen Zweck in Aussicht genommen.

Die allgemeine Witterungslage vor und an dem Fahrttage war, der k. bayerischen meteorologischen Zentralstation zu Folge, etwa die nachstehende: Am 8. November hatte sich ein tiefes Depressionszentrum, welches am vorhergehenden Tage über den britischen Inseln gelegen hatte, nach Norden verschoben, während über Zentral-Europa von Osten her hoher Druck an Raum gewann. Das Maximum mit mehr als 770 mm Druck lag an der unteren Donau und über Südwest-Russland. Auf der bayerischen Hochebene lag am Morgen Nebel, der sich aber gegen 10 Uhr Vormittags über München lichtete und hellem, sonnigem Wetter Platz machte; von den Höhenstationen, namentlich von der Zugspitze her, war klarer Himmel signalisiert worden. Am 9. November hatte sich das nördliche Minimum weiter nordöstlich verschoben, das barometrische Maximum hatte sich über dem Südosten des Erdteiles erhalten; von ihm aus erstreckte sich eine Zone relativ hohen Druckes

westwärts durch den Kontinent bis zum Biscayasee. In München stieg das Barometer fortwährend, das Wetter war heiter und mild. Die meteorologischen Bedingungen schienen daher für die Fahrt günstig zu liegen; ein weiteres Aufschieben derselben erschien nicht ratsam, weil das Heranziehen eines neuen Minimums vom Ocean her signalisiert war, und ein zweites Depressionsgebiet sich mittlerweile über dem Mittelmeerbecken auszubilden begann. Daher wurde die Fahrt für den folgenden Tag, den 10. November, festgesetzt. Die an die allgemeine Witterungslage geknüpften Erwartungen haben sich im allgemeinen bestätigt. Die Fahrt fand innerhalb eines Rückens relativ hohen Luftdruckes statt, zwischen der nördlichen Depression, welche sich am Tage der Fahrt in Folge eines Zuzuges vom Ocean her erheblich vertiefte, und dem südlich von den Alpen sich entwickelnden Minimum.

Schon an den Tagen vor der Auffahrt waren die luftelektrischen Verhältnisse genauer verfolgt worden; es hatten sich Zerstreuungskoefficienten von ca. 0,3—0,6 % für die positiven Ladungen, von 0,6—0,9 % für die negativen auf dem Dache des Polytechnikums ergeben, freilich mit nicht geringen Schwankungen mit der Tageszeit und der Luftklarheit. Am 9. November wurden die folgenden Werte von Herrn Ingenieur Lutz erhalten:

München, 9. November 1900.

Zeit	E	a	q
$9^h\ 20^m$ — 35 a. m.	$E_+ = 1{,}71$	$a_+ = 0{,}52$ %	$q = 1{,}38$
$9^h\ 40^m$ — 55	$E_- = 2{,}34$	$a_- = 0{,}72$ %	
$11^h\ 40^m$ — 55	$E_+ = 2{,}81$	$a_+ = 0{,}87$ %	$q = 0{,}50$
$12^h\ 00^m$ — 15 p. m.	$E_- = 1{,}42$	$a_- = 0{,}44$ %	
$4^h\ 25^m$ — 40	$E_+ = 4{,}37$	$a_+ = 1{,}34$ %	$q = 0{,}36$
$4^h\ 45^m$ — $5^h\ 00$	$E_- = 1{,}57$	$a_- = 0{,}49$ %	

Hier bezeichnet, wie bei Elster und Geitel, E die an dem Zerstreuungskörper in der Zeiteinheit (15 Minuten) neutralisierte Elektricitätsmenge, mittels des Coulomb'schen Zerstreuungsgesetzes auf den Fall bezogen, dass der Körper dauernd auf dem Potentialniveau von 1 Volt erhalten würde (die Verluste durch Unvollkommenheit der Isolation sind schon

in Abrechnung gebracht). Aus diesen E werden die Grössen a durch Division durch $15 \cdot 0{,}4343 \cdot (1 - n)$ erhalten, wo n das Verhältnis der Capacität des Elektroskopes allein zu der Capacität des aus diesem und dem Zerstreuungskörper bestehenden System ist; bei dem benutzten Instrumente war $n = 0{,}5$, und der genannte Divisor $= 3{,}26$.

Diese Zahlen a geben die in der Minute am Zerstreuungskörper neutralisierte Elektricitätsmenge, ausgedrückt in Prozenten der ursprünglichen Ladung, unabhängig von der Grösse dieses Körpers und gleichgiltig, bis zu welchen Spannungen er geladen wurde, letzteres freilich genau nur so lange, als das Coulomb'sche Zerstreuungsgesetz gilt, vergl. weiter unten. Diese Zahlen sind also direkt mit den an anderen Apparaten erhaltenen vergleichbar.

Endlich ist $q = a_- / a_+$.

Man sieht, dass am Morgen bei leichtem Nebel und schwachem Wind aus NO. sehr geringe Zerstreuungen und ein Ueberwiegen der — Zerstreuung, wie es der normale Fall bei exponirten Punkten an der negativ geladenen Erdoberfläche ist, stattfand. Gegen Mittag wurde bei fortschreitendem Klarwerden der Luft die + Zerstreuung grösser, die Entladungsgeschwindigkeit für die — Ladung ging zurück, so dass $q < 1$ wurde.

Es herrschte fast vollkommene Windstille. Am Nachmittag erhob sich wieder schwacher NO.-Wind, die + Zerstreuung war noch grösser im Vergleich zur negativen.

Am Fahrttage selbst war früh um 6^h der Himmel noch völlig klar; gegen 7^h bildete sich aber plötzlich ein dichter Nebel, von dem freilich zu vermuthen war, dass er nur eine wenig mächtige, dem Boden unmittelbar anliegende Schicht bilde.

Es wurde zunächst auf dem Exerzierplatze der Luftschiffer-Abteilung trotz des eingetretenen dichten Nebels eine Zerstreuungsmessung für + Ladung angestellt. Sie ergab sich zwischen $7^h\ 47^m$ und $8^h\ 4^m$ zu nur $E_+ = 0{,}93$ ($a_+ = 0{,}29\%$) ganz entsprechend der schon früher festgestellten Thatsache, dass im Nebel die Zerstreuung stark herabgesetzt wird. Bei

dieser Messung bedeckte sich das Elektroskop sowie der Zerstreuungskörper schliesslich mit einem dichten Thauüberzuge; doch hat sich die Konstruktion des Elektroskopes trefflich bewährt, indem die Isolation selbst unter so ungünstigen Bedingungen nicht litt.

Ich hielt es für wünschenswert, wenigstens einen orientierenden Versuch bei dieser Gelegenheit darüber anzustellen, wie der herangeführte Ballon auf den Zerstreuungskörper wirkt. Ich stellte daher den Zerstreuungsapparat auf einen Wagen ca. 1 m über dem Boden an einer Stelle auf, an der der Ballon auf seinem Wege vom Ballonhaus bis zur Gondel dicht vorüber geleitet werden konnte. Natürlich war es dazu nötig, das Schutzdach abzunehmen. Als aber der Zerstreuungskörper + geladen wurde, sank der Blättchenausschlag trotz des allerdings schwachen Windes und der fortschreitenden Betauung nicht, sondern nahm im Gegenteil zu, in vier Minuten einem Ansteigen des Potentiales von 220 auf 228 entsprechend. Also wurde entweder freie positive Ladung aus dem Nebel auf den Zerstreuungskörper übertragen, oder aber das Instrument war starken Influenzwirkungen von oben her ausgesetzt. Das Elektroskop wurde also negativ bis zu — 222 Volt geladen. Ein Ueberschieben des Daches verminderte den Ausschlag, weil die Kapazität des Systems dadurch vermehrt wurde, ebenso das Annähern von grösseren mit dem Boden verbundenen leitenden Massen. Als der Ballon vorübergeführt wurde, spreizten die geladenen Blättchen weiter auseinander und schlugen in dem Momente, als die Ballonkugel dem Zerstreuungskörper am nächsten gekommen war, gegen die Schutzplatten, so dass das Elektroskop sich vollständig entlud. Hiernach würde sich der Ballon wie ein negativ geladener Körper verhalten. Die Beobachtung bedarf indessen der Bestätigung bei günstigeren atmosphärischen Bedingungen. Bekannt ist ja, dass andere Beobachter, z. B. Tuma[1]), der mit drei Tropfen-

[1]) J. Tuma, Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektricität III. Luftelektricitätsmessungen im Luftballon. Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. math.-phys. Cl., Abteil. IIa, p. 227, 1899.

collectoren in verschiedener Höhe und zwei Elektroskopen, einem Vorschlage Börnsteins[1]) folgend, arbeitete, keine Ballonladung nachweisen konnte. Sollte der Ballon im vorliegenden Falle wirklich negativ geladen gewesen sein, so müssen wir annehmen, dass sich seine Ladung sehr bald zerstreut haben wird, namentlich unter Bedingungen wie bei unserer Fahrt, bei der der Ballon in wenigen Minuten in die intensivste Bestrahlung durch die Sonne geriet. Immerhin erschien es sicherer, auch im Ballon mit dem Schutzdach zu arbeiten, wodurch zugleich die Anordnung vollkommen derjenigen analog wurde, welche bei den Beobachtungen auf der Erde Verwendung fand. Freilich erhält man dann bei der relativen Ruhe der unmittelbar umgebenden Luftmassen gegen den Ballon und Alles, was dieser mit sich führt, kleinere Werthe für die Zerstreuung, vergl. weiter unten.

Um 8^h 19^m erfolgte der Aufstieg mit starkem Auftrieb; in kürzester Zeit hatten wir die Nebelschicht durchstossen und befanden uns schon in 700 m Meereshöhe (200 m über dem Boden) in glänzendstem Sonnenlichte unter tiefblauem Himmel, an dem nur einige zarte Cirruswolken standen. Die ganze Hochebene war mit einem dichten, wogenden, silberglänzenden Nebelmeere überdeckt, aus dem sich auf der einen Seite die gewaltige, schneebedeckte Kette der Alpen in ihrer ganzen Erstreckung in überraschender Deutlichkeit heraushob; auf der anderen Seite brandete das Nebelmeer gegen die schwarzen Rücken des bayerischen Waldes und Böhmerwaldes.

Wir haben uns bei der Fahrt am 10. November im Ganzen innerhalb dreier verschiedener Luftschichten bewegt, welche sich sowohl durch ihren Wasserdampfgehalt, als auch durch ihre Strömungsrichtung und Strömungsgeschwindigkeit deutlich von einander unterschieden. Die in derselben angestellten Messungen werden daher zweckmässig auch gesondert von einander behandelt.

---

1) R. Börnstein, Elektrische Beobachtungen bei Luftfahrten unter Einfluss der Ballonladung. Wied. Ann. 62, p. 680, 1897.

1. Luftschicht: vom Boden bis ca. 1200—1300 m.

Die Luftschicht, in die wir nach dem Passieren der Nebelschicht eindrangen, war der Bodenschicht noch am ähnlichsten beschaffen.

Leider wurde an diesem Tage die Nebelschicht am Boden nicht durch die einfallende, in unserer Höhe brennende Sonnenstrahlung aufgelöst. Daher sind die zur gleichen Zeit am Boden angestellten Beobachtungen nicht mit den Ballonbeobachtungen direkt vergleichbar. Herr Direktor Dr. Erk hatte die Liebenswürdigkeit, an der meteorologischen Zentralstation stündliche Bestimmungen des Barometerstandes, der Temperatur, der relativen Feuchtigkeit, des Dunstdruckes, der Niederschlagsmenge, der Windrichtung und -stärke, sowie der Bewölkung von früh 7^h bis abends 8^h am Fahrttage anstellen zu lassen. Herr Ingenieur C. Lutz hat für diesen Tag gleichzeitig den Zerstreuungskoefficienten auf der Attika des Mittelbaues der technischen Hochschule abwechselnd für beide Vorzeichen mit einem mit dem im Ballon benutzten genau verglichenen Instumente angestellt. Ich glaube indessen auf die Mitteilung dieses an sich wertvollen Beobachtungsmateriales an dieser Stelle verzichten zu sollen, da die Bedingungen unterhalb und oberhalb der Nebelschicht viel zu ungleich waren, um irgend welche Schlüsse zu gestatten. Es sei nur bemerkt, dass der Barometerstand während der Dauer unserer Fahrt in München fortwährend im Sinken begriffen war und der Feuchtigkeitsgehalt der Luft nahe am Sättigungspunkte sich erhielt; der Zug der Nebelmassen wurde um 11^h als aus Osten kommend notiert.

Diese erste Schicht passierten wir rasch, da uns hauptsächlich an der Durchforschung der höheren Schichten lag; Zerstreuungsmessungen wurden in ihr nicht angestellt, da der Apparat zunächst montiert, die Orientierung im Terrain vorgenommen und die Fahrtrichtung festgestellt werden mussten.

2. Luftschicht: von 1240—3000 m.

Wir stiegen rasch an und kamen um $8^h\ 30^m$ schon in einer Höhe von 1240 m offenbar in eine anders geartete

Luftschicht, wie die Angaben der Temperatur, der relativen Feuchtigkeit, und namentlich das aus ihnen nachher berechnete Mischungsverhältnis zwischen trockener Luft und Wasserdampf deutlich zu erkennen geben. Herr Dr. Emden, der das aus ca. 60 zusammengehörigen Ablesungen der beiden Thermometer, des Psychrometers und des Aneroides bestehende, reiche metereologische Beobachtungsmaterial einer eingehenden Diskussion unterworfen hat, wird das Gesagte an einer anderen Stelle demnächst noch näher begründen.

Unter dem Mischungsverhältnis ist hier das Gewicht des Wasserdampfes in Kilogrammen, welches auf 1 kg der denselben enthaltenden trockenen Luft kommt, verstanden. Diese Zahl gibt eine den Feuchtigkeitsgehalt der Luft besser als die relative Feuchtigkeit oder der Dunstdruck charakterisierende Grösse an, da sie sich bei allen Zustandsänderungen nicht wie jene Zahlen mit ändert, solange keine Kondensation eintritt. In dieser neuen Luftschicht, welche durch angenähert adiabatische Temperaturabnahme mit der Höhe und ein konstantes Mischungsverhältnis von 0,0024 kg Wasserdampf pro Kilogramm trockener Luft ausgezeichnet war, erhielten wir uns bis 11^h, langsam bis zu 3000 m ansteigend. Aus Geräuschen (z. B. Pfeifen von Lokomotiven) sowie durch Einvisieren gegen das Gebirge hin konnten wir trotz des dichten Bodennebels mit Sicherheit konstatieren, dass wir uns in einer fast ruhenden Luftschicht befanden, die uns nur ganz langsam nach Osten weiter führte.

Um zunächst festzustellen, welchen Einfluss das Schutzdach auf die Entladungsgeschwindigkeit hat, wurde $8^h\,47^m$ bis $8^h\,52^m$ in ca. 1800 m Höhe zunächst ohne Schutzdach gemessen und $E_+ = 9{,}95$ gefunden. Unmittelbar darauf von $8^h\,56^m$ bis $9^h\,11^m$ wurde in nur wenig grösserer Höhe von ca. 1950 m mit Schutzdach $E_+ = 3{,}79$ beobachtet, wobei natürlich alles auf die Zeiteinheit von 15^m umgerechnet ist.

Man sieht also, dass das Schutzdach, welches den freien Luftzutritt beeinträchtigt, freilich die Zerstreuungsgeschwindigkeit stark herabsetzt. Immerhin werden selbst im Ballon Werte

erhalten, welche sehr gut messbar sind. Absolut ruhig ist die Luft ja auch am Ballon nicht, da bei jeder Vertikalbewegung mehr oder weniger starker Vertikalwind sich entwickelt, welcher die mit den Jonen beladene Luft mit hinreichender Relativgeschwindigkeit an dem Zerstreuungskörper vorüberführt. Da mit Schutzdach genügend grosse Zerstreuungswerte auch im Ballon erhalten werden, möchte ich nicht raten, sich darauf zu verlassen, dass das den innerhalb der Gondel hängenden Apparat umgebende Tau- und Strickwerk denselben genügend vor elektrostatischen Einwirkungen schützt.

Das Arbeiten mit Schutzdach bewahrt zugleich vor lichtelektrischen Einflüssen bei der in der Höhe viel intensiveren Sonnenstrahlung.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis
$8^h\ 56^m$ — $9^h\ 11^m$	1975 m	+ 4,2° C.	38 %	0,0024
$9^h\ 15^m$ — $9^h\ 26^m$	2160 „	+ 2,7° „	38 %	0,0024
$9^h\ 28^m$ — $9^h\ 43^m$	2275 „	+ 1,7° „	44 %	0,0024
$9^h\ 45^m$ — $10^h\ 00^m$	2420 „	+ 0,5° „	47 %	0,0024
$10^h\ 18^m$ — $10^h\ 33^m$	2890 „	— 3,8° „	55 %	0,0022
$10^h\ 38^m$ — $10^h\ 53^m$	2965 „	— 4,7° „	56 %	0,0022

Dagegen möchte ich bei der nächsten Fahrt den Versuch machen, die Zerstreuungsgeschwindigkeit durch einen weitmaschigen gleichnamig geladenen Fangkäfig aus Draht zu steigern, entsprechend dem bekannten Versuche von Elster und Geitel. Dieser Käfig würde den namentlich bei Hochfahrten, bei denen man die Luftschichten schnell wechselt, nicht zu unterschätzenden Vorteil gewähren, dass man in kurzer Zeit viele Einzelmessungen anstellen kann.

Um $8^h\ 56^m$, also 37 Minuten nach dem Verlassen des Erdbodens, begannen die eigentlichen Messungen der Elektricitätszerstreuung in der Luft; wir konnten annehmen, dass in dieser Zeit sich eventuell vorhanden gewesene Ladungen

am Ballon und dem Korbe genügend zerstreut hatten, und das aus den folgenden Zahlen ersichtliche Ueberwiegen der negativen Zerstreuungsgeschwindigkeit auch für das freie Luftmeer in unserer Höhe gelte. Da während der Fahrt das Netzwerk keine Verschiebungen gegen die Ballonhülle erleidet, ist auch das Auftreten von reibungselektrischen Spannungen nicht wahrscheinlich.

Die folgenden Zahlen wurden in der bis ca. 3000 m reichenden Luftschicht mit dem nahezu constanten Mischungsverhältnis 0,0024 erhalten:

In dieser Tabelle ist die angegebene Höhe der Mittelwert aus den Einzelhöhenwerten, welche zu den Zeiten gehören, innerhalb derer die Ladungszerstreuung stattfand. Diesen Mittel-

Spannungen	Spannungsabnahme pro 15 Minuten			
214—196	18 Volt	$E_+ = 3,79$	$a_+ = 1,16\%$	$q = 1,81$
192—171	29 „	$E_- = 6,84$	$a_- = 2,10\%$	
222—187	35 „	$E_- = 7,44$	$a_- = 2,29\%$	$q = 1,28$
221—193	28 „	$E_+ = 5,86$	$a_+ = 1,79\%$	
225—206	19 „	$E_+ = 3,81$	$a_+ = 1,17\%$	$q = 1,40$
224—198	26 „	$E_- = 5,33$	$a_- = 1,63\%$	

höhen entsprechend sind Temperatur, prozentuale Feuchtigkeit und Mischungsverhältnis aus Kurven entnommen, welche die betreffende Grösse als Funktion der Höhe darstellen. Die angegebenen Spannungen sind die am Anfange und am Ende der Beobachtungszeit aus der Aichkurve entnommenen Voltzahlen; die Spannungsabnahme ist der Differenz dieser Zahlen gleich, wenn die Beobachtungszeit 15 Minuten betrug; sonst ist sie auf diese Zeit reduziert unter der allerdings nicht ganz zutreffenden Annahme, dass die Spannung mit der Zeit proportional abnimmt.

Entsprechend der gleichförmigen Beschaffenheit der Luftschicht liegen die a-Werte ziemlich nahe bei einander. Neben

die Vormittagswerte, die an klaren Tagen am Boden vor und nach der Fahrt erhalten wurden (vgl. z. B. die S. 518 angeführten Zahlen), gehalten, zeigen sie Folgendes: Die Zerstreuungsgeschwindigkeit ist in der Höhe von 1800 bis 3000 m unzweifelhaft grösser als am Boden. Dabei ergibt sich etwa dasselbe Verhältnis für die Entladungsgeschwindigkeiten der beiden Elektricitätsarten wie unten, eine negative Ladung wird etwa 1,5 mal schneller entladen wie eine positive. Bis zu diesen Höhen hinauf muss also am genannten Tage ein Ueberwiegen der Anzahl der freien + Jonen angenommen werden. Da diese sich langsamer bewegen als die — Jonen, so muss thatsächlich das Verhältnis der Anzahl der + Jonen gegenüber der Zahl der — Jonen im Cubikmeter noch grösser als 1,5 gewesen sein.

Wir haben also die auch schon auf Grund anderer Erscheinungen vermutete[1]), positiv geladene Schicht, der ein abnehmendes negatives Potentialgefälle entsprechen würde, in einer Erstreckung bis zu 3000 m Höhe durch Einfangen der Jonen selbst nachgewiesen.

Da uns das für diese Höhenschicht erlangte Zahlenmaterial zunächst ausreichend erschien, fassten wir um $10^h\ 53^m$ den Entschluss, höher hinauf zu gehen. Der Führer gab eine grössere Menge von Ballast aus, mit der er bis dahin sehr sorgsam Haus gehalten hatte. Da wir darauf gefasst sein mussten, bei der erfolgenden schnellen Erhebung Luftschichten von rasch wechselndem Verhalten zu durchqueren, also Messwerte zu erhalten, welchen keine genau vergleichbare Bedeutung zuzuschreiben war, benutzte ich die Zeit, um nochmals ohne Schutzdach zu messen. Ich erhielt für negative Ladung die enorme Zerstreuung $E = 19{,}24$. Ob sich trotz der Schwärzung des messingenen Zerstreuungskörpers unter dem Einflusse der intensiven Sonnenstrahlung hier doch vielleicht noch lichtelektrische Einflüsse mit geltend gemacht haben, wage ich nicht zu entscheiden.

---

[1]) Vergl. z. B. Sv. Arrhenius, Ueber die Ursache der Nordlichter, Physikal. Zeitschrift 1, S. 102, 1900.

3. Luftschicht: über 3000 m.

Um 11^h machte Herr Dr. Emden auf Grund seiner Ablesungen die Bemerkung, wir seien in andere meteorologische Bedingungen eingetreten. Diese Vermutung haben die reduzierten Beobachtungen bestätigt; wir traten um diese Zeit oberhalb 3000 m in eine viel stärker bewegte Luftschicht ein, die uns nach Norden abtrieb. Aus den unten folgenden Zahlen ist ersichtlich, dass sie sich vor Allem durch grössere Trockenheit auszeichnete. Denn das Mischungsverhältnis sank beim Eintreten in die neue Schicht plötzlich von 0,0022 auf 0,0014 kg, welchen Wert es in dieser dritten Schicht constant beibehielt. Damit steht im Einklange, dass auch das Zerstreuungsvermögen erheblich gesteigert war, und zwar für beide Vorzeichen.

Die nachstehenden Zahlen lehren Folgendes:

In der über 3000 m angetroffenen, der Durchstrahlung stärker ausgesetzten trockeneren, höheren Schicht war das Leitvermögen der Luft erheblich gesteigert und erreichte Werte, welche die zur gleichen Jahreszeit an klaren Tagen erreichten Maximalentladungsgeschwindigkeiten am Boden um das Drei- bis Vierfache übertrafen. Dabei war das Verhältnis der Zerstreuungskoeffizienten für beide Jonenarten nahezu das gleiche (q Mittel = 1,02) geworden.

In dieser Schicht wurden die Messungen nicht mehr durch das unipolare Verhalten des Erdkörpers beeinflusst. Die Jonenzahl ist nach diesen Ergebnissen in dieser grösseren Höhe also unverkennbar erheblich grösser als unten. Die grössere Entladungsgeschwindigkeit kann freilich auch durch eine grössere Beweglichkeit der Jonen in der dünneren Luft zum Teil wenigstens mitbedingt sein.

Zwischen $12^h\ 30^m$ und $12^h\ 50^m$ erreichten wir die Maximalhöhe von 3870 m. Um 1^h waren wir wieder auf 3000 m gefallen, traten in die mittlere Luftschicht ein und senkten uns schnell gegen das Thal des Regen hinab.

die Vormittagswerte, die an klaren Tagen am Boden vor und nach der Fahrt erhalten wurden (vgl. z. B. die S. 518 angeführten Zahlen), gehalten, zeigen sie Folgendes: Die Zerstreuungsgeschwindigkeit ist in der Höhe von 1800 bis 3000 m unzweifelhaft grösser als am Boden. Dabei ergibt sich etwa dasselbe Verhältnis für die Entladungsgeschwindigkeiten der beiden Elektricitätsarten wie unten, eine negative Ladung wird etwa 1,5 mal schneller entladen wie eine positive. Bis zu diesen Höhen hinauf muss also am genannten Tage ein Ueberwiegen der Anzahl der freien + Jonen angenommen werden. Da diese sich langsamer bewegen als die — Jonen, so muss thatsächlich das Verhältnis der Anzahl der + Jonen gegenüber der Zahl der — Jonen im Cubikmeter noch grösser als 1,5 gewesen sein.

Wir haben also die auch schon auf Grund anderer Erscheinungen vermutete[1]), positiv geladene Schicht, der ein abnehmendes negatives Potentialgefälle entsprechen würde, in einer Erstreckung bis zu 3000 m Höhe durch Einfangen der Jonen selbst nachgewiesen.

Da uns das für diese Höhenschicht erlangte Zahlenmaterial zunächst ausreichend erschien, fassten wir um $10^h\ 53^m$ den Entschluss, höher hinauf zu gehen. Der Führer gab eine grössere Menge von Ballast aus, mit der er bis dahin sehr sorgsam Haus gehalten hatte. Da wir darauf gefasst sein mussten, bei der erfolgenden schnellen Erhebung Luftschichten von rasch wechselndem Verhalten zu durchqueren, also Messwerte zu erhalten, welchen keine genau vergleichbare Bedeutung zuzuschreiben war, benutzte ich die Zeit, um nochmals ohne Schutzdach zu messen. Ich erhielt für negative Ladung die enorme Zerstreuung $E = 19{,}24$. Ob sich trotz der Schwärzung des messingenen Zerstreuungskörpers unter dem Einflusse der intensiven Sonnenstrahlung hier doch vielleicht noch lichtelektrische Einflüsse mit geltend gemacht haben, wage ich nicht zu entscheiden.

---

[1]) Vergl. z. B. Sv. Arrhenius, Ueber die Ursache der Nordlichter, Physikal. Zeitschrift 1, S. 102, 1900.

3. Luftschicht: über 3000 m.

Um 11^h machte Herr Dr. Emden auf Grund seiner Ablesungen die Bemerkung, wir seien in andere meteorologische Bedingungen eingetreten. Diese Vermutung haben die reduzierten Beobachtungen bestätigt; wir traten um diese Zeit oberhalb 3000 m in eine viel stärker bewegte Luftschicht ein, die uns nach Norden abtrieb. Aus den unten folgenden Zahlen ist ersichtlich, dass sie sich vor Allem durch grössere Trockenheit auszeichnete. Denn das Mischungsverhältnis sank beim Eintreten in die neue Schicht plötzlich von 0,0022 auf 0,0014 kg, welchen Wert es in dieser dritten Schicht constant beibehielt. Damit steht im Einklange, dass auch das Zerstreuungsvermögen erheblich gesteigert war, und zwar für beide Vorzeichen.

Die nachstehenden Zahlen lehren Folgendes:

In der über 3000 m angetroffenen, der Durchstrahlung stärker ausgesetzten trockeneren, höheren Schicht war das Leitvermögen der Luft erheblich gesteigert und erreichte Werte, welche die zur gleichen Jahreszeit an klaren Tagen erreichten Maximalentladungsgeschwindigkeiten am Boden um das Drei- bis Vierfache übertrafen. Dabei war das Verhältnis der Zerstreuungskoeffizienten für beide Jonenarten nahezu das gleiche (q Mittel = 1,02) geworden.

In dieser Schicht wurden die Messungen nicht mehr durch das unipolare Verhalten des Erdkörpers beeinflusst. Die Jonenzahl ist nach diesen Ergebnissen in dieser grösseren Höhe also unverkennbar erheblich grösser als unten. Die grössere Entladungsgeschwindigkeit kann freilich auch durch eine grössere Beweglichkeit der Jonen in der dünneren Luft zum Teil wenigstens mitbedingt sein.

Zwischen $12^h\ 30^m$ und $12^h\ 50^m$ erreichten wir die Maximalhöhe von 3870 m. Um 1^h waren wir wieder auf 3000 m gefallen, traten in die mittlere Luftschicht ein und senkten uns schnell gegen das Thal des Regen hinab.

Zeit	Höhe	Temperatur	Relative Feuchtigkeit	Mischungsverhältnis
$11^h\ 7^m - 11^h\ 22^m$	3400 m	— 8,0° C.	40 %	0,0014
$11^h\ 28^m - 11^h\ 43^m$	3705 „	— 8,0° „	40 %	0,0014
$12^h\ 10^m - 12^h\ 25^m$	3710 „	— 8,0° „	40 %	0,0014
$12^h\ 35^m - 12^h\ 50^m$	3770 „	— 8,5° „	42 %	0,0014

Während wir rasch fielen, wurde von $12^h\ 58^m - 1^h\ 9^m$ noch die Entladungsgeschwindigkeit für + Ladung zwischen den Höhen 3200 und 1000 m gemessen und trotz der starken Vertikalbewegung nur $E_+ = 3,99$ erhalten, in Uebereinstimmung mit den geringeren Zerstreuungswerten, welche auch beim Aufstiege in den unteren Luftschichten erhalten wurden.

Die Landung erfolgte um $1^h\ 25^m$ bei der Nösslinger Mühle, nahe dem Dorfe Nössling bei Viechtach in Niederbayern, auf einer bewaldeten Höhe von ca. 700 m Meereshöhe, angesichts des Böhmer Wald-Gebirges.

Unmittelbar nach der Landung wurden wiederum Messungen auf einer Waldwiese am Landungsorte angestellt. Aus Gründen, welche ich noch nicht recht aufzuklären vermochte, ergaben sich auffallend grosse Entladungsgeschwindigkeiten. Eine von $10^h\ 4^m - 10^h\ 15^m$ im Ballon angestellte Isolationsprobe mit Schutzdach, aber ohne Zerstreuungskörper hatte bereits gezeigt, dass das Instrument nicht etwa durch die Betauung am Morgen gelitten hatte.

Um zu prüfen, ob sich auch bei der weiteren Fahrt, bei der Landung, und dem sich daran anschliessenden sehr mühevollen Transport durch das unwegsame Waldgebirge das Instrument unverändert erhalten habe, wurde noch in der auf die Fahrt unmittelbar folgenden Nacht eine Isolationsbestimmung vorgenommen und der Apparat zu diesem Zweck Abends $10^h\ 15^m$ positiv geladen. Der Ausschlag war 9,50 Skalenteile, einer Spannung von 225 Volt entsprechend. Am andern

Spannungen	Spannungs-abnahme pro 15 Minuten			
216—179	47 Volt	$E_+ = 8{,}14$	$a_+ = 2{,}50\,\%$	$q = 1{,}10$
214—174	40 „	$E_- = 8{,}97$	$a_- = 2{,}75\,\%$	
208—169	39 „	$E_- = 9{,}00$	$a_- = 2{,}76\,\%$	$q = 0{,}93$
211—169	42 „	$E_+ = 9{,}62$	$a_+ = 2{,}96\,\%$	

Morgen früh um $4^h\ 7^m$ war der Ausschlag der Blättchen nur um einen Skalenteil zurückgegangen, was einem Verluste von nur 7 Volt Spannung (von 225 anf 218) in der zwischenliegenden Zeit von fast 6 Stunden entspricht; der Elektroskopdeckel war dabei geschlossen.

Jene grossen Werte am Landungsplatze konnten also nicht Isolationsfehlern zugeschrieben werden, sondern hatten offenbar in rein lokalen Ursachen ihren Grund.

Nach der Rückkehr nach München wurde zur Prüfung der Konstanten geschritten, deren Endergebnis war, dass durch die Fahrt an dem benutzten Instrumente keinerlei, die Messungen merklich beeinflussende Aenderung eingetreten war.

Eines bemerkenswerten Umstandes soll hier noch gedacht werden, der sich bei allen Messungen, sowohl den am Boden, wie den im Ballon angestellten, zeigte:

Um bei den Beobachtungen selbst eine Kontrolle zu haben, wurden die Elektroskopausschläge ausser am Anfange und am Ende der Zerstreuungszeit noch in einem dazwischen liegenden Momente, meist genau in der Mitte beider Zeiten, also $7^1/_2$ Minuten nach Beginn der Beobachtung notiert. Dabei hat sich in der überwiegenden Zahl von Fällen das Resultat ergeben, dass, wenn man die Zerstreuungskoeffizienten aus der Spannungsabnahme während der ersten $7^1/_2$ Minuten und während der zweiten gleich langen Zeit berechnet, man nicht dieselben Zahlen erhält. Die zweiten Zahlen sind bis auf wenige Ausnahmen stets grösser als die ersten, d. h. der Elektricitätsverlust,

in Prozenten der jedesmaligen Anfangsladung berechnet, wächst, wenn diese selbst abnimmt. Dagegen zeigt die gleichen Zeitintervallen entsprechende direkte Spannungsabnahme bei Weitem nicht so grosse Verschiedenheiten, wenn sie auch nicht vollkommen konstant ist. Dieses Verhalten ist unterdessen von Geitel auch an eingeschlossener Luft beobachtet worden. Dies weist auf die Thatsache hin, dass in gleichen Zeiten immer bestimmte Mengen freier Jonen gebildet werden. Aus der Luft bei der Neutralisation der Ladung eines isolierten Konduktors entnommene Jonen werden immer nur in dem Masse regeneriert, dass der Luft ein durch Druck und Temperatur bestimmter Gehalt an freien Jonen zukommt. Im Freien kann die Erscheinung natürlich nicht so rein zum Ausdruck kommen, wie bei eingeschlossener Luft. Dass sie aber doch so deutlich ausgesprochen ist, dürfte immerhin bemerkenswert sein.

Ich möchte noch anführen, dass Lenard bei seinen Versuchen an der durch Bestrahlung mit ultraviolettem Lichte elektrisch leitend gemachten Luft etwas Aehnliches beobachtet hat;[1]) die in derselben entladene Elektricitätsmenge wächst zwar mit der Spannung des geladenen Konduktors, aber langsamer wie diese, so dass bei niedrigeren Potentialen relativ grössere Elektricitätsmengen neutralisiert werden, als dem Coulomb'schen Zerstreuungsgesetze entsprechen würde. Man nähert sich mit steigenden Spannungen gewissermassen einer Art Sättigungsgrenze, der Strom der herzueilenden entladenden Jonen kann nicht über eine gewisse Grenze gesteigert werden.

Man hat hier ganz ähnliche Erscheinungen, wie sie J. J. Thomson und E. Rutherford in röntgenisierter Luft nachweisen.[2])

---

[1]) Ph. Lenard, Ueber die Elektricitätszerstreuung in ultraviolett durchstrahlter Luft. Ann. d. Phys. 3, S. 304, 1900.

[2]) „Die Entladung der Elektricität durch Gase“ von J. J. Thomson, deutsch von P. Ewers. 1900. Leipzig, J. A. Barth. S. 21 ff.

Resultate:

1. Luftelektrische Messungen nach der neuen von Elster und Geitel ausgearbeiteten Methode sind im Freiballon mit genügender Sicherheit und mit verhältnismässig geringer Mühe neben den sonst üblichen meteorologischen Beobachtungen ausführbar.

2. Bei der grossen Wichtigkeit der Zerstreuungsmessungen gerade in den höheren Schichten der Atmosphäre sowie bei den ganz neuen Gesichtspunkten, welche der Nachweis freier Jonen in der Atmosphäre in die ganze Lehre von der atmosphärischen Elektricität gebracht hat, ist es dringend erwünscht, dass die Bestimmungen der relativen Jonenzahlen mit in das Programm einer grösseren Anzahl von wissenschaftlichen Luftfahrten aufgenommen werden.

3. Mit zunehmender Höhe ergibt sich auch unabhängig von der unipolaren Einwirkung des Erdkörpers, wie er sich besonders bei Bergbeobachtungen störend bemerklich macht, eine unzweifelhafte Zunahme der Zerstreuungsgeschwindigkeit.

4. Die unteren Luftschichten können sich bis hinauf zu 3000 m Höhe qualitativ insofern den dem Boden unmittelbar anliegenden ähnlich verhalten, als auch in ihnen im freien Luftraume die — Ladungen schneller als die + zerstreut werden.

5. In grösseren Höhen scheint sich mit der Zunahme der absoluten Jonenzahl diese unipolare Leitfähigkeit mehr und mehr dahin auszugleichen, dass beide Ladungsarten etwa gleich schnell zerstreut werden.

6. Dabei findet das von Geitel für eingeschlossene Zimmerluft nachgewiesene Verhalten auch für fast alle an den Ballon herantretenden Luftproben statt, dass der in Prozenten der jedesmaligen Anfangsladung berechnete Elektricitätsverlust mit abnehmender Anfangsladung wächst.

7. Die Spannungsabnahme in gleichen Zeiten ist dagegen ungefähr konstant, dem Umstande entsprechend, dass verbrauchte Jonen auch in der freien Atmosphäre immer nur mit bestimmter Geschwindigkeit und in bestimmter Zahl zuwandern, sei es, dass

nur eine ganz begrenzte Zahl wirklich neugebildet wird, sei es, dass sie nur in bestimmter Menge gegen die Verbrauchsstelle heranwandern können.

8. Die Zunahme der Leitfähigkeit mit der Höhe findet nicht stetig etwa in der Weise statt, dass man hoffen dürfte, eine einfache Formel mit wenigen Konstanten aufstellen zu können, die für alle Fälle diese Zunahme mit der Höhe darzustellen vermöchte, sondern sprungweise; die speziellere physikalische Beschaffenheit der Luftschicht, in der man sich befindet, übt einen massgebenden Einfluss aus.

9. In trockener klarer Luft ist das Zerstreuungsvermögen in der Höhe gerade so wie am Erdboden gross; in dem Grade, wie der Wasserdampfgehalt zunimmt, und ganz besonders, wenn dieser sich dem Kondensationspunkte nähert, oder gar in Form feiner Nebelbläschen ausfällt, wird die Entladungsgeschwindigkeit für beide Zeichen erheblich herabgesetzt. —

Nach diesen Ergebnissen erscheint es im hohen Grade wünschenswert, mit Wasserstoffgasfüllung die über 4000 m liegenden Schichten der Atmosphäre auf ihr Zerstreuungsvermögen hin zu untersuchen. Hierdurch dürften sich Gesichtspunkte gewinnen lassen, welche für die Erklärung einer grossen Reihe von Erscheinungen von der grössten Bedeutung sind.

Ueber die innere Struktur der Mittelmoränen.

Von **S. Finsterwalder.**

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

Es ist bekannt, dass die langgezogenen Schuttrücken, welche die Zuflüsse eines Gletschers auch nach ihrer Vereinigung noch trennen, eigentlich Eisrücken sind, welche nur eine dünne, selten mehr als 0,3 m mächtige Schuttlage tragen, die das darunterliegende Eis vor der Abschmelzung schützt. Nur in relativ seltenen Fällen kommt diese Schuttlage in der Weise zu stande, wie es die populäre Erklärung der Moränen voraussetzt, dadurch nämlich, dass Steine auf den Gletscher fallen und auf der Oberfläche desselben durch die Bewegung des Eises thalab getragen werden.[1]) Diese Erklärung setzt nämlich als selbstverständlich voraus, dass Steine, die auf die Oberfläche fallen, auch dauernd auf derselben verbleiben. Das ist aber nur richtig, wenn es sich um die Oberfläche des abschmelzenden Gletschers handelt und daher kann jene Erklärung auch nur für Moränen, welche unterhalb der Vereinigung von Gletscherzuflüssen innerhalb des Abschmelzungsgebietes entstehen, gelten. Es vereinigen sich aber die Zuflüsse zumeist schon im Firnfelde, also im Gebiete dauernder Schneezufuhr, und hier wird ein auf die Oberfläche gelegter Stein zunächst immer weiter in's Innere wandern und erst weit unten im Abschmelzungsgebiet wieder irgendwo zum Vorschein kommen. Nun gibt es aber keine Vorgänge, durch welche

---

[1]) Diese Bemerkung gilt jedenfalls für die Gletscher der Ostalpen mit ihren hoch und frei gelegenen Firnfeldern, die von den Kämmen wenig überragt werden. In den Westalpen liegen die Verhältnisse infolge des steileren Aufbaues nicht unwesentlich anders und hier trifft die übliche Erklärung auch häufiger zu. Sie versagt aber für die Moränen der Gletscher vom skandinavischen oder arktischen Typus und besonders für jene der diluvialen Gletscher.

Steine dauernd mitten auf die Firnfelder gelegt werden und wenn etwa im Firnfelde eine Felsinsel auftauchen sollte, so werden an deren Umrandung keine anderen Vorgänge statthaben als an der äusseren Umrandung des Firnfeldes überhaupt. Der dort producierte Schutt liegt bereits am Grund des Gletschers, da die Umrandung ja nichts anderes ist als die Linie, an welcher der Gletschergrund an die Oberfläche tritt; er wird also in der Regel, wenn anders die Gletscherbewegung eine annähernd stetige ist, am Grunde weiter wandern und nicht in das Innere des Eises gelangen. Eine Ausnahme entsteht aber dann, wenn konvexe Unebenheiten des Gletschergrundes (Rücken oder Kuppen) derart beschaffen sind, dass sie an der Stossseite als Teiler der Strömungslinien des Eises wirken, also vom Eise umflossen werden, während an der Leeseite eine Wiedervereinigung der vorher getrennten Strömungslinien statthat. Eine ähnliche Vereinigung ursprünglich getrennter Strömungslinien findet auch an der Leeseite von Rücken statt, welche von der äussern Umrandung des Firnfeldes ins Innere einspringen und zwei Mulden scheiden. In beiden Fällen geht von der Leeseite der betreffenden Unebenheit eine Wand von vorher getrennten und nunmehr vereinigten Strömungslinien aus, welche mit Schutt beladen sind, da sie vom Grunde des Gletschers kommen, an welchem unter normalen Verhältnissen der Schutttransport erfolgt. Auf diese Weise habe ich das Entstehen von Innenmoränen erklärt.[1]) Eine solche Innenmoräne stellt demnach eine innerhalb des Eises verlaufende, von einer Unebenheit des Gletschergrundes ausgehende und mit ihrem Fusse in der Untermoräne wurzelnde aufrechtstehende Schuttwand vor. An ihrem oberen Ende reicht sie nicht bis zur Gletscherfläche, dagegen wird sie weiter abwärts im Schmelzgebiete des Gletschers zum Ausschmelzen kommen und als Mittelmoräne erscheinen. Ursprünglich konnte ich als Gründe für die Richtigkeit dieser Erklärung nur das Vorkommen von gekritzten Geschieben in den Mittelmoränen und die augenscheinliche Vermehrung ihres

[1]) Der Vernagtferner, seine Geschichte und seine Vermessung in den Jahren 1888 und 89. Graz 1897, S. 52 ff.

Schuttinhaltes, je mehr man sich dem Ende nähert, anführen.[1]) Neuere Beobachtungen haben mir jedoch eine direkte Bestätigung der erwähnten Ansicht geliefert.

Die erste verdanke ich meinem Freunde Herrn Professor Dr. A. Blümcke. Während seines diesjährigen durch Geschwindigkeitsmessungen am Hintereisferner veranlassten Aufenthaltes am Hochjochhospiz im hinteren Oetzthale war Ende August ein sehr schweres Hochgewitter niedergegangen. Ein stark angeschwollener, vom rechten Thalgehänge herabkommender Bach, war auf den Hochjochferner ausgetreten und hatte die oberflächliche Schuttlage einer kleinen Mittelmoräne nahe dem Ende auf die Erstreckung von 25—30 m vollständig abgeschwemmt, so dass das blanke Eis zu Tage trat. Man sah deutlich, dass der im Eise eingebackene Schutt in einzelne Reihen geordnet war, die sich in der Längsrichtung der Moräne erstreckten. Nach wenigen Tagen begann sich infolge der Ablation die Moräne in der Weise zu regenerieren, dass zuerst der vorhin beschriebenen Anordnung des Schuttes im Eisinnern entsprechend parallele Teilmoränen auftraten, deren Trümmer später zu einer zusammenhängenden Decke verschmolzen. Als ich Mitte September die Stelle besuchte, war die neue Decke von der alten kaum mehr zu unterscheiden, doch bewies der noch sichtbare Rand der alten Moränendecke, dass kein Stein derselben auf das früher abgewaschene Gebiet gerutscht war.

Gelegentlich der von Prof. E. Richter in Graz veranlassten internationalen Gletscherkonferenz am Rhonegletscher konnte den Teilnehmern auf dem Rücken der grossen Mittelmoräne des Unteraargletschers eine vom Abschwung bis nahe zum Gletscherende reichende, 7 Kilometer lange fast ununterbrochene Linie gezeigt werden, an der allenthalben Untermoränenmaterial austritt. Noch deutlicher liessen sich jedoch diese Verhältnisse am Hintereisferner feststellen,

[1]) Das Vorkommen von Untermoränenmaterial in Mittelmoränen hat zuerst Sévé am Justedalbrae bemerkt. Heim, Handbuch der Gletscherkunde, S. 359. Ferner: Brückner, Penck und v. Zittel, vergl. Brückner: Vergletscherung des Salzachgebietes, S. 26.

der eine vier Kilometer lange Mittelmoräne besitzt. Es war das um so unerwarteter, als mehrfache Bohrungen auf dem Rücken der Mittelmoräne keinen Schuttinhalt des darunter liegenden Eises ergaben. Der Grund liegt darin, dass die schuttführende Wand von so geringer Dicke ist, dass nur ein grosser Zufall sie auf der 20—80 m breiten Moräne finden lässt; ihre Mächtigkeit beträgt nämlich durchschnittlich nur 25—30 cm und dabei ist sie überaus scharf begrenzt, so dass nur ausnahmsweise ein Stein daneben im Eise steckt. Die Mittelmoräne ist durch Spalten an vielen Stellen aufgeschlossen und überall lässt sich die fast genau vertikal stehende Schmutzschicht erkennen, die augenscheinlich einen Bestandteil der als Bänderung [1]) zu bezeichnenden Struktur des Gletschereises bildet. Man gewinnt durchaus den Eindruck eines ungewöhnlich breiten stark schmutzdurchsetzten Blaubandes. Die auffallend deutliche Entwickelung der Bänderung in der Nachbarschaft der Schuttwand hängt wohl mit dem Umstande zusammen, dass die betreffenden Eispartien vor ihrer Vereinigung an der Schuttwand Bodenschichten waren, innerhalb welchen die grössten Geschwindigkeitsdifferenzen herrschen. Grosse Geschwindigkeitsdifferenzen sind aber der Ausbildung der Bänderung entschieden günstig. Nach oben gegen den Ursprung der Moräne unter den Felsen der Langtaufererspitze verbreitert sich, wie mein College Herr Prof. Dr. Heinke, der mich begleitete, durch sorgfältige Untersuchung gefunden hat, das Schmutzband auf ca. 60 cm und spaltet sich in drei, zwischen denen dunkle schuttfreie Eisschichten liegen. Erwähnung verdient noch das Aussehen der Linie, längs welcher das Schuttband austritt und welche gewissermassen die Schweissnaht der vereinigten Eisströme darstellt. Der frisch ausgeschmolzene Schutt unterscheidet sich durch einen breiigen, im trockenen Zustande staubigen Ueberzug von der durch den Regen gewaschenen älteren Schuttdecke der Moräne. Alle Steine von länglicher

---

[1]) In der Nomenklatur der Moränen und der Gletscherstruktur halte ich mich an die Vereinbarungen, welche auf der obengenannten Gletscherkonferenz getroffen wurden.

oder plattiger Form liegen mit ihrer Lang- bezw. Breitseite in der Ebene der Schuttwand und schmelzen hochkant gestellt aus.[1]) So markiert sich die Linie durch eine fortlaufende Reihe von halb im Eise steckenden Steinen in unnatürlicher Stellung. Der Verlauf der Linie ist ein überaus stetiger, nirgends ist man um einen halben Meter breit im Zweifel darüber; nur an sehr breiten und tiefen Spalten scheint sie manchmal um einige Decimeter verworfen zu sein. Die Regelmässigkeit der Erscheinung bewirkt, dass wenn man einmal darauf aufmerksam geworden ist, sie auch schon von weitem bemerkt und es ist mir schliesslich gelungen sie aus grosser Ferne (ca. 4 km) photographisch zu fixieren (vergl. Fig. 1). In dieser Entfernung sieht man natürlich nicht das Schmutzband selbst, wohl aber die durch sein Austreten bewirkte Anordnung des Schuttes. Auf dem Bilde ist auch der Umstand zu erkennen, dass die Linie nicht auf der Mitte des Moränenrückens verläuft, sondern weit gegen die Schattenseite hinausgerückt ist. Es legt sich eben die aus dem Eise auftauchende Schuttwand nach der Sonnenseite zu um und nach dieser Seite verbreitet sich der Schuttstreifen durch Abrutschen der Steine beim Unterschmelzen ihrer Basis weit mehr, als nach der Schattenseite. Sehr bezeichnend ist auch das Umbiegen der Linie gegen den Gletscherrand, wodurch das Ende des Langtaufererzuflusses gekennzeichnet ist. Unterhalb desselben ist der Hauptferner mit einem breiten Felde von Moränenschutt bedeckt, welches die Endmoräne des Langtaufererzuflusses darstellt. Diese Verhältnisse sind auf der Karte des Hintereisferners von Blümcke und Hess vorzüglich dargestellt. Die ausgeprägte Lage der Grenzlinie am Schattenrande des Moränenrückens und die mächtige Verbreiterung desselben nach abwärts von 20 auf 100 m, machen es sehr wahrscheinlich, dass der Schuttinhalt der Mittelmoräne in der

[1]) Diese Anordnung der Steine habe ich 1895 am Zufallferner gesehen, glaubte sie aber Bewegungsdifferenzen der benachbarten Eisströme zuschreiben zu müssen. Vergl. Die Gletscher der Ortlergruppe, Mitteilungen des D. u. Oe. Alpenvereins, 1896, S. 31. Penck fand sie am Wurtenkees in der Sonnblickgruppe, Zeitschrift d. D. u. Oe. A.-V., 1897, S. 69.

Hauptsache nach aus der Innenmoräne stammt und nicht direkt von den aperen Felsen der Langtaufererspitze, an denen sie den Ausgang nimmt. Wenn man bedenkt, dass die schuttführende Wand nach den Gletscherprofilen von Blümcke und Hess in den oberen Teilen eine Höhe von 250 m hat, kann man an der Möglichkeit dieser Herkunft nicht zweifeln.



Fig. 1. Die Mittelmoräne des Hintereisferners. Die weisse (retouchierte) Linie bezeichnet die Lage der Schweissnaht.

Eine letzte Reihe von Beobachtungen, welche die Richtigkeit der vorgetragenen Ansicht über den Zusammenhang von

Mittel- und Innenmoränen zu stützen geeignet sind, bezieht sich auf die Verteilung des Schuttes auf dem Moränenrücken. Am Langtaufererferner ist das Gestein in der ganzen Umrandung der Firnmulde so einförmig, dass keinerlei Unterschiede im Schutt zu bemerken waren. Anders liegt die Sache bei der grossen Mittelmoräne des Hochjochferners. Dieselbe beginnt in der Höhe von 2600 m mit einer Reihe vereinzelnter Platten, die in abenteuerlichen Stellungen, ausschliesslich hochkant aus dem Eise hervorragen. Weiter abwärts bildet sich der schuttbekleidete Moränenkamm aus, auf welchem die Schweissnaht der beiden Zuflüsse in der früher beschriebenen Weise deutlich zu erkennen ist. Infolge des S-förmigen Verlaufes der Moränenaxe wechselt die Sonnen- und Schattenseite des Rückens wiederholt, wobei sich die Naht getreu an der jeweiligen Schattenseite hält. Noch weiter abwärts, wo der Rücken schon eine ansehnliche Breite gewonnen hat, taucht in ca. 8 m Entfernung neben der ersten Schweissnaht und zwar auf der Sonnenseite eine zweite auf, welche ockergelben Schutt führt, der mit dem graubraunen Schutt, der der ersten Naht entstammt, stark kontrastiert. Der gelbe Schutt verbreitet sich ausschliesslich nach der Sonnenseite, da nach der Schattenseite zu die Böschung des Rückens aufwärts geht und er erreicht bald den sonnenseitigen Rand des graubraunen Schuttes, der fast ganz unter ihm verschwindet. Wenige hundert Meter oberhalb der Strandungsstelle der Moräne taucht innerhalb des gelben Schuttstreifens eine dritte Naht auf, die mehr rötliches Gestein in reicher Fülle liefert, das wiederum nach der Sonnenseite zu sich verbreitend den gelben Schutt überdeckt. Offenbar laufen im Innern des Gletschers in geringem Abstand drei Innenmoränen parallel einher, die von verschieden stark ausgeprägten Rücken aus verschiedenfarbigem Gestein herstammen. Die Innenmoränen ragen vom Grunde ab verschieden hoch in's Innere und kommen nacheinander zur Ausschmelzung, wie das in der schematischen Figur 2 angedeutet ist.

Hiernach erscheint auch die früher erwähnte Beobachtung Blümckes über die Streifen der regenerierten Moräne in neuem Lichte.

Von weittragendster Bedeutung ist die hier vertretene Ansicht von der Struktur der Moränen für die diluvialen Gletscher, wie Eduard Richter auseinandergesetzt hat.[1]) Die vielverzweigten Sammelgebiete der diluvialen Alpengletscher mussten eine grosse Zahl von Innenmoränen liefern, die aus deutlichem Untermoränenmaterial (gekritzten Geschieben und

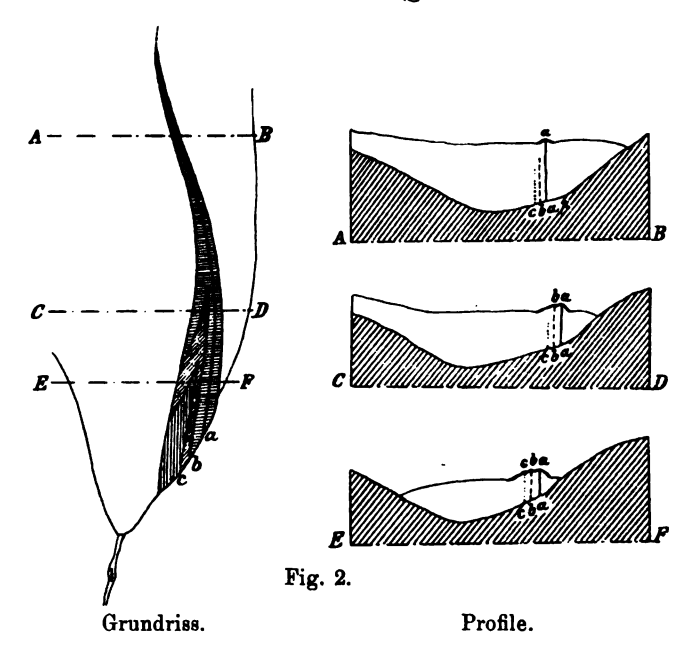


Fig. 2.

Schlamm) aufgebaut waren, da ja die Geschiebe, ehe sie in die Innenmoräne kamen, bereits einen weiten Weg am Gletschergrunde irgend eines Seitenthales zurückgelegt hatten. So erklären sich die Riesenmassen von Grundmoränenmaterial des alpinen Diluviums, ohne dass man genötigt wäre anzunehmen, dass die damaligen Gletscher wesentlich mächtigere Schichten von Untermoräne bewegt hätten als die heutigen.

[1]) Geomorphologische Untersuchungen in den Hochalpen. Ergänzungsheft 132 zu Petermanns Mitteilungen. S. 32.

Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 27. Dezember.)

Im folgenden soll unter $f(u)$ ein für allemal eine Function verstanden werden, welche keine „unendlich kleine" Periode d. h. in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Zahl von Perioden besitzt: eine Eigenschaft, welche bekanntlich jeder nicht constanten eindeutigen oder endlich-vieldeutigen analytischen Function eo ipso (aber nicht dieser Functions-Classe ausschliesslich[1])) zukommt. Für Functionen dieser Kategorie gilt dann bekanntlich der von Jacobi[2]) aufgestellte und bewiesene Satz, dass sie höchstens doppelperiodisch sein können. Jacobi's Beweis gründet sich auf die folgenden drei Theilsätze:

I. $f(u)$ kann niemals zwei Perioden ω_1, ω_2 mit reellem irrationalen Quotienten besitzen. Ist hingegen $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reell und rational, so lassen sich ω_1, ω_2 als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω darstellen. (A. a. O. § 1.)

---

[1]) So können auch unendlich-vieldeutige analytische Functionen die fragliche Eigenschaft besitzen (z. B. $\lg f(u)$), brauchen sie aber nicht zu besitzen (wie z. B. die Umkehrungsfunction eines Integrals u mit mehr als zwei Periodicitäts-Moduln). Vgl. im übrigen: Casorati, Acta math. T. 8 (1886), p. 344.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 13 (1835), p. 55—61 (= Ges. Werke, II, p. 25—32).

II. Sind ω_1, ω_2, ω_3 Perioden, welche paarweise kein reelles Verhältniss besitzen, so muss zwischen ihnen eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehen. (A. a. O. § 3.)[1])

III. Besteht zwischen irgend drei Perioden ω_1, ω_2, ω_3 mit paarweise nicht reellem Verhältniss eine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten, so lassen sich zwei Perioden ω, ω' angeben, derart dass: $\omega_\varkappa = m_\varkappa \omega + n_\varkappa \omega'$ ($\varkappa = 1, 2, 3$; $m_\varkappa$, $n_\varkappa$ ganze Zahlen bezw. Null). (A. a. O. § 2.)

Hieraus kann nun in der That gefolgert werden, dass jede endliche Anzahl von Perioden sich schliesslich immer auf eine bezw. zwei reduciren lässt. Aber, obschon das hierzu dienliche Verfahren unbegrenzt fortsetzbar erscheint, so ist doch nicht genügend ersichtlich, dass sich wirklich auch die Gesammtheit aller möglichen Perioden, welche ja unter allen Umständen aus einer unendlichen Zahlenmenge besteht, durch eine bezw. zwei specielle, eindeutig charakterisirte Perioden darstellen lässt. Mit anderen Worten, durch die Jacobi'sche Deduction wird die jeweilige Existenz primitiver Perioden noch keineswegs vollständig in Evidenz gesetzt, vielmehr ist hierzu wiederum noch eine besondere Betrachtung erforderlich.

Darnach erscheint es aber weit zweckmässiger, von vornherein die Existenz bestimmter primitiver Perioden festzustellen: die obigen Jacobi'schen Sätze resultiren sodann als ganz unmittelbare Folgerungen. Ein Verfahren dieser Art wurde von Weierstrass für den allgemeinen Fall von Functionen beliebig vieler Variabeln angegeben[2]) und von O. Bier-

[1]) Der sehr sinnreiche, aber etwas mühsame Algorithmus, den Jacobi zum Beweise dieses, den eigentlichen Schwerpunkt der ganzen Deduction bildenden Satzes anwendet, lässt sich auch durch eine wesentlich einfachere Grenz-Betrachtung ersetzen: s. z. B. Rausenberger, Theorie der periodischen Functionen (1884), p. 303, Nr. 7. — Thomae, Abriss einer Theorie der Functionen einer compl. Veränderlichen und der Thetafunctionen, 3. Aufl. (1890), p. 39, § 35.

[2]) Berl. Monatsber. 1876, p. 680 (= Math. Werke, II, p. 70).

mann auf den Fall einer einzigen unabhängigen Variabeln übertragen.[1])

Die folgende, auf einer anderen, principiell etwas einfacheren Auswahl[2]) der primitiven Perioden beruhende Darstellung dürfte den Vorzug grösserer Anschaulichkeit besitzen und gestattet überdies auch einen genauen Ueberblick über die verschiedenen, bezüglich der Anzahl und der Grössenverhältnisse jener besonderen Primitiv-Perioden vorhandenen Möglichkeiten. Der Vollständigkeit halber und, um die vollkommene Analogie in der Behandlung der einfachen und doppelten Periodicität deutlich hervortreten zu lassen, schicke ich auch die Betrachtung desjenigen Falles voraus, welcher den Jacobi'schen Satz I involvirt.

Lehrsatz I. Alle einer Function vom Charakter $f(u)$ zukommenden Perioden Ω, welche gegenseitig in *reellem* Verhältnisse stehen, lassen sich als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω_1 darstellen.

Beweis. Bedeutet Ω irgend eine beliebige Periode, so giebt es in Folge der über $f(u)$ gemachten Voraussetzung nur eine endliche Anzahl von Perioden mit einem absoluten Betrag $\leqq |\Omega|$ und somit auch eine endliche Anzahl von Perioden $\omega_\varkappa$, deren absoluter Betrag $|\omega_\varkappa|$ einen bestimmten, von Null verschiedenen Minimalwerth besitzt. Wird eine dieser letzteren willkürlich ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet, so hat man für alle möglichen $\omega_\varkappa$ die Beziehung: $\left|\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}\right| = 1$; da aber andererseits $\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}$ nach Voraussetzung reell ist, so folgt:

$$\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1} = \pm 1, \quad \text{d. h.} \quad \omega_\varkappa = \pm \omega_1.$$

---

[1]) Theorie der analytischen Functionen (1887), p. 368.

[2]) Noch anders (in wesentlich geometrischer Darstellung) bei Tannery et Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, T. I (1893), p. 143, Nr. 83.

Ist sodann Ω wieder eine ganz beliebige der zu ω_1 in reellem Verhältnisse stehenden Perioden, so lässt sich $\frac{\Omega}{\omega_1}$ stets und nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = m + \varrho,$$

wo m eine ganze Zahl und $0 \leqq \varrho < 1$. Darnach wäre aber:

$$\varrho\,\omega_1 = \Omega - m\,\omega_1 \quad \text{und zugleich} \quad |\varrho\,\omega_1| < |\omega_1|,$$

d. h. $\varrho\,\omega_1$ eine Periode mit kleinerem absoluten Betrage als ω_1, was unmöglich ist, solange $\varrho > 0$. Somit muss $\varrho = 0$ sein, worauf dann $\Omega = m\,\omega_1$ sich ergiebt.

Folgerungen. 1) Unter den Perioden von $f(u)$ können niemals zwei solche vorkommen, welche ein reelles irrationales Verhältniss besitzen.[1])

---

[1]) Will man dies noch ausdrücklich bestätigen, so kann man sich statt der von Jacobi benützten Kettenbruch-Entwickelung von $\frac{\omega'}{\omega}$ auch der noch elementareren Darstellung von $\frac{\omega'}{\omega}$ durch einen unendlichen Decimalbruch oder sonstigen systematischen Bruch bedienen. Angenommen man habe:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{b^\nu} \text{ irrational,}$$

(wo b eine natürliche Zahl $\geqq 2$, a_ν eine Folge ganzer Zahlen, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv voraussetzen kann), so wird für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_\nu + \varrho_\nu}{b^\nu}, \quad \text{wo: } 0 < \varrho_\nu < 1$$

also:

$$\varrho_\nu\,\omega = b^\nu\,\omega' - a_\nu\,\omega.$$

Die ϱ_ν sind sämmtlich von einander verschieden, da aus $\varrho_m = \varrho_n$ folgen würde:

$$b^m\,\omega' - a_m\,\omega = b^n\,\omega' - a_n\,\omega$$

d. h.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_m - a_n}{b^m - b^n}, \text{ d. h. rational.}$$

Es gäbe also in dem endlichen Bereiche $u = \varrho\,\omega$ $(0 < \varrho < 1)$ unendlich viele Perioden $\varrho_\nu\,\omega$, was der Voraussetzung widerspricht.

2) Besitzt $f(u)$ nur Perioden Ω mit reellem Verhältniss so ist $f(u)$ einfach periodisch, und die „primitive“ Periode von $f(u)$ ist eine der beiden nach Willkür zu wählenden Zahlen $\pm \omega_1$, für welche $|\omega_1|$ ein Minimum wird.

3) Da umgekehrt für jedes einfach periodische $f(u)$ alle Perioden-Quotienten reell (und rational) ausfallen müssen, so folgt weiter: Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ irgend zwei: $\omega = \xi + \eta i$, $\omega' = \xi' + \eta' i$ mit nicht-reellem Verhältniss:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\xi \xi' + \eta \eta'}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\xi \eta' - \xi' \eta}{\xi^2 + \eta^2} \cdot i, \quad \text{wo also: } |\xi \eta' - \xi' \eta| > 0,$$

so kann $f(u)$ nicht einfach periodisch sein. Um festzustellen, dass alsdann $f(u)$ genau doppelperiodisch sein muss, beweisen wir zunächst den folgenden

Hülfssatz. Sind ω, ω' Perioden von $f(u)$ mit *nicht-reellem* Verhältniss und ausserdem von der Beschaffenheit, dass ausser $h = \omega$ und $h = \omega'$ *keine* Zahl von der Form:

$$h = \varepsilon \omega + \varepsilon' \omega', \quad \text{wo: } \left.\begin{matrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \varepsilon + \varepsilon' \leqq 1$$

eine *Periode* von $f(u)$ bildet[1]), so lässt sich *jede* Periode Ω in der Form darstellen:

$$\Omega = m \omega + n \omega'$$

wo m, n ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten; ω, ω' heissen alsdann *primitive* Perioden.

Beweis. Zunächst lässt sich jedenfalls Ω (wie für jede beliebige Zahl durch Auflösung der betreffenden 2 Lineargleichungen folgt) stets und nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen:

$$\Omega = a \omega + b \omega' \quad (a, b \text{ reell bezw. Null}),$$

---

[1]) Diese Bedingung besagt geometrisch, dass im Innern und auf den Seiten des Dreiecks mit den Eckpunkten $0, \omega, \omega'$ keine Perioden ausser ω, ω' liegen sollen.

anders geschrieben:

$$\Omega = m\,\omega + n\,\omega' + k,$$

wo m, n ganze Zahlen (eventuell Null) und:

$$k = \vartheta\,\omega + \vartheta'\omega', \quad 0 \leq \left\{\begin{matrix}\vartheta \\ \vartheta'\end{matrix}\right\} < 1.$$

Da sodann $k = \Omega - m\,\omega - n\,\omega'$ eine Periode von $f(u)$ sein muss, so folgt aus der Voraussetzung, das keinesfalls

$$\vartheta + \vartheta' \leq 1$$

sein kann, ausser wenn:

$$\vartheta = \vartheta' = 0.$$

Wäre nun aber:

$$\vartheta + \vartheta' > 0 \quad (\text{andererseits: } \vartheta + \vartheta' < 2),$$

so hätte man:

$$\begin{aligned}(\omega + \omega') - k &= (1 - \vartheta)\cdot\omega + (1 - \vartheta')\cdot\omega' \\ &= \varepsilon\,\omega + \varepsilon'\,\omega',\end{aligned}$$

wo jetzt:

$$\varepsilon + \varepsilon' = 2 - (\vartheta + \vartheta')\left\{\begin{matrix}> 0 \\ < 1,\end{matrix}\right.$$

d. h. $(\omega + \omega') - k$ wäre eine Periode von der Art, deren Existenz auf Grund der Voraussetzung ausgeschlossen erscheint.

Hiernach kann also in der That nur $\vartheta = \vartheta' = 0$, also:

$$\Omega = m\,\omega + n\,\omega'$$

sein, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist. —

Lehrsatz II. Finden sich unter den Perioden Ω von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss und bezeichnet man mit ω_1 irgend ein Ω, für welches $|\omega_1|$ unter allen möglichen $|\Omega|$ ein *Minimum* ist; sodann mit ω_2 ein anderes Ω, für welches $|\omega_2|$ unter allen nach Ausscheidung von $\Omega = \nu\,\omega_1$ $(\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ übrig bleibenden $|\Omega|$ gleichfalls ein *Minimum* ist (wobei also $|\omega_2| \geq |\omega_1|$): so sind ω_1, ω_2 *primitive* Perioden.

Beweis. Es werde unter der (jedenfalls endlichen) Anzahl von Perioden Ω, deren absoluter Betrag einen gewissen von Null verschiedenen Minimalwerth r_1 besitzt, irgend eine beliebig ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet. Alsdann ist zunächst auch $-\omega_1$ eine Periode mit dem absoluten Betrage r_1. Im übrigen sind dann nur folgende zwei Fälle möglich:

Erster Fall. Es existiren ausser $\pm\omega_1$ noch andere Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Bezeichnet man eine derselben mit ω_2, so folgt leicht aus dem eben bewiesenen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich alle Zahlen h von der Form:

$$(1) \qquad h = \vartheta_1 \omega_1 + \vartheta_2 \omega_2, \quad \text{wo:} \left.\begin{matrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 \leqq 1,$$

so folgt zunächst für $\vartheta_2 = 0$, bezw. $\vartheta_1 = 0$, dass:

$$h = \vartheta_1 \omega_1 \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_2 \omega_2$$

wird, sodass unter diesen speciellen h nur die beiden folgenden:

$$h = \omega_1 \qquad h = \omega_2$$

Perioden sind. Ist dagegen $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} |h| &= |\omega_1| \cdot \left| \vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| \\ &< |\omega_1| \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

mit Ausschluss der Gleichheit, da $\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = 1$, aber $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ von $+1$ verschieden; also schliesslich:

$$|h| < |\omega_1| = |\omega_2| \text{ [1]},$$

sodass in Folge der Auswahl von ω_1 keine dieser Zahlen h eine Periode liefern kann: nach dem obigen Hülfssatze müssen also ω_1, ω_2 primitive Perioden sein.

Zweiter Fall. Es seien $\pm\omega_1$ die einzigen Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Man scheide dann aus der

[1] Dies ist übrigens geometrisch unmittelbar ersichtlich.

Gesammtheit der Ω alle diejenigen von der Form $\Omega = \nu\,\omega_1$ $(\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ aus: es sind dies nach Lehrsatz I alle möglichen, die überhaupt zu ω_1 ein reelles Verhältniss haben. Für die übrigbleibenden, die dann also zu ω_1 ein nicht-reelles Verhältniss haben (sodass auf Grund der Voraussetzung auch wirklich solche vorhanden sind) existirt dann wiederum ein gewisses Minimum r_2 des absoluten Betrages (wo also $r_2 > r_1$) und eine endliche Anzahl von Ω, für welche $|\,\Omega\,| = r_2$ ist. Wird dann irgend eine von diesen mit ω_2 bezeichnet, so sind ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich wiederum alle Zahlen h von der Form (1), so folgt zunächst für $\vartheta_1 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2,$$

sodass also unter diesen h nur $h = \omega_2$ eine Periode ist (denn $\pm\,\omega_1$ besitzt ja zu ω_2 kein reelles Verhältniss, ist also nicht von der Form $\vartheta_2\,\omega_2$). Ist aber $\vartheta_1 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} |\,h\,| &= |\,\omega_2\,| \cdot \left|\,\vartheta_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \vartheta_2\,\right| \\ &< |\,\omega_2\,| \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \qquad \left(\text{wegen: } \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| < 1\right) \\ &< |\,\omega_2\,|. \end{aligned}$$

Da es aber ausser $h = \omega_1$ keine Periode h giebt, welche den Bedingungen $\vartheta_1 > 0$, $|\,h\,| < |\,\omega_2\,|$ genügt, so folgt wieder aus dem obigen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden sind. —

Folgerungen. 1) Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss, so ist $f(u)$ genau doppelperiodisch: es giebt also keine drei- und mehrfach periodischen $f(u)$.

2) Zwischen irgend drei der Function $f(u)$ zukommenden Perioden mit paarweise nicht-reellem Verhältniss findet eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten statt.

Zwei specielle primitive Perioden, wie die oben näher charakterisirten und mit ω_1, ω_2 bezeichneten, mögen Minimal-Perioden genannt werden. Aus den bisherigen Betrachtungen geht dann nur soviel hervor, dass es jedenfalls nur eine endliche Zahl solcher Minimal-Perioden geben kann. Um deren mögliche Anzahl genauer festzustellen, stützen wir uns auf den folgenden bekannten Satz:

Sind ω, ω' primitive Perioden, so sind

$$\tilde{\omega} = \alpha\,\omega + \beta\,\omega', \quad \tilde{\omega}' = \gamma\,\omega + \delta\,\omega'$$

dann und nur dann gleichfalls primitive Perioden, wenn α, β, γ, δ ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten, welche der Beziehung genügen:

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \pm 1.$$

Hieraus folgt speciell, wenn man einmal $\alpha = 1$, $\beta = 0$, also $\delta = \pm 1$, γ beliebig, das andere Mal $\gamma = 0$, $\delta = 1$, also $\alpha = \pm 1$, β beliebig annimmt:

Bilden (ω, ω') ein primitives Periodenpaar, so sind alle primitiven Paare, bei welchen eine der Perioden ω bezw. ω' beibehalten wird, in der Form enthalten:

$$(1)\quad (\omega, \gamma\,\omega \pm \omega') \text{ bezw. } (\pm\omega + \beta\,\omega', \omega') \left(\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\Big).$$

Umgekehrt ist jedes solche Periodenpaar ein primitives.

Mit Hülfe dieses letzteren Resultates können wir jetzt den Lehrsatz II, nach welchem — abgesehen von dem noch beliebig bleibenden Vorzeichen — mindestens zwei Minimal-Perioden existiren, in folgender Weise ergänzen.

Lehrsatz III. Es giebt, abgesehen von dem noch willkürlich bleibenden Vorzeichen, *höchstens drei* Minimal-Perioden, d. h. drei paarweise in nicht-reellem Verhältnisse zu einander stehende, noch nach Willkür mit beliebigem Vorzeichen zu versehende Perioden ω_1, ω_2, ω_3, die der Bedingung genügen:

$$|\,\omega_1\,| \leq |\,\omega_2\,| = |\,\omega_3\,|,$$

während ausser $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$ *keine* Periode Ω existirt, für welche:

$$|\Omega| < |\omega_2|.$$

Zugleich bildet dann, ausser (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3), auch (ω_2, ω_3) ein *primitives* Perioden-Paar.[1])

Beweis. Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der zuletzt ausgesprochenen Behauptung. Im Falle $|\omega_2| = |\omega_1|$ folgt dieselbe unmittelbar aus Lehrsatz II, da man in diesem Fall für ω_1, ω_2 ohne weiteres auch ω_2, ω_3 substituiren kann.

Sei nun $|\omega_2| > |\omega_1|$. Da ω_3 eine Periode und (ω_1, ω_2) ein primitives Periodenpaar, so hat man jedenfalls:

$$\omega_3 = m\,\omega_1 + n\,\omega_2, \tag{2}$$

wo m, n ganze Zahlen und beide von Null verschieden. Dabei kann man ω_3 aus den beiden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen, zur Verfügung stehenden Zahlen so auswählen, dass $m > 0$. Zugleich mag dann auch unter ω_2 gerade diejenige der beiden in Betracht kommenden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen Zahlen verstanden werden, für welche $n > 0$. Sind jetzt ω_3, ω_2 in dieser Weise normirt, so lässt sich wiederum zeigen, dass ausser ω_2, ω_3 keine Periode h von der Form existirt:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2 + \vartheta_3\,\omega_3, \quad \text{wo: } \left.\begin{matrix}\vartheta_2\\ \vartheta_3\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \vartheta_2 + \vartheta_3 \leqq 1. \tag{3}$$

Man hat zunächst wieder für $\vartheta_3 = 0$, bezw. $\vartheta_2 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2, \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_3\,\omega_3,$$

sodass unter diesen besonderen h sich thatsächlich nur die beiden Perioden

$$h = \omega_2, \quad h = \omega_3$$

vorfinden. Ist sodann $\vartheta_2 > 0$, $\vartheta_3 > 0$, so wird:

---

[1]) Für (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3) folgt dies aus Lehrsatz II.

$$|h| = |\omega_2| \cdot \left| \vartheta_2 + \vartheta_3 \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \right|$$

$$< |\omega_2| \cdot (\vartheta_2 + \vartheta_3) \qquad \text{(mit Ausschluss der Gleichheit)}$$

$$< |\omega_2|.$$

Die einzigen Perioden, deren absoluter Betrag $< |\omega_2|$ ist, sind aber $\pm \omega_1$. Und da aus Gl. (2) folgt:

$$\omega_1 = -\frac{n}{m}\omega_2 + \frac{1}{m}\omega_3, \quad -\omega_1 = \frac{n}{m}\omega_2 - \frac{1}{m} \cdot \omega_3$$

(wo $m > 0$, $n > 0$), so kommen $\pm \omega_1$ unter den Zahlen h nicht vor. Somit giebt es ausser $h = \omega_2$, $h = \omega_3$ keine Periode h von der Form (3), und (ω_2, ω_3) bilden daher nach dem bewiesenen Hülfssatze ein primitives Periodenpaar.

Da nun ausser (ω_3, ω_2) auch (ω_1, ω_2) ein primitives Periodenpaar bilden, so hat man nach (1):

$$\omega_3 = \pm \omega_1 + \beta \omega_2,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = \omega_1 + n \omega_2 \quad (n \geqq 1). \tag{4}$$

Andererseits bilden aber auch (ω_1, ω_3) und (ω_1, ω_2) je ein primitives Periodenpaar, und man hat daher nach (1):

$$\omega_3 = \gamma \omega_1 \pm \omega_2,$$

also wiederum mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = m \omega_1 + \omega_2 \quad (m \geqq 1). \tag{5}$$

Die Vergleichung von (4) und (5) zeigt dann, dass:

$$m = 1, \quad n = 1$$

sein muss, d. h. man findet schliesslich:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \tag{6}$$

als den einzig möglichen Werth von ω_3. Damit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz. Man überzeugt sich leicht, dass der durch Gl. (6) und die Beziehung $|\omega_3| = |\omega_2|$ charakterisirte mögliche Fall auch wirklich eintreten kann. Ist $|\omega_2| = |\omega_1|$, so erscheint als Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_1, \omega_3, \omega_2$ ein Rhombus, welcher durch die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt. Ist $|\omega_2| > |\omega_1|$, so besitzt das betreffende Parallelogramm nur die Eigenschaft, dass die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ der grösseren Seite $\overline{0\,\omega_2}$ gleich ist. Dagegen ist dann das (gleichfalls primitive) Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_2$ ein rhombisches.

Ueber Entstehung und Wachstum der Kieselgebilde bei Spongien.

Von Dr. **Otto Maas.**

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

(Mit Taf. V.)

Die Kenntnis von dem Entstehen und Wachstum der Kalknadeln der Schwämme hat in letzter Zeit erhebliche Fortschritte gemacht; für die Kieselnadeln aber stehen wir noch auf dem Standpunkt wie die ersten wirklich histologischen Schwammuntersuchungen. Es ist für Monactinelliden seit Lieberkühn (56) bekannt, dass die erste Entstehung einer stabförmigen Skeletnadel (Makrosklere) innerhalb einer einzigen Zelle stattfindet; auch für die Fleischnadel (Mikrosklere) ist das in einer Reihe von Fällen nachgewiesen (Sollas 80). Bei Tetractinelliden hat F. E. Schulze (80, 81) den Ursprung der kleinen vierstrahligen Nadel ebenfalls in einer Zelle abgebildet, und Sollas behauptet, allerdings ohne, oder so gut wie ohne Abbildungen in seinem Werk über die Challenger-Tetractinelliden (88), dass die Nadeln sämtlich, Mikro- wie Makroskleren, in Zellen gebildet werden. Ueber das weitere Wachstum der Nadeln, die ja unter Umständen eine bedeutende Grösse erreichen, und über das Schicksal der Nadelbildner (Skleroblasten), ist so gut wie nichts bekannt. Von manchen Autoren wird vermutet, dass später noch weitere formative Elemente zu dem ersten Skleroblast treten können; in andern Fällen aber, namentlich wo die fertige Nadel eine gewisse Grösse nicht überschreitet, konnte man noch den ursprüng-

lichen Nadelbildner auch für das ganze übrige Wachstum der Nadel verantwortlich machen. Es ist von mir für solche mässig grossen Einstrahler nachgewiesen worden (90), dass die ursprüngliche Bildungszelle ihnen, allerdings sehr blass und in die Länge gezogen, noch anhängt, wenn sie $^1/_2$ mm, also nahezu ihre definitive Grösse, erreicht haben, und keine weitere Zellen, auch nicht epithelartig, an ihnen wahrzunehmen sind. Für die Schaufelnadeln der Esperia fand ich dagegen eine Reihe regelmässig gelagerter Kerne (92), je zwei am Stiel und an der Schaufel, ohne bei der Kleinheit der Objecte den Ursprung und das weitere Schicksal näher verfolgen zu können. Auch bei Sollas, der doch die Meinung hat, dass jeweils eine Zelle genüge, finden sich, wie Minchin (98) hervorhebt, Bilder, wo mehrere Zellen an den extrem grossen Nadelschäften liegen.

Die Knospen von Tethya schienen mir ein günstiges Object, um diesen Fragen näher zu treten. Es muss hier eine reichliche Neubildung von Nadeln eintreten, und diese Nadeln gehören zu dreierlei Formen. Es kommen vor: 1) grosse Stabnadeln des Skelets mit etwas verdicktem Ende, sog. Keulen, Style, die wegen des mitunter kolbig abgesetzten Endes auch als Tylostyle bezeichnet werden könnten, 2) kleine sternförmige Fleischnadeln, zumeist an der Oberfläche und an der Wand der einführenden Lacunen, aber auch sonst im Parenchym. Sie werden meist als Chiaster bezeichnet, sollten aber der knorrigen Strahlenenden wegen eher Tylaster heissen. 3) Grössere Sterne mit massigerem Centrum in der tieferen Rinde, als Sterraster, Oxyaster, oder besser als Spheraster bezeichnet.

Es gelang mir an der Küste von Cypern auf einer Reise, die ich der Munificenz der hiesigen Akademie der Wissenschaften verdanke, u. A. auch sehr viele Entwicklungsstadien einer Tethya (wahrscheinlich spec. lyncurium, wie im übrigen Mittelmeer) zu sammeln, und nicht nur wie bisher sichbildende und ablösende Knospen, sondern auch die weiteren Stadien, deren Ansetzen im Aquarium nicht gelingt, auf der Unterseite von Uferfelsen als Krusten von einigen Millimeter Durchmesser in grosser Anzahl frei zu finden. Es ist seit den Mitteilungen

von Deszö (79 u. 80) nichts näheres über die Knospenentwicklung der Tethyen bekannt geworden; dessen Angaben sind aber noch weit primitiver, als die Zeit der Abfassung, wo schon eine Anzahl der F. E. Schulze'schen ausgezeichneten Monographien vorlag, rechtfertigen könnte, so dass sie auch von Minchin (98), der sonst eine so genaue Litteraturübersicht giebt, wohl absichtlich und mit Recht ignoriert werden. Die kleinen wie die grossen Sterne sollen in einer Zelle entstehen, letztere gleich in ihrer ganzen Grösse in einer „Riesensternzelle“; der Kern soll sich dabei zum Spiculum umwandeln! Abbildungen dafür werden nicht gegeben.

Ueber die Gesamtentwicklung der Knospen, speziell über die Bildung des Canalsystems und der Geisselkammern möchte ich mir ausführlichere Mitteilung vorbehalten und an dieser Stelle nur in Kürze über meine Befunde betreffs der Nadelentstehung berichten.

Am leichtesten ist die Bildung der kleinen Chiaster zu verfolgen. Sie liegen in Massen an der Oberfläche in einer Schichtdicke von mehreren Exemplaren und bilden so eine dichte Decke auch an der Knospenhervorwölbung. Bei deren Freiwerden aber wird die Decke nicht mit herübergenommen, die Knospe ist keine einfache Sprossung, die alle Gewebe bereits fertig aus dem Mutterschwamm übernimmt (was gegen die Auffassung verschiedener Autoren schon hier hervorgehoben sein mag), sondern eine richtige Neubildung aus indifferentem Material. Die Nadelschicht der Mutter platzt, und die junge Knospe ist nackt oder doch nur sehr spärlich hie und da an der Oberfläche mit einem Chiaster versehen, so dass alsbald eine reichliche Neubildung derselben stattfinden muss. In der That sind deren Mutterzellen sehr zahlreich in der Knospe zu sehen und treten namentlich mit gewissen Doppelfärbungen (Haematoxylin-Congorot, Carmin-Anilinblau) durch ihre regelmässigen Einlagerungen schön hervor. Es sind kleine (etwa 15 μ im Durchmesser haltende) Elemente, die sich nahe der Oberfläche sammeln. Sie gehören, um der jetzt gangbaren Einteilung zu folgen, zu den differenzierten Zellen der dermalen

Schicht; sie zeigen nicht den verhältnismässig grossen bläschenförmigen Kern mit Nucleolus der indifferenten Zellen (Archäocyten), sondern ein dichtes Chromatinnetz, so dass der kleine Kern öfters fast homogen erscheint. Ihr Protoplasma ist dicht und mit sehr gleichmässigen Granulationen überall durchsetzt; der Zellleib ist von einer deutlichen, ziemlich derben Membran umschlossen, so dass sie ein blasiges, pflanzenzellenähnliches Aeussere gewinnen, namentlich wenn später die Granulationen schwinden. Ihre Gestalt ist demzufolge nicht wechselnd, sondern kugelig resp. oval (Fig. 2[a]). Des öfteren kann man auch die Mutterzellen solcher Chiasterbildungszellen sehen (Fig. 1); sie sind von etwa doppelter Grösse, ebenso von Körnern erfüllt und membranumhüllt; häufig sind Karyokinesen in ihnen zu erkennen, so dass dem letzten Stadium vor Beginn der Kieselausscheidung eine rege Zellteilung vorauszugehen scheint.

Die Bildung der Chiaster selbst muss sehr rasch erfolgen; denn man sieht fast nur solche körnererfüllte Bildungszellen neben ebenso membranösen mit klarem Plasma, die bereits einen fertigen Stern mit allen Strahlen umschliessen (Fig. 3) in bunter Mischung durcheinanderliegen. Zwischenstadien sind selten, kommen aber bei der Menge der Bilder doch zur Erscheinung. Die ersten Andeutungen sind (Fig. 2) einzelne Radiärbälkchen, meist ganz unsymmetrisch nur von einer Seite, mit dem Kreuzungspunkt in der Nähe des Kerns. Die Granulationen sind bereits vermindert und schwinden um so mehr, als Chiasterstrahlen gebildet werden, bis schliesslich, nach Ausbildung des Sterns, die ganze Zelle glasig hell ist und der Kern sehr deutlich hervortritt. Der Chiaster charakterisiert sich durch den Mangel eines eigentlichen Centrums, nur durch das Zusammentreffen der Radiärbälkchen selbst entsteht ein Mittelteil; die Bälkchen sind in der Mitte nicht stärker, sondern gleichmässig; eher nehmen sie nach der Peripherie etwas zu und können da leicht geknöpft sein, oder eine etwas höckerige Oberfläche zeigen. Es hängt dies damit zusammen, dass zuletzt nur an der Peripherie der Zelle die Kieselausscheidung vor sich geht, und hier auch noch die letzten Granulationen im

Plasma zu sehen sind. Der Stern spannt alsdann die kugelige Zelle und bringt sie in eine mehr unregelmässige, polygonale Gestalt (Fig. 2^{III}), bis sie schliesslich nachgiebt, den Stern freilegt und selbst nur noch locker anliegt (Fig. 2^{IV}), infolge dieser Zusammenziehung aber wieder mehr tingierbar geworden. Was schliesslich aus der Bildungszelle wird, ob sie zu Grunde geht oder eine gewöhnliche Dermalzelle wird, ist nicht sicher; wahrscheinlich ist das letztere. Man sieht den Sternbildungsprocess an Zellen vor sich gehen, die ganz an der Oberfläche der Knospe liegen, dicht neben andern, die gewöhnlichen Dermalcharakter haben. Ein prinzipieller Gegensatz zwischen epithelialer Deckschicht und Spiculaschicht (resp. Chiasterschicht) ist auch hier, wenigstens in diesem Stadium, nicht zu machen.

Ausser diesen gewöhnlichen Chiastern finden sich im erwachsenen Schwamm, häufig im Parenchym der Rindenschicht, weniger an der Oberfläche und an den Wandungen der Canäle wie die ebengenannten Chiaster, eine andere Kategorie etwas grösserer Chiaster, bei denen auch der Centralkörper ein wenig mehr ausgebildet ist. Sie haben etwa die halbe Grösse der später zu besprechenden Spheraster, sind aber von diesen durch die Form (dünne Strahlenbälkchen und kolbig zunehmende, nicht zugespitzte Enden) auf allen Phasen deutlich verschieden. Meist haben sie einige Strahlen mehr wie die gewöhnlichen Chiaster, es kommen aber auch solche mit auffallend wenig z. B. nur 5 Strahlen vor (Fig. 4^{III}). Ihre Bildung geschieht in ähnlich beschaffenen nur etwas grösseren Zellen, wie die der übrigen Chiaster (Fig. 4^{I}); man hat sich zu denken, dass die vorhererwähnte Mutterzelle der Skleroblasten ihre letzten Teilungen unterlassen hat, resp. dass die Kieselausscheidung früher beginnt, als die letzte Teilung einsetzt. Mitunter sieht man die Teilung, wenigstens im Kern, noch nachträglich geschehen und man sieht alsdann solch grössere Chiasterzellen mit zwei Kernen (Fig. 4^{II}). Ob dies und die ganze Bildung der grösseren Chiaster, die immerhin ziemlich selten sind, ein normales Verhalten ist oder ob es sich blos um eine verfrühte Ausscheidung der Kieselsubstanz handelt, vermag ich nicht zu sagen.

Jedenfalls erklärt sich aus ihrem Vorkommen eine grössere Variabilität der Chiaster in Strahlenzahl etc., wie sie auch von Lendenfeld angegeben wird (96), während Topsent für die Chiaster eine ziemliche Constanz behauptet (1900), was nur für deren typische kleinere Form zutrifft.

Ganz anders vollzieht sich die Bildung der so viel mal grösseren Spheraster. Sie haben weder genetischen Zusammenhang noch sonst Beziehung zu den Chiastern; Topsent bemerkt sehr scharf, dass „pas de passage" zwischen beiden, und schon Deszö behauptet, dass sie selbstständigen Ursprungs sind, lässt sie aber merkwürdigerweise gleich in ihrer ganzen Grösse aus „Riesensternzellen" hervorgehen, trotzdem Zellen von solchem Umfang weder im erwachsenen Schwamm, noch in der Knospe vorkommen. Selbst die eiartigen Zellen erreichen noch nicht die Hälfte des Durchmessers eines Spherasters. Dass es auch kleine Spheraster giebt, ist ihm wie es scheint, gänzlich entgangen und wie es scheint, auch den meisten übrigen Autoren. Lendenfeld und Topsent haben zwar beide eine gewisse Grössenvariabilität unter diesen Nadeln gefunden (von 50 bis 120 μ bei ersterem, von 40 μ bis zu 110 μ bei letzterem), was aber auf individuelle Verschiedenheiten geschoben wird; die kleinen und kleinsten Formen aber, die in allen Abstufungen von grossen an vorhanden sind und noch an Grösse unter die kleinen Chiaster heruntergehen können (also Formen von 50 bis nur 10 μ) und weniger, finde ich nirgends erwähnt oder abgebildet. Immer aber sind auch diese kleinen und kleinsten Spherasterformen an Gestalt durchaus von den Chiastern verschieden, und eine Verwechslung ist auf keinem Stadium möglich. Immer ist ein verhältnismässig starkes, mehr oder minder kugeliges Centrum entwickelt, die Strahlen sind viel zahlreicher, als bei den Chiastern und sind im Gegensatz zu diesen nach der Peripherie zu verjüngt resp. zugespitzt, nach der Mitte zu verdickt, so dass sie oft unmerklich ins Centrum übergehen. Schon die kleinsten Spheraster zeigen deutlich diese charakteristische Form (Fig. 7 u. 11).

Wie geht nun deren Entstehung vor sich? Die zur Ab-

lösung reifen Knospen enthalten gewöhnlich schon eine beschränkte Anzahl ganz fertiger, grosser Spheraster, daneben lassen sich eine Reihe von Bildungsstadien wahrnehmen. Noch zahlreicher sind sie aber zu sehen, wenn die Hervorwölbung der Knospe an der Mutter erst beginnt, und sich das mütterliche Gewebe zur Ausprägung der Knospenelemente erst anschickt (wovon an anderer Stelle noch zu berichten sein wird). Dann finden sich unter den grossen und kleineren Spherastern der Rinde, die hier eine Lage bilden, und auf die die Grössenangaben der Autoren passen, im Mark grosse Mengen kleiner und kleinster Spheraster in allen Abstufungen bis zu 5 μ, und bei weiterem Suchen entdeckt man auch ihre Bildungszellen und sieht solche mehrzackigen Gebilde noch innerhalb von Zellen liegen.

Auch die Zellen, die hier die Bildung besorgen, sind anderer Art als bei den Chiastern; sie sind nach Plasma- und Kernstructur als undifferenzierte Elemente (Archäocyten ähnlich) anzusprechen, besitzen einen Nucleolus im bläschenförmigen Kern, ihr Plasmaleib ist nicht scharf conturiert, gewiss nicht von einer Membran umgeben. Die erste Anlage des Concrements scheint innerhalb einer Vacuole zu erfolgen und ist kugelig (Fig. 5 u. 31), dann sieht man mehrere (zwei, drei) Zacken davon ausgehen. Gar nicht selten aber sind typische, vierstrahlige Nadelformen innerhalb einer Zelle zu sehen, richtige Tetractine oder Kalthropsnadeln, nur dass die Strahlen naturgemäss recht kurz im Verhältnis zu ihrem Vereinigungscentrum sind (Fig. 6). Es sind dies Stadien, die durchaus an die Bilder und Angaben erinnern, die F. E. Schulze für Plakina und Corticium, also für typische Tetractinelliden, über die Anlage der Nadeln gebracht hat. (80 u. 81.)

Wie sind nun aber die kleinen Sternchen mit mehr als vier, ja vielen Zacken, mit diesen Tetractinen in Beziehung zu bringen? Es könnte scheinen, als bestünde gar keine solche, da sich mitunter schon ein sehr frühes Stadium in einer Zelle kugelig mit kleinen Zacken darstellt (Fig. 7), so dass nachher nur ein Weiterwachsen in gleichem Sinne zu erfolgen hätte,

und die Tetractine (Fig. 6 bis 10) seitab stehende Bildungen wären. Das ist jedoch nicht der Fall. Die kleinen Sterraster zeigen nämlich zwei und dann mehr Kerne resp. Zellen an ihren Strahlen anliegen. In mehreren Fällen kann man sehr gut erkennen, dass sich zwei Tetrastermutterzellen mit ihren Nadeln zusammenlegen, und dann die Tetractine selbst verschmelzen. Hierbei kommt, da ja die Strahlen nur kurz sind, ein ziemlich massiges Gebilde mit annähernd kugeligem Centrum und 8 kleinen Strahlen zu Stande, der Ausgangspunkt für das weitere Spherasterwachstum (Fig. 11). Man kann öfters die beiden Tetractine noch teilweise getrennt, teilweise mit ihren Kiesellagern verschmolzen beobachten (Fig. 8, 9, 10); namentlich deutlich werden diese Bilder, wenn die beiden Zellen mit ihren Hartgebilden nicht direkt untereinander, sondern schräg ins Gesichtsfeld zu liegen kommen (Fig. 33) und ferner dann, wenn ein Tetractin im Gegensatz zum gewöhnlichen Verhalten, wo beide auf gleichem Grössenstadium zu einander geschmolzen werden, dem andern in der Entwicklung schon etwas voraus ist.

Das Resultat der Verschmelzung bildet sozusagen den formbestimmenden Ausgangspunkt. Weitere richtige Tetractine scheinen mir jetzt nicht mehr dazu zu kommen, sondern jetzt nur eine Vergrösserung durch Auflagerung von neuen Kieselschichten zu erfolgen, die von einer Anzahl Bildungszellen besorgt wird. Ob letztere durch Teilung der beiden ersten entstehen, oder sich durch Hinzukommen neuer Elemente aus dem Parenchym recrutieren, ist die Frage. Es scheint das letztere der Fall zu sein, da man kaum und nur bei grossen Spherastern in den letzten Stadien Karyokinesen sieht, dagegen jetzt und später viele Bilder, wo deutlich Zellen vom Charakter der Spiculabildner aus dem Parenchym an das bestehende Kieselgebilde hinwandern. Man sieht solche Zellen von unregelmässiger Form, ziemlich kleinem Plasmakörper (etwa halb so gross wie die ersten Bildungszellen) mit regelmässigen Granulationen bei einiger Aufmerksamkeit fast an jedem unausgewachsenen Spheraster in grösserer oder geringerer Zahl (Fig. 11

bis 17). Sie liegen an verschiedenen Stellen, bald mehr am kugeligen Centrum angehäuft, bald sich deutlich den Strahlen anschmiegend und diese einhüllend, bald um den Grund der Strahlen herumgebogen. Das Grössenwachstum betrifft dementsprechend bald mehr den centralen Körper, bald mehr die Strahlen und zwar mit einer gewissen Regelmässigkeit abwechselnd, so dass die daraus resultierenden Spherasterbilder, die im Lauf der Entwicklung auftreten, ziemlich verschieden sind und manchmal mehr als Oxyaster, wenn die spitzen, breitbasigen Strahlen überwiegen (Fig. 15), darnach wieder als Spheraster (Fig. 16), vorher beinahe als Sterraster (Fig. 12) bezeichnet werden konnten. Die letzten Phasen scheinen sich mit starker Ausprägung und Verlängerung der Strahlen zu befassen; ein Strahl besitzt dann etwa die Länge des Durchmessers des Centralkörpers, so dass vom Gesamtdurchmesser nur $^1/_3$ auf das Centrum, $^2/_3$ auf die Strahlen kommt (Fig. 17).

Die Bildungszellen liegen dann fast sämtlich an den Strahlen selbst. Hierfür wie für die Darstellung der Skleroblasten überhaupt erhält man recht instructive Bilder bei vorsichtiger Auflösung des Kieselskelets am ganzen Stück durch Einwirkung von Fluorwasserstoffsäure, ein Verfahren, das auch sonst zur Erlangung von Serienschnitten unerlässlich ist. Es verdient Hervorhebung, dass die mit Sublimatalkohol-Eisessig, Sublimatalkohol, überhaupt alle mit Sublimat behandelten Stücke sich hierfür viel günstiger erwiesen, als die mit Alkohol, mit Pikringemischen etc. behandelten, wo stets das Gewebe unter der Fluorwasserstoffsäure mitlitt. Dagegen ergaben die mit Sublimat etc. erhärteten Exemplare bei vorsichtiger Einwirkung (1—2 % Lösung von Fl H in Wasser 4—5 Tage lang in paraffinierten festschliessenden Glasdosen) histologisch noch durchaus tadellose Bilder, an denen sogar das Erkennen von Karyokinesen, das ja bei Schwämmen überhaupt nicht leicht gelingt, noch gut möglich war. Man sieht an Stelle der Spheraster ihre „Schatten", (Fig. 18 u. 19), und kann dann gerade an solchen leichten Stellen, während sonst durch Kleinheit der Zellen der Schnitt leicht zu dick erscheint, die Zellen ohne Verwechselung mit

drüber- und drunterliegenden Elementen gut studieren und die Bildungszellen viel besser sehen, als zwischen den Gruben und Spitzen des intacten Spherasters. An den fertigen Stadien ist der organische Mantel öfters an den Stellen, wo Strahlen abgehen durchbrochen (Fig. 18), so dass die Strahlen frei herausragen; an andern Stellen aber überziehen die Bildungszellen die Strahlen bis zum spitzen Ende. Gerade solche langgestreckten spindelförmigen Elemente schmiegen sich dem Strahl in ganzer Länge an. Wenn die Strahlen und auch der Centralkörper der Zellen schliesslich entbehren, so ist nach vielen Bildern amöboider Skleroblasten anzunehmen, dass sie nicht zu Grunde gehen, sondern wieder ins Gewebe zurückwandern.

Was die Entstehung der Einstrahler (Style) betrifft, so geht sie auch im erwachsenen Schwamm noch beständig vor sich, wie schon daraus ersichtlich ist, dass sich Stabnadeln jeder Grösse und Dicke dort finden können (Fig. 26, 27, 28); aber die kleinen Formen sind doch immer nur in verschwindender Minderzahl vorhanden. Die Bildung kann daher am besten in Nadeln der Knospe studiert werden (Fig. 25), wo nach dem Festsetzen eine sehr reichliche Ausscheidung zur Erzielung der radiären Skeletbündel stattfindet, teilweise auch in ganz frühen Stadien, wenn das Muttergewebe sich zur Knospenbildung anschickt.

Die Zellen, in denen die Stabnadeln gebildet werden, sind bedeutend grösser als die Mutterzellen der Spheraster, gehören aber sonst nach Plasma und Kerne zur gleichen Kategorie der „undifferenzierten“ Zellen des Parenchyms (Fig. 20 bis 22). Die Körnelung ist hier eine sehr ungleiche, sowohl was die Grösse der einzelnen Körner als, was ihre Verteilung betrifft; oft sieht man die Granulationen in mehreren wohlabgegrenzten kugeligen Aggregaten vermehrt angehäuft (Fig. 20), in andern Fällen sind sie diffus verteilt. Es treten dann gewöhnlich auch mehrere Kieselconcremente gleichzeitig auf (Fig. 22) untereinander von ungleicher Grösse, alle von mehr oder minder kantiger Form. Einen extremen Fall stellt Fig. 21 dar, wo die Kieselanhäufung besonders reichlich ist, vielleicht ebenfalls

zu früh eingetreten ist, ehe die Mutterzelle ihre letzten Teilungen gemacht hat. Dass es sich bei diesen Bildern nicht um Kunstprodukte, hervorgerufen durch Schnittführung oder Reagentien handelt, brauche ich wohl nicht zu betonen. Normalerweise finden sich weniger Concremente (Fig. 22), die sehr bald noch innerhalb der Zelle zu einem kleinen Stäbchen verschmelzen (Fig. 23). Bald darauf zeigen sich an dem Stäbchen, noch ehe es sehr viel weiter gewachsen ist, mehrere Bildungszellen. Es ist dies ein von den gewöhnlichen Monaxonien abweichendes Verhalten; aber in deren Fall bleibt es auch bei e i n e r Zelle und bei einer beschränkten Länge der Nadel, während hier die Stabnadeln verhältnismässig gigantische Proportionen erreichen und sich deswegen schon früh mit einem epithelialen Belag zur Kieselausscheidung versehen.

An sehr vielen der jungen Nadelbündel sieht man an den einzelnen Stabnadeln solche epithelartig angeordneten Zellen, die nicht zu verwechseln sind mit amöboiden und faserigen Zellen, die die Gesammtbündeln sonst begleiten. Am besten und unzweideutigsten werden auch hier die Bilder nach Auflösung der Kieselsubstanz durch Fluorwasserstoff, wo dann an Stelle der grossen Nadeln lange hohle Röhren zurückbleiben. Sie zeigen deutlich die organische Bekleidung, die mit verschiedenen Färbemitteln eine leichte Tinction zulässt (Fig. 29 und 30). Auf diesem organischen „Rock“ sieht man dann die Bildungszellen in Strängen angeordnet liegen, kenntlich an der Körnelung, der Plasmatinction und Kernstructur, gewöhnlich von geringerer Grösse als die ersten Bildungszellen. In manchen Fällen sind die einzelnen Zellen deutlich getrennt zu sehen, der Belag macht alsdann den Eindruck eines Pflasterepithels (Fig. 29); in anderen Fällen sind die Zellgrenzen verwischt, und es erscheint ein Syncytium von Zellen (Fig. 30) mit mehreren Kernen vorhanden, das die Kieselausscheidung auf grosse Strecken hin besorgt, im Gegensatz zum localisierten und so zu sagen individualisiertem Verhalten der Zellen bei den Spherastern. Noch an sehr grossen Nadeln sind solche Bildungslager zu finden, und es ist schwer zu sagen, wo sie ganz

aufhören. Dass die Zellen nach gethaner Arbeit hier wieder ins Gewebe wandern, dafür konnte ich bei diesen Skleroblasten keine Bilder auffinden, im Gegenteil scheinen sie mir in diesem Fall zu collabieren und einzugehen.

Es lassen sich also für die Entstehung der verschiedenen Nadeln der Tethya folgende Thatsachen zusammenfassen:

1. Alle Nadeln entstehen zuerst in einer Mutterzelle; jedoch nur bei einer Kategorie, den Chiastern, genügt diese Zelle, bei allen andern kommen weitere Zellen zum Wachstum und zur definitiven Formausprägung dazu.

2. Die kieselausscheidenden Zellen sind mit Granulationen dicht erfüllt, die mit entsprechender Abscheidung der Kieselsubstanz aufgebraucht werden. Der ersten Ausscheidung gehen Zellteilungen voraus.

3. Bei den Chiastern, für die eine Zelle genügt, sind differenzierte Elemente des Parenchyms die Ausgangszellen; bei den Spherastern und bei den Stabnadeln undifferenzierte Zellen mit bläschenförmigem Kern und Nucleolus.

4. Die später dazu kommenden Bildungszellen sind nur teilweise durch Teilung der ersten, grösstenteils jedoch aus neu aus dem Parenchym dazugekommenen Elementen abzuleiten. Ebenso können Zellen nach geschehener Kieselausscheidung ins Parenchym zurückwandern.

5. Die Bildung des Spheraster geschieht durch Verschmelzung mehrerer (wahrscheinlich zweier) kleinen Tetraster. Nach Ausbildung dieser Grundform geschieht das Weiterwachsthum durch Auflagerungen.

6. Die Bildung der Stabnadeln erfolgt durch Verschmelzung kleinster unregelmässiger Concremente zu einem Stäbchen noch innerhalb einer Zelle. Das Weiterwachstum geschieht durch Apposition, die von epithelartig gelagerten Bildungszellen ausgeht.

Für die Beurteilung der Nadeln ergeben sich daraus unmittelbare Folgerungen.

Wirkliche Mikroskleren (Fleischnadeln) sind nur die eine Zelle verbrauchenden Chiaster; die Spheraster dürfen trotz ihrer Form nicht als Fleischnadeln aufgefasst werden. Sie verbrauchen, wie die Stabnadeln viele Zellen zu ihrer Bildung, und dass dies hier ein prinzipieller, nicht durch Grösse bedingter Unterschied ist, zeigt sich schon darin, dass kleine Spheraster, die die ausgebildeten Chiaster an Grösse nicht übertreffen, bereits viele Zellen besitzen, während umgekehrt noch die ausnahmsweise grossen Chiaster innerhalb einer einzigen Zelle vorkommen. Auch können die Spheraster nicht durch Verschmelzung mehrer Chiaster entstanden gedacht, also einer Vielheit von Mikroskleren nicht gleichgesetzt werden; denn es sind auch andersartige Zellen, die die Mikroskleren als die die Makroskleren hervorbringen. Wie Evans bei Spongilla gezeigt hat (99) entstehen die kleinen Fleischnadeln in differenzierten Zellen der mittleren Schicht, die Stabnadeln in indifferenten. Dasselbe ist hier der Fall; die Chiaster erscheinen in Zellen mit Kernnetzwerk, die Stabnadeln in indifferenten, amöboidähnlichen Archäocyten, die im Kern und Plasma noch den Charakter der Eizelle tragen, und die Spheraster folgen hierin nicht den Chiastern, sondern den Stabnadeln.

Man kann sie als verschmolzene Tetractine bezeichnen, deren Anfänge ähnlich waren, wie bei den Tetractinen der Plakiniden, und der typischen Tetraxonier, die aber nachher in die Breite wuchsen, statt durch Ausziehung oder Verästelung der Strahlen.

Für die Beurteilung der Stellung der Tethyaden und den Zusammenhang der grossen Schwammgruppen lassen sich daraus direkte Schlüsse ziehen. Die Monaxonier, denen sie angehören, teilen sich bekanntlich in die Unterordnungen der Hadromerina (Clavulina i. w. S.) und Cornacuspongia (Monaxonida s. str., Halichondrina i. w. S.). Zu der ersten Gruppe, bei denen die Skeletnadeln in Radiärbüscheln stehen, nicht durch Spongin in Netzzüge angeordnet sind, gehören die Tethyaden. Man hat diese Gruppe, die sich auch durch den radiären Bau des Weichkörpers in einen Gegensatz zum Gros der Monaxonida, den

Cornacuspongien stellt, und dadurch wie durch das Vorhandensein einer Rinde, sowie in manch andern Charakteren den Tetractinelliden nähert, als diejenige bezeichnet, die die Abstammung der Monaxonier an den Tetraxoniern am ehesten documentiere. Die grossen Stabnadeln sollten durch Reduction von Vierstrahlern, speziell der grossen Triaene entstanden sein, deren einer Strahl ja extrem ausgezogen ist, während die drei andern kurze Zapfen darstellen können. Gerade die Keulennadeln der Clavulina sollten den Uebergang zeigen, man hat aber bisher vergeblich im keulenartig verdickten Ende nach einem Rest der Vierstrahligkeit, etwa in Form eines Axenkreuzes im Centralfaden gesucht. Es konnte daher auch die Ansicht bestehen, dass die Vierstrahler, speziell die grossen Triaene durch Gabelung des ungleichen Endes eines Monactins entstanden seien. Bei den grossen Stabnadeln sind hier bei Tethya allerdings ebensowenig Andeutungen der Vierstrahligkeit zu erkennen, auch in der Entwicklung nicht, trotz besonderem Suchen; dagegen ist hervorzuheben, dass sich vierstrahlige Nadeln bei der Spherasterbildung regelmässig zeigen. Damit sind die gesuchten Vierstrahler bei den Monaxonier, wenn auch an anderer Stelle, doch wirklich aufgefunden, und thatsächliche Beweise für den Zusammenhang der Tetractinelliden und Monactinelliden geliefert.

Litteraturverzeichnis.

1856. Lieberkühn. Zur Entwicklungsgeschichte der Spongillen. Archiv f. Anat. u. Physiol.

75. Carter. Notes introductory to the Study and Classification of the Spongida. Ann. u. Mag. Nat. Hist. (ser. 4), vol. 16.

79. Deszö. Die Histologie und Sprossenentwicklung der Tethyen. Arch. f. Mikr. Anat. 16. Bd. und

80. — — 17. Bd.

80. Sollas. The Sponge fauna of Norway. Ann. u. Mag. Nat. Hist. (ser. 5), vol. V.

80. Schulze, F. E. Untersuchungen etc. IX. Die Plakiniden. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 34.

81. — — X. Corticium candelabrum. ibid. Bd. 35.

88. Sollas. Report on the Tetractinellida. Chall. Rep. 25.

90. Maas. Ueber die Entwicklung des Süsswasserschwamms. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 50.

92. — — Die Metamorphose von Esperia lorenzi. Mitteil. Zool. Stat. Neapel. Bd. 10.

96. Lendenfeld. Die Clavulina der Adria. Nova Acta. Abh. der Leop. Carol. Akad. Halle. Bd. 69. (Erschienen 97).

98. Minchin. On the origin and growth of the . . . . spicules etc. Quart. Journ. Micr. Science. vol. 40. New. ser.

99. Evans. The Structure and Metamorphosis of the larva of Spongilla lacustris. Quart. Journ. Micr. Sc. (New. ser.), vol. 42.

1900. Topsent. Spongiaires de France. III. Monaxonida (Hadromerina). Arch. Zool. exp. sér. 3. Bd. 8.

Tafelerklärung.

Sämtliche Figuren mit Ausnahme von 31—34 sind mit gleicher Vergrösserung (700 : 1) gezeichnet.

Fig. 1. Drei Mutterzellen von Chiasterbildungszellen, in zwei davon Karyokinesen.

Fig. 2. Vier einzelne Chiasterbildungszellen (a noch ohne Kieselausscheidung; in den andern letztern um den Kern unsymmetrisch beginnend).

Fig. 3. Mehrere Chiaster mit ihren Bildungszellen im Gewebe, I die einfachste Form, II und III mit knorrigen Enden, die Zelle spannend, IV die Zelle nur mehr anliegend.

Fig. 4. Ausnahmsweise grosse Chiaster, I noch unvollendet in der Bildungszelle, II mit vielen Strahlen und zwei Kernen, III mit nur fünf Strahlen.

Fig. 5. Vier Zellen, die die erste Entstehung der Spheraster zeigen.

Fig. 6. Zwei Zellen mit dem Tetractinstadium des Spherasters (versch. Einstellung der Nadel).

Fig. 7. Zelle mit etwas grösserem Spheraster.

Fig. 8, 9, 10. Drei verschiedene Bilder von je zwei sich zur Verschmelzung anschickenden Tetractinen.

Fig. 11. Der daraus resultierende Spheraster mit 2 anliegenden Zellen.

Fig. 12, 13, 14. Weiteres Wachstum mit dazukommenden Parenchymzellen.

Fig. 15. Wachstum besonders an den Strahlen.

Fig. 16. Wachstum darauf besonders am Centrum.

Fig. 17. Kurz vor der Spheraster endgiltigen Ausbildung.

Fig. 18 u. 19. „Schatten“ von Spherastern nach Auflösung durch Fluorwasserstoff mit den anliegenden Bildungszellen.

Fig. 20. Amöboide Mutterzelle einer Stabnadelbildungszelle.

Fig. 21. Anormalgrosser Skleroblast mit zahlreichen, kleinen Kieselconcrementen.

Fig. 22. Drei normale Skleroblasten von Stabnadeln mit wenigen, immer mehr sich zusammenschliessenden Concrementen.

Fig. 23. Erste Anlage des eigentlichen Stäbchens innerhalb einer Zelle.

Fig. 24. Weiterwachstum mit mehreren Zellen.

Fig. 25. Stabnadel der Knospe und

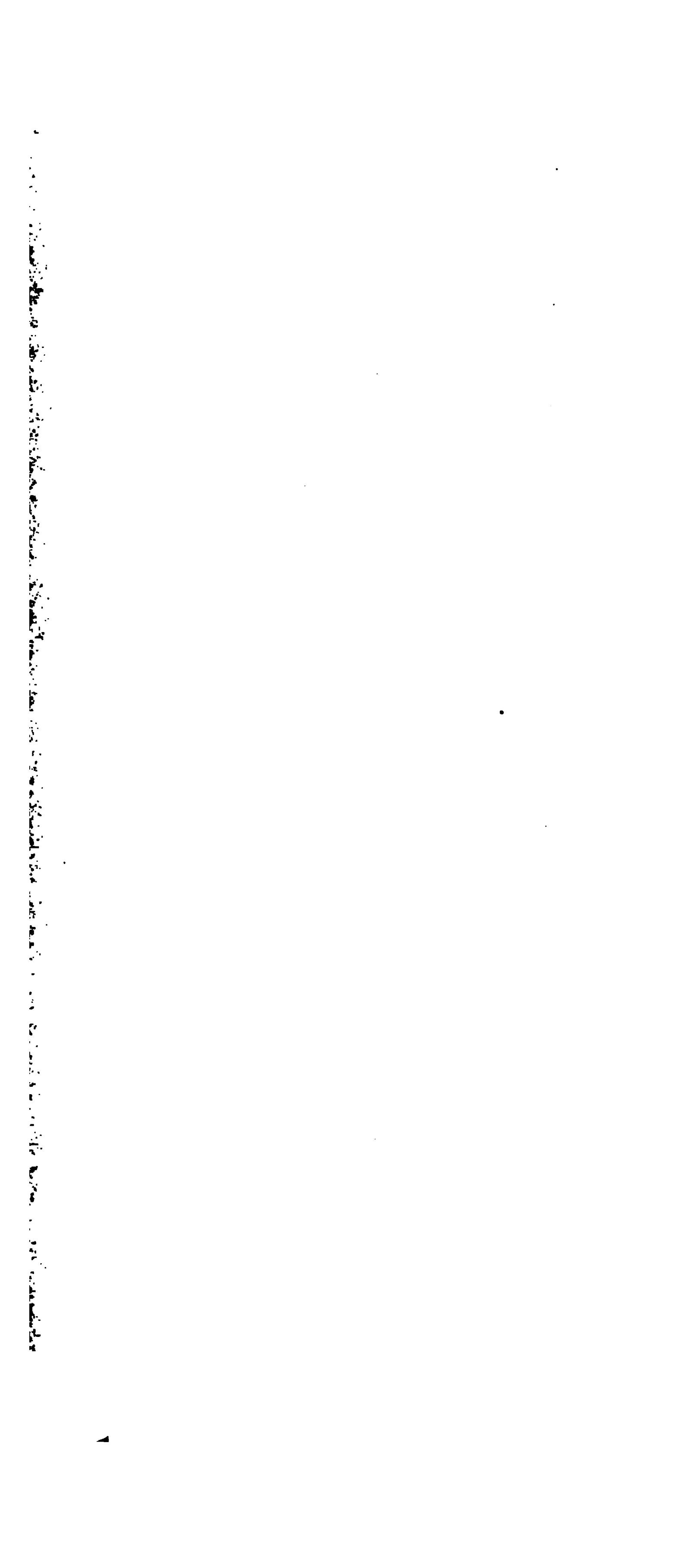
Fig. 26, 27, 28. Stabnadelstücke des Erwachsenen mit gleicher Vergrösserung.

Fig. 29 u. 30. Stücke vou Stabnadeln im eben angesetzten Schwämmchen nach Kieselauflösung durch Fluor; in 29 epithelialer, in 30 mehr syncytialer Zellenbelag.

Fig. 31 u. 32. Sehr starke Vergrösserung zweier Skleroblasten mit der ersten Anlage des Concrements innerhalb einer Vacuole, um die sich die Körner sammeln.

Fig. 33. Zwei Tetraster mit ihren Zellen, die sich zur Spherasterbildung aneinanderlegen, bei starker Vergrösserung, die Mittelteile sind bereits verschmolzen.

Fig. 34. Einige später auflagernde Zellen an den Spherastern bei sehr starker Vergrösserung.



Namen-Register.

v. Baeyer Adolf 1. 195.
Beltrami Eugenio (Nekrolog) 345.
Blümke Adolf 101.
Bütschli Otto (Wahl) 49.
Bunsen Robert (Nekrolog) 359.

Cranz C. 1.

Doflein Franz 121. 125.
Dyck Walter 391.

Ebert Hermann 107. 435. 511.

Finsterwalder Sebastian 101. 149. 533.
Frankland Edward (Nekrolog) 373.
Freitag Hugo 36.
Friedel Charles (Nekrolog) 369.

Göttler Johann 165.
Günther Siegmund (Wahl) 489.

Hankel Wilhelm Gottlieb (Nekrolog) 348.
v. Hauer Franz (Nekrolog) 377.
Heinrich Georg 35.
Hertwig Richard 33. 491.
Hess Hans 101.
His Wilhelm (Wahl) 490.
Hoffmann Berthold 107.

Kelly Agnes 187.
Knorr Eduard 103.
Koch K. R. 1.
Koenigs Wilhelm 103.
Korn Arthur 235.

Lie Sophus (Nekrolog) 339.
Lindemann Ferdinand 493.
v. Lommel Eugen (Nekrolog) 324.

Maas Otto 553.
Marsh Othniel Charles (Nekrolog) 384.
v. Miller Wilhelm (Nekrolog) 316.

Poincaré Henri (Wahl) 490.
Pringsheim Alfred 37. 209. 463. 541.

Rammelsberg Karl Friedrich (Nekrolog) 388.
Ranke Johannes 101.
Röntgen Wilhelm Konrad (Wahl) 4. 489.
Rothpletz August 3.

Schick Josef 249.
Stolz Otto (Wahl) 490.
v. Voit Carl 316. 324. 345. 348. 353. 359. 369. 373. 377. 384. 388.

de Vries Hugo (Wahl) 490.

v. Weber Eduard 373. 393.
Weinschenk Ernst 148.
Wiedemann Gustav (Nekrolog) 353.
Wolf Max 147. 197.

v. Zittel Karl Alfred 301. 489.

Sach-Register.

Abbildung, conforme, der Halbebene auf ein Flächenstück 165.
Ammoniten, jurassische, Deformationen durch Drucksuturen 3.
Ansprache des Präsidenten 301.
Autoxydation 195.

Befruchtung, Bedeutung derselben bei Protozoen 33.

Caro'sches Reagens auf Ketone 1.
Conchit 187.
Crustaceen, dekapode, aus der bayrischen Staatssammlung 125.

Druckschriften, eingelaufene 1. 25.

Funktionen, automorphe 493.
Funktionen, periodische 541.

Gewehrlauf, Vibration während des Durchgangs des Geschosses 1.
Graphitlagerstätten 148.

Hintereisferner 101.
Höhenkarten aus Ballonaufnahmen 149.

Isogonalcentrik und Invariantentheorie 249.

Kettenbrüche, periodische 463.

Liniencomplexe und Systeme Pfaff'scher Gleichungen 393.
Luft, flüssige 107.

Magnetisches Verhalten von Alcoholen 35.
Magnetische Susceptibilität organischer Substanzen der aromatischen Reihe 36.
Mittelmoränen, innere Struktur derselben 533.
Mittelwerthsatz, zweiter, für endliche Summen und Integrale 209.

Nekrologe 316. 324. 345. 348. 353. 359. 369. 373. 377. 384. 388.

Pfaff'sche Systeme, Reduzirbarkeit derselben auf eine gegebene Zahl von Termen 273.
Plejaden, Aussennebel derselben 147.
Potenzreihen, Verhalten derselben auf dem Potenzkreise 37.

Schädeldeformitäten aus den Gräberfeldern von Ancon und Pachacamac bei Lima 101.
Seespiegelschwankungen, periodische, am Starnberger See 435.
Semidefinitiver Fall in der Theorie der Maxima und Minima 235.
Spongien, Entstehung und Wachsthum der Kieselgebilde derselben 553.
Süsswasserkrabbe aus Columbien 121.

Traubenzucker, Derivate derselben 103.

Wahlen 489.

Zerstreuungsvermögen, elektrisches, in den oberen Schichten der Atmosphäre 511.
Zodiakallicht, Bestimmung der Lage desselben 197.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1900.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Historische Gesellschaft des Kantons Aargau in Aarau:

Argovia. Bd. 28. 1900. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XXIII, part 1. 2. 1899. 8⁰.
Memoirs. Vol. I, part 1. 1899. 4⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Vol. 140. 141. 1899. 8⁰.
Monumenta historico-juridica Slav. merid. Vol. VII, 1. 1899. 8⁰.
Ant. Radić, Zbornik za narodni život. Bd. IV, 2. 1899. 8⁰.
Milivoj Šrepel, Gracta za povjest Kńiževnosti hrvatske Kniga 2. 1899. 8⁰.
P. Budman, Rjetnik hrvatskoga ili srpskoga jezika Svezak 19. 1899. 4⁰.

Kgl. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. II, 1. 2. 1900. 4⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjestnik. N. S. Sveska IV. 1899/1900. 4⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1898 trimestre 1—4. 1899, 1. 1898—99. 8⁰.

Observatoire national d'Athènes:

Annales. Tom. II. 1900. 4⁰.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. 26. Jahrg. 1899. 8⁰.

Peabody Library in Baltimore:

Extract from first Catalogue (Artikel: London). 1899. 4⁰.

Maryland Weather Service in Baltimore:

Maryland Weather Service. Vol. I. 1899. 8⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Maryland Geological Survey. Vol. III. 1899. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bamberg:

XVII. Bericht. 1899. 8⁰.

Kgl. Bibliothek in Bamberg:

Katalog der Handschriften. Bd. I. Abth. 2. Lfg. 3. 1899. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band XII, 2. 1900. 8⁰.
Der Basler Chemiker Christ. Friedr. Schönbein. 1899. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Jahresbericht über das Jahr 1898/99. 1899. 8⁰.
Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. 5. H. 3. 1900. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Band 42, 1. 1899. 8⁰.
Notulen. Deel 37, afl. 1. 2 en Register over 1889—98. 1899. 8⁰.
Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia. Anno 1636 und 1672. 1899. 4⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XXI. 1898. 1899. fol.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Jaarg. XX. 1898. 1899. 8⁰.
Die Abweichung der Magnetnadel, Beobachtungen von W. von Bemmelen. 1899. fol.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Glas. No. 58. 1900. 8⁰.
Spomenik. No. 36. 37. 1900. 4⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars. An account of the Crustacea. Vol. III, part 1—4. 1899. 1900. 4⁰.
Aarbog für 1899. 1900. 8⁰.
Aarsberetning for 1899. 1900. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Schriften der Universität of California aus dem Jahre 1899. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Die zweihundertjahrfeier der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften am 19. u. 20. März 1900. Berlin. 4⁰.
Geschichte der kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften, bearbeitet von A. Harnack. Bd. I, 1. 2, II, III. 1900. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1899. No. 39—53. 1900. No. 1—22. 8⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für die Jahre 1896—1898. 1897—99. 8⁰.

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Bericht über den Stand der Erdforschung der Breitenvariation am Schlusse d. J. 1899. 1900. 8⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 32. Jahrg., No. 19. 33. Jahrg., No. 1—11. 1900. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 51, Heft 3. 4. 1899. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Band 30. 1900. 8⁰.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1893. 54. Jahrg. in 3 Abteilungen. Braunschweig 1899—1900. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrgang 1, No. 15. Jahrgang 2, No. 1—11. Leipzig. 1899—1900. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie 1899/1900.' Bd. XIII, No. 21—26 a u. b Bd. XIV, No. 1—6. 8⁰.
Verhandlungen 1899—1900. No. 1—10. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Rede zur Feier der Jahrhundertwende am 9. Jan. 1900 von A. Riedler. 4⁰.
Ueber die geschichtliche und zukünftige Bedeutung der Technik, Rede von A. Riedler. 1900. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band XIV, 4. Band XV, 1. 1900. 4⁰.

K. preuss. Geodätisches Institut in Berlin:

A. Westphal, Das Mittelwasser der Ostsee. 1900. 4⁰.
Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. 1900. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinz Preussen von G. Hellmann. 1900. 8⁰.
Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen im Jahre 1897. 1899. 4⁰.
Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen in den Jahren 1895 u. 1896. 1899. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung im Jahre 1895 und 1899. 1899—1900. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band XXVIII, Heft 3. 1900. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. 49. Jahrg., No. 2—13. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XV, Heft 1—6. 1900. Fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 20. Jahrg., Heft 1—6. 1900. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 24. Band. Zürich. 1899. 8⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Bern:

Carte géologique de la Suisse feuille XVI (2. édit.) avec notice explicative. 1899. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. III. Serie. Vol. 17, Fasc. 4—6. 1900. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1899, 2. Hälfte. 8⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1898/99 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 104. 1899. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 56. Jahrg., 2. Hälfte. 1899. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux Année 1898—99. 1899. 8⁰.
Mémoires. 5e Série, tome 3, cahier 2. Tome 5, cahier 1. 1899. 8⁰.
Observations pluviométriques 1898—99. 1899. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 53. 1898. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1900. No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 35, No. 4—9. 1899. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 29, No. 1—8. 1899. 8⁰.

Archiv der Stadt Braunschweig:

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. II, Abth. 3. 1900. 4⁰.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 4. Jahrg., Heft 1, 2. 1900. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Band 37. 1898. 1899. 8⁰.
XVII. Bericht d. met. Comm. i. J. 1897. 1899. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tom. XIII, No. 11. 1899. Tom. XIV, No. 1—5. 1900. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. a) Classe des Lettres 1899, No. 11, 12. 1900, No. 1—4;
b) Classe des Sciences 1899, No. 11, 12. 1900, No. 1—4. 8⁰.
Annuaire. 66e année. 1900. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XIX, fasc. 1, 2. 1900. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Vol. 43. 1899. 8°.
Mémoires. VII. 1900. 8°.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome 12, Fasc. 2. 13, 1. 14, 1. 1900. 8°.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Bulletin des Séances 1899, p. XCVII—CXXVIII. 8°.
Annales. Tome 31, fasc. 2. 1896. Tome 33. 1898. 8°.

Observatoire Royale in Brüssel:

Bulletin mensuel de magnetisme terrestre. Sept. u. Oct. 1899, Janvier 1900. 8°.
Annuaire 65e année 1898 avec Supplement
66e „ 1899
67e „ 1900 1898—1900. 8°.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Diplomacziai Emlékek az Anjon-Korból III. 1876. 8°.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

A Magyar kir. földtani intézet évköngve. Bd. XIII, 2. 1899. 4°.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. XIII. Heft 1, 2. 1899. 8°.
Földtani Közlöny. Bd. 29. Heft 1—12. 1899. 8°.

K. ungarisches Ackerbau-Ministerium in Budapest:

Landwirtschaftliche Statistik der Länder der ungarischen Krone. Bd. IV. 1900. 4°.

Museo nacional in Buenos Aires:

Comunicaciones. Tomo I, No. 5. 1900. 8°.

Officina meteorologica Argentina in Buenos Aires:

Anales. Tomo XII. 1898. 4°.

Deutsche akademische Vereinigung in Buenos Aires:

Veröffentlichungen. Bd. I. Heft 1—3. 1900. 8°.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Bulletin No. III. 1900. 4°.
Mededeelingen. No. 34. 36. 37. Batavia 1899. 1900. 4°.
M. Raciborski, Parasitische Algen und Pilze Java's. Theil I. Batavia 1900. 4°.

Society of natural sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. 6. No. 2—4. 1899. 4°.

Academia Romana in Bukarest:

Documente privitóre la istoria Românilor. Vol. XI (1517—1612) 1900. 4°.
Eudoxiu de Hurmuzaki, Documente privitóre la Istoria Românilor. Vol. IX, 2 et Suppl. II, Vol. III, fasc. 1. 1899—1900. 4°.
Acte si fragmente din Istoria Românilor de Neculac Jorga I. 1895. 8°.
Fragmente din Istoria Românilor de Eudoxin Baron de Hurmuzaki. 1900. 8°.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. 14. 1898. 1900. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. XIX, fasc. 3. 1899. 4⁰.
Bulletin. 5. Série. Vol. II. 1899. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1899. August—Dezember. 1900. Fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. 28, part 1. 1898. 4⁰.
Palaeontologia Indica Ser. XV, Vol. 1, part 2. Vol. II.
Title page etc. New Series Vol. I. No. 1 u. 2. 1899. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 950 und 953—963. 1899—1900. 8⁰.
Journal. No. 382. 383. 1899—1900. 8⁰.
Proceedings. 1899. No. VIII—IX. 1900. No. I. 8⁰.
Catalogue of Books and Manuscripts of the Asiatic Society of Bengal. Fasc. II. 1900. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass:

Bulletin. Vol. 35. No. 8. 1900. 8⁰.
Memoirs. Vol. XXIII. No. 3. 1899. 4⁰.
Vol. XXIV. Reports of an Exploration of the West coasts of Mexico.
Vol. XXVI. The Fishes by S. Garman. Text and Atlas. 1899. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

54th annual Report for the year ending Sept. 30. 1899. 8⁰.
Annals. Vol. 32, part 2. Vol. 33, Vol. 42, part 2. Vol. 44, part 1. 1899—1900. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. X, part 4, 5. 1900. 8⁰.
Transactions. Vol. XVIII. Vol. XIX, 1. 1900. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 12. 1899. 4⁰.
Bollettino. Fasc. 60, 61, 62. 1899—1900. 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

1. Jahrgang der Decaden-Monatsberichte für 1898. 1899. 4⁰.
Jahrbuch 1897. Jahrg. XV, Abth. III. 1899. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 40. 41. 1899. 8⁰.
The Birds of Eastern North America by Charles B. Cory. Part II. 1899. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. XIV, (No. 1—2) No. 524. 525. 1900. 8⁰.

Yerkes Observatory of the University of Chicago:

Bulletin. No. 12. 1899. 4⁰.
I. II. annual Report. 1899. 4⁰.
Publications. Vol. I. 1900. 4⁰.

Zeitschrift „Astrophysical Journal“ in Chicago:

Vol. XI, No. 1—4. 1900. 8⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiania:

Beretning om Foreningens Virksomhed 1899, No. V. 1900. 8⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlingar 1899, No. 2—4. Oversigt u. Tit. 1900. 8⁰.
Skrifter. I. Mathem.-naturwiss. Klasse 1899, No. 1. 5. 8. 9 u. Tit. II. Histor.-filos. Klasse 1899, No. 5 u. Tit. 1900. 4⁰.

Kgl. Norwegische Universität in Christiania:

Universitets Aarsberetning for 1897—98. 1899. 8⁰.
Universitets-og Skole-Annaler. 13. Aarg. 1898. 1899. 8⁰.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. XX, Heft 4. Bd. XXI, Heft 1—3. 1897—99. 8⁰.
Jahrbuch des meteorologischen Instituts für 1898. 1899. 4⁰.
Norske Gaardnavne af O. Rygh. 1898. 8⁰.
A. Chr. Bang, Documenter og studier II. 1899. 8⁰.

Committee of the Norwegian North-Atlantic Expedition in Christiania:

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. No. XXV. XXVI. XXVII. 1899—1900. Fol.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

XXIX. Jahresbericht. Jahrg. 1899. 1900. 8⁰.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors für 1899/1900. 1899. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. Neue Folge. Bd. X. Heft 1. 1899. 8⁰.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Hans Märcker, Geschichte der ländlichen Ortschaften des Kreises Thorn.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. Neue Folge. 2. Bd. 2. Heft. 1899. 8⁰.
Oberhessisches Wörterbuch von Wilh. Crecelius. Lfg. 3. 4. 1899. 8⁰.

Davenport Academy of natural sciences in Davenport:

Notes on Mining in the State of Durango, Mexico. By H. van F. Furmann. 1900. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 20, trimestre 4. 1899. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III, Vol. 5, No. 4. 1900. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 22, No. 1—5. 1900. 8⁰.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. VII. 1900. 8°.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXII, No. 6, 7. 1899. Vol. XXIII, No. 1. 1900. 8°.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. II, No. 4. 1899. 8°.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1898—99. 1900. 8°.

Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach:

Jahresbericht f. d. J. 1899—1900. 1900. 4°.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

83. u. 84. Jahresbericht für 1897/99. 1899. 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Serie, Vol. 22, disp. 3—4. 1899. 8°.

R. Deputazione Toscana sugli studi di storia patria in Florenz:

Documenti per la storia della città di Arezzo per Ubaldo Pasqui. Vol. I. 1899. 4°.

R. Istituto di studi superiori in Florenz:

Pubblicazioni. a) Sezioni di filosofia e filologia. No. 28. 1896—97. 4°.
b) Sezioni di scienze fisiche e naturali. No. 28—29. 1896—97. 4°.
c) Sezioni di medicina e chirurgia. No. 15, parte IV. No. 18—20. 1896—97. 4°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. 20, Heft 2. Bd. 26, Heft 1. 1899. 4°.
Bericht 1899. 1900. 8°.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.

Mittheilungen über römische Funde in Heddernheim III. 1900. 4°.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land." Jahrlauf 26. 1899. Fol.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Index lectionum. Verzeichniss der Vorlesungen, Sommer-Semester 1900. 8°.
Collectanea Friburgensia. Fasc. IX. 1900. 4°.

Verein für Naturkunde in Fulda:

Jos. Vonderau, Pfahlbauten im Fuldathale. 1899. 4°.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Bulletin. Tom. 2, livr. 3. 1900. 8°.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:

Botanisch Jaarboek. XI. Jahrg. 1899. 8°.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 75, Heft 2. 1899. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1899. No. 6, 11, 12; 1900. No. 1—4. Berlin 1899—1900. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1899. Heft 4. 1899. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1899. Heft 3. 1899. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothemburg:

Handlingar. IV. Folge. Heft II. 1899. 8⁰.

Stadtbibliothek in Gothemburg:

Göteborgs Högskolas Årsskrift. Bd. 5. 1899. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. X, No. 1, 2. 1900. 8⁰.

Universität in Graz:

Verzeichniss der Behörden, Lehrer und Beamten. 1899/1900. 4⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen, Sommersemester. 1900. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mittheilungen. 31. Jahrg. Berlin 1900. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Jahresbericht über das Jahr 1899/1900. 1900. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

Bijdragen. 6de Volgreeks, Deel VII, aflev. 1, 2. 1900. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II, Vol. 6, partie 4, 5. 1899/1900. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises. Sér. II, Tom. 3, livre 3—5. 1900. 8⁰.

Historischer Verein für Württemb. Franken in Schwäbisch-Hall:

Württembergisch Franken. N. F. VII. 1900. 8⁰.

Kaiserlich. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 35, No. 12. 1899. Heft 36, No. 1—5. 1900. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 53, Heft 4. Band 54, Heft 1. Leipzig 1899/1900. 8⁰.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Band XI, 2. Leipzig 1899. 8⁰.

Universität Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 72, Heft 3—5. Stuttgart 1899—1900. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mittheilungen. Bd. 3, Heft 9. Leipzig 1900. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mittheilungen. 19. Jahrg. 1898/99. 1900. 8⁰.
Gesammtregister von 1839—1899. 1900. 8⁰.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Bd. 10. 1899. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Bd. XVI, 1. Hälfte. 1900. 4⁰.
Verhandlungen 1899. III. Folge XII. 1900. 8⁰.

Bibliothek der deutschen Seewarte in Hamburg:

II. Nachtrag zum Katalog. 1899. 8⁰.

Geschichtsverein in Hanau:

Jahresbericht für das Jahr 1898/99. 1899. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Herm. Osthoff, vom Suppletivwesen der indogermanischen Sprachen. 1899. 4⁰.
Robert Wilhelm Bunsen, ein akademisches Gedenkblatt. 1900. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. 9, Heft 2. 1899. 8⁰.

Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Band VI, Heft 3. 1899. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 9, 10. 1899. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Öfversigt af Förhandlingar XLI. 1898—99. 1900. 8⁰.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 58. 1900. 8⁰.

Societas pro Fauna et Flora Fennicia in Helsingfors:

Acta. Vol. 15. 17. 1898—99. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F., Band 29, Heft 2. 1900. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1898/99. 1900. 8⁰.

Ostsibirische Abtheilung der Kaiserlich russischen Geographischen Gesellschaft in Irkutsk:

Iswestija. Tom. 30, No. 2—3. 1900. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. 3, No. 9. 1899. Vol. 4, Nr. 1—4. 1900. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Band VI, Lieferung 3. Text und Atlas. 1899. Fol.
Band VIII, Lieferung 5. Text und Atlas. 1900. Fol.

Société de médecine in Kharkow:

Trudy. 1898. 1900. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Sapiski 1900. kniga 1, 2. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Band 29. 1900. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. V, Heft 1. Abtheilung Kiel. 1900. 4°.

Universität in Kiew:

Iswestija. Vol. 39, No. 5, 9—12. 1899. Bd. 40, No. 1—4. 1900. 8°.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Diagramme. Witterungsjahr 1899. 1900. Fol.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 40. Jahrg. 1899. 4°.

K. Universitäts-Sternwarte in Königsberg:

Astronomische Beobachtungen, Abteilung 38 u. 39. 1899. Fol.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1899. No. 6. 1900. No. 1—3. 8°.
Mémoires. a) Sections des Lettres. Tome VI, No. 1.
b) Sections des Sciences. Tome IX, No. 4—6. 1900. 4°.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger 1899, II. Raekke. 14. Band, Heft 4. 1900. 8°.
Mémoires. Nouv. Sér. 1899. 8°.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1899, October—Dezember. 1900, Januar—März. 8°.
Rozprawy. a) histor.-filozof. tom. 37 und Ser. II, tom. 13.
b) filolog. Ser. II, tom. 14.
c) matemat. Ser. II, tom. 16 (36). 1899. 8°.
Rocznik. Rok 1898/99. 1899. 8°.
Sprawozdanie komisyi hist. sztuki Tom. VI, 4. 1899. 4°.
Scriptores Rerum Polonicarum. Tom. 17. 1899. 8°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 35, No. 133, 134. 1899. Vol. 36, No. 135, 136. 1900. 8°.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Handelingen en Mededeelingen, jaar 1898—99. 1890. 8°.
Levensberichten der afgestorven Medeleden 1898—99. 1899. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil XVII, Heft 3. 1900. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band XX, No. 1. 1900. 4°.
Abhandlungen der mathem-physikalischen Classe. Bd. XXV, 6 u. 7. Bd. XXVI, 1 u. 2. 1900. 4°.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 51, No. 4. 5. 1899. Bd. 52, No. 1—3. 1900. 8°.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 51, 1899, Allgemeiner Teil. Naturwissenschaftl. Teil und Mathematisch. Teil, No. 5 u. 6. Bd. 52. 1900. I, II. 8°.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Preisschriften. No. XXXV. 1900. 4°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd 60, Heft 9—12. 1899. Bd. 61, Heft 1—9. 1900. 8°.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1899. 1900. 8°.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the U. S. Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. XI, No. 55-59. 1898—99. 8°.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletin. 17. Serie, 1898—99, No. 1, 2. 1899. 8°.

Literary and philosophical Society in Liverpool:

Proceedings. No. LIII. 1899. 8°.

Université Catholique in Loewen:

Schriften der Universität a. d. J. 1898/99.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XVII, 1. 1900. 4°.

Her Majesty's Secretary of State for India in Council in London:

Dictionary of the Lepcha-Language by G. B. Mainwaring, revised by Albert Grünwedel. Berlin 1898. 4°.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. 15, No. 57, 58. 1900. 8°.

Royal Society in London:

Year-book 1900. 8°.
Proceedings. Vol. 65, No. 422—423. Vol. 66, No. 424—430. 1900. 8°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 60, No. 2—7. 1899—1900. 8°.

Chemical Society in London:

Journal No. 447—452 (February — July 1900). 8°.
List of the Fellows and Officers March 1900. 8°.
Proceedings. Vol. 16, No. 217—226. 1900. 8°.

Linnean Society in London:

The Journal. Zoology. Vol. 27, No. 177, 178. 1899—1900. 8°.
List 1899—1900. 1899. 8°.

R. Microscopical Society in London:

Journal 1900, part 1—3. 8°.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1899, part IV. 1900, part I. 1900. 8°.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1575—1600. 1900. 4°.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

11. annual Report. 1900. 8°.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 26, livr. 4. Tome 27, livr. 1. 2. 1899—1900. 8⁰.

Bulletin historique du diocése in Lyon:

Bulletin. Annee I, No. 1. 1900. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. 3, No. 1. 1900. 8⁰.

The Government Observatory in Madras:

New Madras General Catalogue. 1899. 4⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Annuario 1900. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 36, cuad. 1—6. 1900. 8⁰.

R. Osservatorio di Brera in Mailand:

Pubblicazioni. No. XL, parte III. Mediolani 1899. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 38, Fasc. 4. Vol. 39, Fasc. 1. 1900. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III, anno 26, Fasc. 24. 1899. anno 27, Fasc. 25. 1900. 8⁰.

Verein zur Erforschung der rheinischen Geschichte in Mainz:

Zeitschrift. Bd. 4, Heft 2 u. 3. 1900. 8⁰.

Siegmund Salfeld, der alte israelitische Friedhof in Mainz. Berlin 1898. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 43, part 5. Vol. 44, part 1—3. 1899—1900. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1899—1900. 4⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Bd. V, Heft 2. 1899. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. Anno IV, Fasc. 4. 1899. Anno V, Fasc. 1. 1900. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. XI. Jahrgang 1899. 4⁰.

Instituto geológico in Mexico:

Boletín. No. 12, 13. 1899. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletin mensual. Mes de Julio—Sept. 1899. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

Boletín. Octubre 1898. 1900. 4⁰.

Anuario. Año XX, 1900. 1899. 8⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias y Revista. Tomo XII, No. 11 y 12. 1899. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie, Tom. 3, cuad. 3 y 4. 1899. 4⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. IV, Vol 1, anno 32. 1899. 1900. 8⁰.

Museo nacional in Montevideo:

Anales. Tom. II, Fasc. 12. Tom. III, fasc. 13. 1899—1900. Fol.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des lettres. 2ᵉ Série, Tome 2, No. 2.
Section des sciences. 2ᵉ Série, Tome 2, No. 5.
Section de médecine. 2ᵉ Série, Tome 1, No. 2, 3. 1898—99. 8⁰.

Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Imp. in Moskau:

Observations. Dècembre 1898 et Janvier—Juin et Août 1899. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1899. No. 1—3. 1899—1900. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 1899, No. 10—12. 1900, No. 1. München. 4⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener statistische Jahresübersichten für 1898. 1900. 4⁰.
Verzeichnis der Strassen und Plätze in München. 1900. 4⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Nachträge zum Verzeichniss der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. 1900.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Semester 1900. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1900. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1900. No. 1—13. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte XI. u. XII. Jahrg. 1898 u. 1899. 4⁰.

K. Staatsministerium des Innern in München:

Der Stand des landwirthschaftlichen Genossenschaftswesens in Bayern 1899. 1900. 4⁰.
Jahrbuch des Hydrotechnischen Bureaus 1899 u. 1900. Heft 1. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus den Jahren 1899/1900 in 4⁰ und 8⁰.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Sommer-Semester 1900. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 4⁰.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. VIII. 1898. 1899. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift. Heft 1—3. 1900. 4⁰.

Bayer. Kunstgewerbeverein in München:

Denkschrift. Die würdige Ausgestaltung der Kohleninsel. 1900. 4⁰.

Ornithologischer Verein in München:

Jahresbericht für 1897 u. 1898. 1899. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1900, No. 112—114, 116, 117. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Bd. 57. 1899. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. 5. Série, tom. 16. 1899. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. II, Tome 16, fasc. 33. Sér. III, Tome 1, fasc. 1, 2. Paris 1899. 1900. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali e politiche in Neapel:

Rendiconto. Seriè 3, Vol. 5, fasc. 8—12. 1899. Vol. 6, fasc. 1—4. 1900. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 48, part 5, 6. Vol. 49, part 1, 2. 1899—1900. 8⁰.
Annual Report for the year 1898—99. 1899. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Serie, Vol. 9, No. 49—54 (January—June). 1900. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XX, 2. Half. 1899. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Charter and List of Members. 1899. 8⁰.

American Jewish Historical Society in New-York:

Proceedings. No. 7. 1899. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol XI, part II. 1899. 8⁰.

American Mathematical Society in New-York:

Transactions. Vol. 1, No. 1. Lancaster, Pa. 1900. 4⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 31, No. 5. 1899. Vol. 32, No. 1, 2. 1900. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. Vol. III, No. 4—6. 1899. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht über das 21. Vereinsjahr 1898. 1899. 8⁰.
Mittheilungen. 13. Heft. 1899. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mittheilungen. Bd. 24. 1899. 1900. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. IV, part 1 by Lawrence M. Lambe. 1899. 8⁰.
R. G. Mc Connell, Preliminary Report on the Klondike Gold Fields mit Karten. 1899. 8⁰.
Annual Report. N. Ser. Vol. X, 1897 mit Karten. 1899. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. XV. 1899. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Serie II. Vol. IV, fasc. 1. 1900. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Annuario. 1900. 8⁰.
Rendiconti. Tomo XIV, Fasc. 1—4. 1900. 8⁰.

Societa di scienze naturali ed economiche in Palermo:

Giornale di scienze naturali. Vol. XXII. Anno 1899. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Rapport sur les vaccinations en 1897. Melun 1898. 8⁰.
Rapports de la commission permanente de l'hygiène de l'enfance, pour 1898. 1898. 8⁰.
Bulletin. 1900, No. 1—26. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 130, No. 2—26. 1900. 4⁰.
Oeuvres d'Augustin Cauchy. II. Série, Tom. 4. 1899. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux de 1899. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 698—703 (Fevrièr—Juillet). 1900. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Bibliothèque d'études. Tome 8. 1899. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 39, No. 1—3. Tome 40, No. 1—3, 1899. 1900. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1899, No. 3-8. 1900, No. 1. 8⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tome 10, fasc. 2, 3, 5. 1899. 8⁰.

Société des études historiques in Paris:

Revue. Nouv. Sér., Tome 2, No. 1—3 et 2 Supplèments. 1900. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1899. No. 7. 8⁰.
Bulletin. VIIᵉ Série, Tome 20, 4ᵉ trimestre 1899. 8⁰ et année 1900. No. 1. 4⁰.
La Géographie, Année 1900. No. 2—6. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 27, No. 4, 1899. Tome 28, No. 1. 1900. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome XXIV. 1899. 8⁰.

California Paris Exposition Commission of 1900 in Paris:

Six maps of the State of California.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Annuaire du Musée zoologique 1899. No. 4. 1900. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 31, Heft 8, 9. 1899. Tom. 32, Heft 1—3. 1900. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Godischni Akt 1899 (Jahrbuch). 1900. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1899, part II. 1899. 8⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings at the 47. annual Meeting held at Put-in-Bay. Sept. 1899. Baltimore 1899. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 23, No. 4. Vol. 24, No. 1 1900. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 36, No. 1—6. 1900. 8⁰.

The American Association to promote the teaching of speech to the Deaf in Philadelphia:

6. Summer Meeting at Northampton, Mass. 1899. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 38, No. 160. 1899. 8⁰.
Transactions. Vol. 20, part 1. 1899. 4⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Vol. XXI. 1899. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XI, pag. 159—177. Vol. XII, pag. 1—28. 1899—1900. 8⁰.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il Nuovo Cimento. Serie IV, tom. X, Novembre e Dicembre 1899; tom. XI Gennaio—Marzo. 1900. 8⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für 1899/1900. 4⁰.

Alterthumsverein in Plauen:

Regesten zur Orts- und Familiengeschichte des Vogtlandes. Bd. II. 1898. 8⁰.
Mittheilungen. 13. Jahresschrift auf die Jahre 1897/99. 1900. 8⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. Bd. XIII, 3, 4. Bd. XIV, 1—4. 1898—99. 8⁰.
Historische Monatsblätter. Jahrg. I, No. 1—3. 1900. 8⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Die Polhöhe von Potsdam. II. Heft. Berlin 1900. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Joh. Endt, Beiträge zur jonischen Vasenmalerei. 1899. 4⁰.
Ludwig Pollak, Zwei Vasen aus der Werkstatt Hierons. Leipzig 1900. 4⁰.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Band X. 1899. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Mittheilung. No. X. 1900. 8⁰.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1899. 1900. 8⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Jahresbericht für das Jahr 1899. 1900. 8⁰.
Sitzungsberichte 1899. a) Classe für Philosophie.
b) Mathem.-naturw. Classe 1899. 1900. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Sbornik. Číslo II, III. 1899. 8⁰.
Časopis. Band 29, No. 1—5. 1900. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1899. 1900. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. Band 73, Heft 2—6; Band 74, Heft 1. 1899—1900. 8⁰.
Boh. Hellich, Praehistorické Lebky v. Čechách. 1899. 4⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnet. u. meteorologische Beobachtungen im Jahre 1899. 60. Jahrg. 1900. 4⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Semester 1900. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. Band 3, No. 1—4. 1899—1900. 8⁰.

Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos" in Prag:

Sitzungsberichte, Jahrg. 1898. 1899. 8⁰.
Abhandlungen. Band I, Heft 1—3; Band II, Heft 1, 2. 1898—1900. 4⁰.
Jahrbuch. Neue Folge, Band XII—XVIII. Wien 1892—98. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Band 51. 1899. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Arbeiten. Neue Folge. Heft 8, 9. 1899. 4⁰ u. 8⁰.
Korrespondenzblatt. Nr. XLII. 1899. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 10. 1899. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

G. V. Schiaparelli, Osservazioni sulla topografia del piareta Marte. Memoria VI. Roma 1899. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. IX. Semestre 1. Fasc. 1 bis 10. 1900. 4⁰.

Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. VII, parte 2. Notizie degli scavi Agosto-Dicembre 1899 und Indice per l'anno 1899. Vol. VIII, parte 2. Gennajo und Febbrajo 1900. 4⁰.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. VIII, Fasc. 9—12. 1899. Vol. IX, Fasc. 1, 2. 1900. 8⁰.

Annuario 1900. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 53 (1899—1900), Sessione I—IV. 1900. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1899, No. 4. 1900. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Vol. XIV, Fasc. 3, 4. 1899. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Indici e cataloghi. IV. J. codici Palatini di Firenze. Vol. 2, Fasc. 6. 1899. 8⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXII, 3, 4. 1899. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1897—98. 1899. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 5, Fasc. 3, 4. 1899. Vol. 6, Fasc. 1. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1897—98. 1899. 8⁰.

China Branch of the R. Asiatic Society in Shanghai:

Journal. Vol. XXXI, 1896—97. 1900. 8⁰.

R. Accademia dei fisiocritici in Siena:

Atti. Serie IV, Vol. XI, No. 4—10; Vol. XII, No. 1—3. 1899—1900. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno 22, No. 11—12. 1899. Anno 23, No. 1—4. 1900. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mittheilungen. XXIV. 1900. 8⁰.

K. Akademie der schönen Wissenschaften, Geschichte und Alterthumskunde in Stockholm:

Der Orient und Europa von Oscar Montelius, übersetzt von J. Mestorf. 1. Heft. 1899. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

C. A. M. Lindman, Vegetationen i Rio Grande do Sul. 1900. 8⁰.
C. F. O. Nordstedt, Index Desmidiacearum. Berlin 1896. 4⁰.
Öfversigt. Vol. 56 (1899). 1900. 8⁰.
Handlingar. N. F., Band 32. 1899—1900. 4⁰.
Meteorologiska iaktagelser i Sverige. Band 36 (1894). 1899. 4⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Band 21, Heft 7; Band 22, Heft 1—4 und Register zu XI—XXI. 1900. 8⁰.

Nordiska Museet in Stockholm:

Minnen från Nordiska Museet. Band II, Heft 5—7. 1900. Fol.
Bilder från Skansen. Heft 5—12. 1899. Fol.
Sagospelet på Skansen. 1899. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Band 33, Heft 10. 1899. Band 34, Heft 1—5. 1900. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stuttgart:

Württembergisches Urkundenbuch. Band VII. 1900. 4⁰.

K. Württemberg. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik, Landeskunde. Ergänzungsband I, Heft 2—3. 1900. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mittheilungen. Band VII, Heft 3. 1899. 8⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. XI, 4. 1899. 4⁰.
Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Band IV, No. 6. 1899. 4⁰.

Faculté des Lettres à l'Université in Toulouse:

Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptiones et Belles-Lettres de Toulouse 1827—1898. 63 Bände. 8⁰.
Annales du Midi 1889—1899. 1900, No. 1. 8⁰.
Bibliothèque Méridionale. Tom. 1—5, IIe Sér.; Tom. 1—5. 1888—1899. 8⁰.

Faculté des Sciences à l'Université in Toulouse:

Annales. II. Série, Tome I, Fasc. 2—4. 1899. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Osservazioni meteorologiche nell' anno 1899. 1900. 8⁰.
Atti. Vol. 35, disp. 1—6. 1900. 8⁰.
Memorie. Serie II, Tom. 49. 1900. 4⁰.

Verein für Kunst und Alterthum in Ulm:

Mittheilungen. Heft 9. 1900. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Skrifter. Band III und VI. 1900. 8⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. 31. Année 1899. 1899—1900. Fol.

K. Universität in Upsala:

Urkunder rörande Stockholms historia I. 1900. 8⁰.
Eranos. Vol. III, No. 4; Vol. IV, No. 1. 1899—1900. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Band XX. Amsterdam 1899. 8⁰.
Werken. III. Serie, No. 10. Amsterdam 1899. 8⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen, Juni 1899. 1899. 8⁰.
Verslag, Juni 1899. 1899. 8⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks, I. Aflev. 2. 1899. 8⁰.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tomo 59, parte 1. 1899. 8⁰.

Accademia Olimpica in Vicenza:

Atti. Vol. 30, 31. 1897—98. 8⁰.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VIII, No. 4. 1899. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Report for the year 1897—1898. 1899. 8⁰.
Annual Report of the Commissioner of Educat. for 1897—98. Vol. 2. 1899. 8⁰.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Division of biological Survey. Bulletin No. 12. 1900. 8⁰.
„ „ „ „ North America Fauna No. 17. 1900. 8⁰.
„ „ vegetable Physiology. Bulletin No. 18. 1899. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin No. 40. 1900. 4⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report of the U. S. National-Museum. Part I. 1899. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections, No. 1173. 1899. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 150—165. 1898—99. 8⁰.
Annual Report XIX. 1897—98. Part 2—4 mit Atlas. XX. 1898—99. Part 1 und Part 6 in 2 vols. 1899. 4⁰.
Survey Monographs XXXII, 2, XXXIII, XXXIV, XXXVI-XXXVIII. 1899. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 32. Jahrg., 2. Hälfte. 1899. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrgang 1899, Band 49, Heft 3. 1899. 4⁰.
Verhandlungen. 1899, No. 11—18; 1900, No. 1—5. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Abhandlungen. Band 1, Heft 1—5. 1899. 4⁰.
Mittheilungen. Band 42. 1899. 8⁰.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1897. Neue Folge. Band 34. 1899. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1900, No. 2—27. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 29, Heft 6. 1899. Band 30, Heft 1—2. 1900. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 50, Heft 1—4. 1900. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band 14, No. 3, 4. 1899. 4⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. Band 30. 1899. gr. 8⁰.
Mittheilungen. 1898/99, No. 4; 1899/1900, No. 1—4. gr. 8⁰.

Oriental Nobility Institute in Woking:

Vidyodaya. Vol. 28, No. 10—12. Calcutta 1899. 8⁰.

Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:

Die Handschriften der herzogl. Bibliothek zu Wolfenbüttel. Bd. 7. 1900. 4⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. Neue Folge. Band 32, No. 2, 3. 1899—1900. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1899, No. 6, 7. 8⁰.
Festschrift zur Feier ihres 50jährigen Bestehens. 1899. 4⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Band 41. 1899. 8⁰.
Jahresbericht für 1898. 1899. 8⁰.

Schweizerische Meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen 1897. 34. Jahrg. 1899. 4⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge z. Geologie der Schweiz. Geotechn. Serie, Liefg. I. Bern 1899. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band XXV, 1. 1900. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Neujahrsblatt auf das Jahr 1900. 102 Stück. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 44. Jhrg. 1899, H. 3 u. 4; 45. Jhrg. 1900, H. 1 u. 2. 1900. 8⁰.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. N. F., Bd. I. 1899. 4⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Ludwig Bach in Würzburg:

Zur Lehre von den Augenmuskellähmungen und den Störungen der Pupillenbewegung. Leipzig 1899. 8⁰.
Experimentelle Untersuchungen über den Verlauf der Pupillarfasern. Wiesbaden 1899. 8⁰.

Léon Bollack in Paris:

Kurze Grammatik der blauen Sprache, deutsch von A. Lévy-Picard. Paris 1900. 8°.

Sophus Bugge in Christiania:

S. Rygh, Norske Gaardnavne. Bd. III, IV. Kristiania 1900. 8°.

Paléologos C. Candargy in Athen:

Communication universelle à Messieurs les savants de notre planète. Athènes 1899. 8°.

Ernst Dümmler in Berlin:

Jahresbericht über die Herausgabe der Monumenta Germaniae historica. Berlin 1900. 8°.

Sophus Elvins in Kopenhagen:

Minder fra Roskilde Latinskole efter J. H. Larsens Optegnelser. Kjöbenhavn 1900. 8°.

V. Fausböll in London:

The Dhammapada. London 1900. 8°.

Albert Grünwedel in Berlin:

Buddhistische Kunst in Indien. Berlin 1900. 8°.
Mythologie des Buddhismus. Leipzig 1900. 4°.

Gottlieb Haberlandt in Graz:

Briefwechsel zwischen Franz Unger u. Stephan Endlicher. Berlin 1899. 8°.

Ernst Häckel in Jena:

Kunstformen der Natur, Liefg. IV. Leipzig 1900. Fol.

Ernst Hartwig in Bamberg:

Der veränderliche Stern von Algoltypus z Herculis. Bamberg 1900. 8°.

F. R. Helmert in Potsdam:

Neuere Fortschritte in der Erkenntniss der mathematischen Erdgestalt. Leipzig 1900. 8°.

Philipp Holitscher in Budapest:

Giordano Bruno. Historisches Drama. Stuttgart s. a. 8°.

A. von Kölliker in Würzburg:

Sur l'entrecroisement des pyramides chez les marsupiaux et les monotrêmes. Paris 1900. 4°.
Ueber das Chiasma. Jena 1899. 4°.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. IX. Band, Heft 1—3. Leipzig 1900. 8°.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. I. Fortsetzung. München 1900. 8°.

Marcus Landau in Wien:

Geschichte der italienischen Literatur im XVIII. Jahrh. Berlin 1899. 8°.

Gustav C. Laube in Prag:

Neue Schildkröten und Fische aus der böhmischen Braunkohlenformation. Prag 1900. 4°.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The dead Hand. Philadelphia 1900. 8⁰.

Eduard Löwenthal in Berlin:

Der Bankrott d. Darwin-Häckel'schen Entwicklungstheorie. Berl. 1900. 8⁰.

Gabriel Monod in Paris:

Revue historique. Tom. 72, No. 1, 2, Janvier-Avril; Tom. 73, No. 1, Mai-Juin. Paris 1900. 8⁰.

P. Moutier in Rouen:

Essais sur l'organisation rationnelle de la comptabilité à parties doubles, Iere étude. Rouen 1899. 8⁰.

Fridtjof Nansen in Christiania:

The Norwegian North Polar-Expedition 1893—1896. Scientific Results, Vol. I. 1900. 4⁰.

E. Pick in Strassburg:

Zur Kenntniss der peptischen Spaltungsprodukte des Fibrins. Theil I. Strassburg 1899. 8⁰.

Count Plunkett in Dublin:

The Jacobite War in Ireland (1688—1691). 3. edition. Dublin 1894. 8⁰.

Alexander Pongrácz in Budapest:

Turanische Sprach- u. Volks-Studien (in ungar. Sprache). Budapest 1900. 8⁰.

Anton Redtenbacher in Wien:

Die steirischen und oberösterreichischen Redtenbacher. Wien 1900. 8⁰.

Dietrich Reimers Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 5. Jahrg., Heft 1. Berlin 1900. 4⁰.

Seitz und Schauer in München:

Deutsche Praxis 1900. No. 1—11. München. 8⁰.

Lucian Schermann in München:

Orientalische Bibliographie. XIII. Band (für 1899), 1. Hälfte. Berl. 1900.

Emil Selenka in München:

Der Schmuck des Menschen. Berlin 1900. 4⁰.

John Shaw in San Francisco:

Thought and its Basis. San Francisco 1899. 8⁰.

Michele Stossich in Triest:

Contributo allo studio degli Elminti. Trieste 1900. 8⁰.

August Sturm in Naumburg a. S.:

Revision der gemeinrechtlichen Lehre vom Gewohnheitsrecht unter Berücksichtigung des neuen deutschen Reichsrechts. Leipzig 1900. 8⁰.

Giacomo Tropea in Messina:

Studi sugli Scriptores historiae Augustae IV. Messina 1900. 8⁰.

Nikolaus Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. III, pars 1 Andromacha. Lipsiae 1900. 8⁰.

Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1900.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 24, part 1. 1900. 8°.
Memoirs. Vol. I, part 2. 1900. 4°.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis za godinu. 1899—1900. 8°.
Rad. Bd. 142. 1900. 8°.
Monumenta historico-juridica. Vol. VII, 2. 1900. 8°.
La Cathédrale de Djakovo. 1900. fol.
Zbornik za narodni zivot. Bd. V, 1. 1900. 8°.

Kgl. kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv in Agram:

Vjestnik. Bd. II, 3 u. 4. 1900. 4°.

University of the State of New-York in Albany:

College Department. 2d annual Report 1899. Vol. 2.
Professional Education in the United States. 1900. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I. Sectie. Deel VII, No. 1—5; II. Sectie Deel VII, No. 1—3. 1899—1900. 4°.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. N. Reeks. Deel II, No. 3. 1899. 4.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jahr 1899/1900, Theil VIII.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks. Deel III. 1899. 8°.
Jaarboek voor 1899. 1900. 8°.
Prijsvers: Sosii fratres etc. 1900. 8°.

Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres in Antwerpen:

Handelingen. 1899. 4°.

Wissenschaftliche Gesellschaft in Athen:

Athena. Bd. I—XI, XII, 1—4. 1899—1900. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

34. Bericht. 1900. 8⁰.

Peabody Library in Baltimore:

Memoirs from the Biological Laboratory. IV, 4. 1900. 4⁰.
Second Catalogue of the Library. Part III, IV. E—K. 1898—99. 4⁰.
33th and 34th annual Report. 1899, 1900. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. 19, No. 142, 143. 1899. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. 21, No. 3, 4; Vol. 22, No. 1. 1899—1900. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 20, No. 1—4. 1899. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 21, No. 6; Vol. 22, No. 1—6; Vol. 23, No. 1—4. 1899—1900. 8⁰.
Johns Hopkins University Studies. Series XVII, No. 6—12; Series XVIII, No. 1—4. 1899—1900. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. No. 98—108. 1899—1900. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VII, No. 5—9; Vol. VIII, No. 1—2. 1899. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Bd. XII, 3. 1900. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 42, afl. 2—6. 1900. 8⁰.
Notulen. Deel 37, afl. 4, 5; Deel 38, afl. 1. 1900. 8.
Verhandelingen. Deel 51, stuk 2—4. 1900. 4⁰.
Taalkaart van de Minahasa.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 59. 1900. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte. Bd XXI, 1. 1899. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Essai de bibliographie francaise sur les Serbes et les Croates 1544—1900 par Nic. S. Petrovitch. 1900. 8⁰.

Observatoire astronomique et meteorologique de Belgrade:

Bulletin. Janvier—Juillet, No. 1—7. 4⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

An Account of the Crustacea of Norway by G. O. Sars. Vol. 3, part 5—10. 1900. 4⁰.
Aarbog für 1900. 1900. 4⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1900, No. 23—38. gr. 8⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 10, 32, 33. 1900. 4⁰.

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Berlin:

Ableitung der Declinationen und Eigenbewegungen der Sterne, von Fritz Cohn. 1900. 4°.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 33. Jahrg., No. 12—19 und Sonderheft. 1900—1901. 8°.

Allgemeine Elektricitätsgesellschaft in Berlin:

Elektrischer Einzelantrieb und seine Wirtschaftlichkeit. 1900. 4°.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 52, Heft 1—3. 1900. 8°.

Deutsche physikalische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Jahrg. 2, No. 12, 12a, 13—17. Leipzig 1900. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. 13, Inhaltsverzeichnis, Bd. 14, No. 7—20. 1900—1901. 8°.
Verhandlungen. 1899—1900, No. 11—15; 1901, No. 1, 2. 8°.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahresbericht über das Jahr 1899. 1900. gr. 8°.
Jahrbuch. Bd. XV, Heft 2, 3. 1900. 4°.

K. preuss. geodätisches Institut in Berlin:

Veröffentlichung. Neue Folge, No. 4. Potsdam 1900. 8°.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Regenkarte der Provinzen Westpreussen und Posen, v. G. Hellmann. 1900. 8°.
Bericht über das Jahr 1899. 1900. 8°.
Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1898. 1900. 4°.
Veröffentlichungen. 1899, Heft 2. 1900. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. 29, Heft 1—3. 1900. 8°.

K. Universität in Berlin:

Schriften aus den Jahren 1899/1900 in 4° u. 8°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 49, 1900, No. 14—24; Jahrg. 50, 1901, No. 1. 1900—1901. gr. 8°.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XIII, 2. Leipzig 1900. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Bd. XV, 7—12. 1900. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 20. Jahrg., 1900, Heft 7—12. 1900. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 25. Bd. Zürich 1900. 8°.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:
Neue Denkschriften. Bd. 33, 2; 36, 1, 2; 37. 1898—1900. 4°.

Historischer Verein in Bern:
Archiv. Bd. 16, Heft 1. 1900. 8°.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:
Atti e Memorie. Serie III. Vol. 18, fasc. 1—3. 1900. 8°.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:
Sitzungsberichte 1900, 1. Hälfte. 8°.

Universität in Bonn:
Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4° u. 8°.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:
Bonner Jahrbücher. Heft 105. 1900. 4°.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:
Verhandlungen. 57. Jahrg., 1. Hälfte. 1900. 8°.

Société Linnéenne in Bordeaux:
Actes. Vol. 54. 1899. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1900. No. 13—24. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:
Proeedings. Vol. 35, No. 10—27; Vol. 36, No. 1—8. 1899—1900. 8°.

American Philological Association in Boston:
Transactions and Proceedings. Vol. 30. 1899. 8°.

Archiv der Stadt Braunschweig:
Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. II, Abth. 3. 1900. 4°.

Ortsverein für Geschichte und Altertumskunde zu Braunschweig und Wolfenbüttel in Braunschweig:
Braunschweigisches Magazin. Bd. 5, Jahrg. 1899. fol.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:
8. Jahresbericht für die Jahre 1891/92 u. 92/93. 1900. 8°.

Meteorologische Station in Bremen:
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1899. 1900. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:
Abhandlungen. Bd. XVI, 3. 1900. 8°.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:
77. Jahresbericht 1899 und Ergänzungsheft. 1900. 8°.

Deutscher Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:
Zeitschrift. 4. Jahrg., Heft 3, 4. 1900. gr. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:
Mémoires couronnés. Tom. XV, fasc. 5, 6. 1900. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tom. 14, No. 6—10. 1900. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:
Bulletin. a) Classe des lettres 1900, No. 5—11. 1900. 8⁰.
b) Classe des sciences 1900, No. 5—11. 1900. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:
Analecta Bollandiana. Tom. 19. Fasc. 3, 4. 1900. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:
Bulletin. Tome 14, Fasc. 2—4. 1900. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:
Almanach. 1900. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mitteilungen.) Bd XXIX, 3, 4; XXX, 1, 2. 1899—1900. 8⁰.
Történettud. Ertekezések. (Historische Abhandlungen.) Bd. XVIII, 7—10. 1899—1900. 8⁰.
Archaeologiai Ertesitö. (Archäolog. Anzeiger.) Bd. XIX, 3—5; XX, 1, 2. 1899—1900. 4⁰.
Tarsadalmi Értekezések. (Staatswissensch. Abhandlungen.) Bd. XII, 4, 1899. 8⁰.
Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissensch. Abhandlungen.) Bd. XVII. 3—5. 1899—1900. 8⁰.
Margalits Ede, Horvát történelmi Repertorium. Bd. I. 1900. 8⁰.
Réthi L., Corpus nummorum Hungariae. Bd. 1, Heft 1. 1899. 4⁰.
Méhely L., Monographia chiropterorum Hungariae. 1900. gr. 8⁰.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) Bd. XVII, 3—5; XVIII, 1, 2. 1899—1900. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mitteilungen.) Bd. XXVII, 4. 1899. 8⁰.
Mathematische und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn. 16. Band, 1898. 1899. 8⁰.
Rapport. 1899. 8⁰.
Bölcseszettudományi Értekezések. Bd. III, 4. 1900. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:
A Magyar kir földtani intézet évkönyve. Bd. XIII, 4. 1900. 4⁰.
Mitteilungen. Bd. XII. 1. 2; XIII. 3. 1900. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 30, 1—7. 1900. 8⁰.
Generalregister zu Jahrg. 1882—1891 des Jahresberichtes. 1899. 4⁰.
Joh. Böckle u. Thomas v. Szontagh, Die kgl. ungarische geologische Landesanstalt. 1900. 4⁰.
Die Tertiärbildungen des Beckens der Siebenbürgischen Landesteile II, von Ant. Koch. 1900. gr. 8⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:
Comunicaciones. Tom. I, No. 6, 7. 1900. 8⁰.

Officina meteorologica Argentina in Buenos Aires:
Anales. Tomo XIII. 1900. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

M. Raciborski, Parasitische Algen und Pilze Java's. Theil III. 1900. 4⁰.
Mededeelingen. No. 29, 33, 38—41, 43. 1900. 4⁰.
Verslag over het jaar 1899. 1900. 4⁰.
Bulletin. No. 4-6. 1900. 4⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Ser. II. Tom. XXI. 1898—99. Memoriile sect. istorice.
Buletinul. Ser. II. Tom. XXII, 1899—1900. Partea administrativa Bucaresci. 1900. 4⁰.
Discursuri de recepţiune. XXI. XXII. 1900. 4⁰.
Indice alfabetic zu Vol. XI—XX der II. Serie. 1900. 4⁰.
Studiĭ asupra Pelagrei de Joan Neagoe. 1900. 4⁰.
Studiĭ istorice asupra Chilieĭ şi Cetăliĭ-Albe, de Nic. Jorga. 1900. 8⁰.
Fragmente din Istoria Românilor de Eudoxiu Baron de Hurmuzaki. Tom. III. 1900. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1899. January—July 1900, and Annual Summary 1899. 1900. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. 6, part 6, 7; Vol. 11, part 2; Vol. 12, part 1. 1900. fol.
Report on the Administration in 1899—1900. 1900. fol.

Departement of Revenue and Agriculture of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall of 1900. 1900. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

General Report 1899—1900. 1900. 4⁰.
Memoirs. Vol. 29, 30, part 1. 1899—1900. gr. 8⁰.
Paläontologia Indica. Ser. XV, Vol. 3, part 1. 1899. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 964—970. 1900. 8⁰.
Journal. No. 384—386. 1900. 8⁰.
Proceedings. 1900. No. 2—8. 1900. 8⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 36, No. 1—4; Vol. 37, No. 1, 2. 1900. 8⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Circulars 1 to 50. 1900. 4⁰.

The Adams Memorial Committee in Cambridge:

The scientific Papers of John Couch Adams. Vol. II. 1900. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. X, part 6. 1900. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bollettino. Fasc. 63. 1900. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. III. Berlin 1900. 4⁰.
Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt 1897/1900. Berlin 1900. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Decaden. Monatsberichte 1899. Jahrg. II. 1900. 4°.
Abhandlungen. Heft 4. Leipzig 1899. 4°.

Academy of sciences in Chicago:

Bulletin. No. III, part 1. 1898. 8°.

John Crerar Library in Chicago:

5th annual Report for the year 1899. 1900. 8°.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 42—44, 46—49. 1899—1900. 8°.

Yerkes Observatory of the University in Chicago:

Bulletin. No. 13—15. 1900. 8°.

Redaction of the astrophysical Journal in Chicago:

The Astrophysical Journal. Vol. XI, No. 5; Vol. XII, No. 1—4. 1900. gr. 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Skrifter. I. Mathem.-naturwiss. Klasse 1900, No. 1—4. II. Histor.-filos. Klasse 1900, No. 1—5. 4°.

Meteorologisches Institut in Christiania:

Wolkenbeobachtungen in Norwegen 1896—97 von N. J. Föyn. 1900. fol.
Jahrbuch für 1899. 1900. fol.

Kgl. Norwegische Universität in Christiania:

Norway. Official Publication for the Paris Exhibition 1900. 1900. 8°.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 43. 1900. 8°.

Lloyd Museum and Library in Cincinnati:

Bulletin. No. 1. 1900. 8°.

Stadtarchiv in Danzig:

Des Syndicus der Stadt Danzig Gottfried Lengnich Jus publicum civitatis Gedanensis. 1900. 8°.

Westpreussischer Geschichtsverein in Danzig:

Zeitschrift. Heft 42. 1900. gr. 8°.
Geschichte der ländlichen Ortschaften des Kreises Thorn von Hans Maercker. Lief. III. 1900. 8°.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:

Quartalblätter. Jahrg. 1899. 8°.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Bd. 8, Theil 6. 1900. 8°.

Verein für Geschichte und Naturgeschichte in Donaueschingen:

Schriften. Heft 10. 1900. Tübingen. 8°.

K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Festschrift zum 75 jährigen Jubiläum. 1900. 8°.
Die Sammlung des k. sächs. Altertumsvereins, Schluss (Tafel 31—100) von O. Wanckel. 1900. 4°.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 21. 1900. 8°.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. III[d]. Series. Vol. 5, No. 5; Vol. 6, No. 1. 1900. 8⁰.

Observatory of Trinity College in Dublin:

Astronomical Observations Part IX. 1900. 4⁰.

Royal Society in Dublin:

Economic Proceedings. Vol. I, part 1. 1899. 8⁰.
Proceedings. Vol. IX, part 1. 1899. 8⁰.
Transactions. Vol. VII, part 2—7. 1899—1900. 4⁰.
Index of the Proceedings and Transactions 1877—98. 1899. 8⁰.

Pollichia in Dürkheim:

Festschrift zur 60jährigen Stiftungsfeier. 1900. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 22, No. 6—12. 1900. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 23, No. 2. 1900. 8⁰.
Transactions. Vol. 39, part 2—4. 1899—1900. 4⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 3, No. 1. 1900. 8⁰.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 14. Jahrg. 1900. 8⁰.
Die geschichtliche Entwicklung des Mansfelder Kupferschieferbergbaues von Herm. Grössler. 1900. 8⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 26. 1900. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. 23, disp. 1, 2. 1900. 8⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:

Giornale. Vol. 13. 1900. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für 1898/99. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. Bd. XVII. Berlin 1900. 8⁰.
Societatum Litterae. Jahrg. XIII. 1899. No. 1—12. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:

Berichte. Bd. XI, 2. 1900. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i. Br.:

„Schau-ins-Land.“ 27. Jahrlauf. 1900. fol.

Universitätsbibliothek in Freiburg i. Br.:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Institut national in Genf:

Bulletin. Tom. 35. 1900. 8⁰.

Observatoire in Genf:

L'Éclipse totale de soleil du 28. Mai 1900. 8⁰.
Observations météorologiques, année 1898. 1900. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Tom. 33, No. 3. 1900. 4⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mittheilungen. N. F. Bd. 9. 1900. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1900. No. 5—11. Berlin. 4⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1900. Heft 1 mit Beiheft, Heft 2. Berlin. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1900. Heft 1, 2. Berlin. 4⁰.
Geschäftliche Mittheilungen. 1900. Heft 1. Berlin. 4⁰.
Abhandlungen der philosophisch-historischen Classe. N. F. Bd. III, No. 3; Bd. IV, No. 1—3. Berlin 1900. 4⁰.
Abhandlungen der mathemat.-phys. Classe. N. F. Bd. 1, No. 4.
Carl Friedr. Gauss' Werke. Bd. VIII. Leipzig 1900. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. 10, No. 3. 1900. 8⁰.

Universität in Graz:

Verzeichnis der akademischen Behörden 1900/01. 1900. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1899. Heft 36. 1900. 8⁰.

Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein in Greifswald:

Pommersche Jahrbücher. Bd. 1. 1900. 8⁰.

K. sächs. Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Von dem 350jährigen Jubelfeste der k. sächs. Fürsten- und Landesschule zu Grimma. 1900. gr. 8⁰.
Das Kollegium der Fürsten- und Landesschule Grimma von 1849—1900. 1900. gr. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel VII, aflev. 3 u. 4; Deel VIII, aflev. 1 u. 2. 1900. 8⁰.

K. Niederländische Regierung im Haag:

Die Triangulation von Java v. J. A. C. Oudemans. Lief. 6. 1900. 4⁰.

Ministerie van Binnenlande Zaken im Haag:

Nederlandsch kruidkundig Archief. III. Ser. Deel 2, stuk 1. Nijmwegen 1900. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II tom. VII, part 1 u. 2. 1900. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises. Sér. II, tom. 4, livr. 1. 1900. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. X, 1. 1899. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 36, No. 6—11. 1900. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Bd. 45, Heft 2 u. 3. Leipzig. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 72, Heft 6; Bd. 73, Heft 1—4. Stuttgart 1900. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:

Neue Mittheilungen. Bd. XX, Heft 3, 4. 1900. 8⁰.

Deutsche Seewarte in Hamburg:

22. Jahresbericht für das Jahr 1899. 1900. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Schriften der Hamburger wissenschaftl. Anstalten a. d. J. 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Sternwarte in Hamburg:

Mitteilungen. No. 6. 1900. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrg. 1900. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Harry Rosenbusch, Aus der Geologie von Heidelberg. Akademische Rede. 1900. 4⁰.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. X, Heft 1. 1900. 8⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes. Lief. 11. 1900. 4⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 59, 60. 1900. 8⁰.

Öfversigt XL—XLII. 1897—1900. 1898—1900. 8⁰.

Commission géologique de Finlande in Helsingfors:

Bulletin. No. 11. 1900. 8⁰.

Carte géologique. Feuille No. 35 avec texte explicatif. 1900. 8⁰.

Société finno-ougrienne in Helsingfors:

Axel O. Heckel, Ethnographische Forschungen II, Trachten und Muster der Mordvinen. 1899. 4⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Die Repser Burg. Von Heinr. Müller. 1900. 4⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mitteilungen. Bd. 49. 1900. 8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 35. u. 36. Heft. 1900. 8⁰.

Royal Society of Tasmania in Hobart town:

Papers and Proceedings 1898—99. 1900. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 27. Jahrg. 1900. 8⁰.

Historischer Verein in Ingolstadt:

Sammelblatt. Heft 24. 1899. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Heft 44. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. Jahrg. 23 u. 25. 1898—1900. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. IV, No. 5—9. 1900. 8⁰.

Université de Jassy:

Annales scientifiques. Tom. 1, fasc. 1—2. 1900. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Zoologische Forschungen in Australien. Lieferung 18 (Text und Atlas). 1901. fol.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 33, 34. 1900. 8⁰.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte 1899. 1900. 8⁰.

Verhandlungen. Bd. XX, 2. 1900. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Bd. XII, 2. 1900. 8⁰.

Redaktion des Pfälzischen Museums in Kaiserslautern:

Pfälzisches Museum. 17. Jahrg., No. 4. 1900. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht des Centralbureaus für das Jahr 1899. 1900. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Karlsruhe:

Verhandlungen. Bd. XII und XIII, 1895—1900. 1900. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. IIᵉ Série. Vol. 9, No. 3, 4; Vol. 10, No. 1. 1899—1900. 8⁰.

Universität Kasan:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900.
Godischnij. Akt 1900. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:

Abhandlungen und Bericht XLV. 1900. 8⁰.

Société des sciences physico-chimique à l'Université de Kharkow:

Traveaux. Tom. 24—27. 1898—1900. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:

Sapiski 1900. No. 3, 4. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Bd. 30. 1900. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. III, Heft 2; Bd. IV, Heft 1. 1900. 4⁰.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Bd. 40, No. 5—9. 1900. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht über 1899. 1900. 8⁰.
Carinthia I. 90. Jahrg., No. 1—6. 1900. 8⁰.
Archiv für vaterländische Geschichte. 19. Jahrg. 1900. 8⁰.

Siebenbürgischer Museumsverein in Klausenburg:

Sitzungsberichte der medizin.-naturw. Sektion. Bd. XXI, I. Abteilung, 3 Hefte. 1899. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:

Mittheilungen. Heft 30. 1900. 8⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1900. No. 4, 5. 8⁰.
Skrifter. 6. Serie. Historisk afd. Tom. 5, No. 1. 1900. 4⁰.

K. Dänisches Kultusministerium in Kopenhagen:

Le Danemark. 1900. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger, II. Raekke. 15. Bd., 1. u. 2. Heft. 1900. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Studenterne fra Kjöbenhavns Universitet 1860. 1900. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger 1900. April—Juli—October. 8⁰.
Rozprawy. 1. filolog. Serya II, Tom. 13.
2. mathemat. Serya II, Tom. 15, 17. 1899—1900. 8⁰.
Materyaly antropologiczne. Tom. 4. 1900. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi fizyograficzreij. Bd. 34. 1899. 8⁰.
J. Rostafinski, Slownik. 1900. 8⁰.

American Mathematical Society in Lancaster:

Transactions. Vol. I, No. 2. 1900. 4⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. 36. Bd. 1900. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série. Vol. 36, No. 137. 1900. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. VIII, No. 1, 4. 1899.
Bulletin. Vol. I, No. 2, 3. 1900. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie, Deel XIX, 1, 2. 1900. 8⁰.
Handelingen en Mededeelingen, jaar 1899—1900. 8⁰.
Levensberichten 1899—1900. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XIX, 1, 2; XX, 2. 1900. 4⁰.
Abhandlungen der mathem.-physikalischen Classe. Bd. XXVI, 3, 4. 1900. 4⁰.
Berichte der philol.-histor. Classe. Bd. 52, IV—VIII. 1900. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Bd. 52, III—VI. 1900. 8⁰.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Preisschriften. No. XXXVI. 1900. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 61, Heft 10—12; Bd. 62, Heft 1—11. 1900. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

58. Jahresbericht. 1900. 8⁰.
Bibliotheks-Katalog. II. Nachtrag, 1896—1900, 15. April 1900. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XVII, 2. 1900. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XV, No. 58 u. 59; Vol. XVI, No. 61. 1900. 8⁰.

Royal Society in London:

List of the Fellows. 30. Nov. 1900. 4⁰.
Proceedings. Vol. 66, No. 431—434; Vol. 67, No. 435—439. 1900/01. 8⁰.
Philosophical Transactions. Ser. A, Vol. 192—194; Ser. B, Vol. 191, 192. 1899/1900. 4⁰.
Reports to the Malaria Committee, I.—III. Series 1899—1900. 1900. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 60, No. 8—10; Vol. 61, No. 1. 1900. 8.

Chemical Society in London:

Journal. No. 453 (Aug.), No. 454 (Sept.) and Supplementary-Number, No. 455—457 (Oct.—Dec. 1900), No. 458 (Jan. 1901). 1899—1900. 8⁰.
Proceedings. Vol. 16, No. 227—229. 1900. 8⁰.

Linnean Society in London:

Proceedings. 112th Session from Nov. 1899 to June 1900. 1900. 8⁰.
The Journal. Botany, Vol. 34, No. 240, 241; Zoology, Vol. 28, No. 179, 180. 8⁰.
The Transactions. Botany, Vol. V, 11, 12; Zoology, Vol. VII, 9—11. 1899. 4⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 83. 1900. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1900, part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1899, part II, III. 8⁰.
Transactions. Vol. XV, part 5. 1900. 4⁰.
A List of the Fellows. 1900. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1601—1629. 1900. 4⁰.

Reale Accademia di scienze in Lucca:

Atti. Tomo 30. 1900. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 27, livr. 3. 1900. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXXV, 1, 2. 1899. 4⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 55. Stans 1900. 8⁰.

Société d'agriculture science et industrie in Lyon:

Annales. VII. Série, tom. 6, 1898. 1899. 4⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Tome 46. 1900. 4⁰.

Université in Lyon:

Annales. Nouv. Série: I. Scienes, fasc. 3.
II. Droit, Lettres, fasc. 3. Paris 1900. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. VIII, No. 2. 1900. 8⁰.

The Government Observatory in Madras:

Report 1899—1900. 1900. fol.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 37, cuad. 1—6. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen 1898—1900. 1900. 8⁰.

Fondazione scientifica Cagnola in Mailand:

Atti. Vol. XVII. 1900. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie II. Vol. 32. 1899. 8⁰.
Memorie. a) Classe di lettere. Vol. 21, fasc. 1, 2.
b) Classe di scienze. Vol. 18, fasc. 7–10. 1899—1900. 4⁰.

R. Osservatorio astronomico di Brera in Mailand:

Osservazioni meteorologiche nell' anno 1899. 1900. 4⁰.
Pubblicazioni. No. 39. 1900. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 39, fasc. 2. 1900. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Serie III. Anno XXVII, fasc. 26, 27. 1900. 8⁰.

Comitato per le onoranze al Prof. Luciani in Mailand:

Ricerche di fisiologia e scienze affini dedicate al Prof. Luigi Luciani. 1900. 4⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 44, part IV, V. 1900. 8⁰.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tome X, Préface et fascicule 1—6. 1900. 4⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Alterthums. Lief. 15. 1900. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Bd. 5, Heft 3. 1900. 8⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:

Proceedings. Vol. XII (New Series), part 2. 1900. 8⁰.

Accademia Peloritana in Messina:

Atti. Anno XIV. 1899—1900. 8⁰.

Universität in Messina:

CCCL Anniversario della Università di Messina. 1900. 4⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. N. Ser. Anno 5, fasc. 2, 3. 1900. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. 3e Série année 27 u. 28. 1897—98. 1900. 8⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletin mensual. Noviembre y Diciembre 1899, Enero, Febrero, Marzo, Junio 1900. 1900. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional de Tacubaya in Mexico:

El Clima de la Republica Mexicana por M. Moreno y Anda y Antonio Gomez Año II. Mexico 1900. 8⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias. Tomo 14, No. 1—10. 1899—1900. 8°.

Museo nacional in Montevideo:

Anales. Tom. 2, fasc. 15—16; Tom. 3, fasc. 4. 1900. 4°.

Numismatic and Antiquarian Society of Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. III. Ser. Vol. 2, No. 2—4. 1899. 8°.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1899, No. IV. 1900. 8°.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:

Matematitscheskij Sbornik. Bd. XXI, 1, 2. 1900. 8°.

Universität Moskau:

Utschenia Sapiski. Bd. XIV—XVI. 1899. 8°.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:

Publications. Vol. IV, 1900, Sacramento. 1900. 4°.

Statistisches Amt der Stadt München:

Münchener statistische Jahresübersichten für 1899. 1900. 4°.

K. Hydrotechnisches Bureau in München:

Jahrbuch. 2. Jahrg., Heft 2, 3. 1900. 4°.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt 1900. No. 5—8. 4°.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichnis der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen. I. u. II. Abteilung mit Nachträgen. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1900—1901. 1900. 8°.
Bericht für das Jahr 1899/1900. 1900. 4°.
Programm für das Jahr 1900—1901. 1900. 4°.

Verlag der Hochschulnachrichten in München:

Hochschulnachrichten.

Erzbischöfl. Ordinariat in München:

Amtsblatt.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4° und 8°.
Amtliches Verzeichnis des Personals. Winter-Semester 1900/01. 1900. 8°.
Verzeichnis der Vorlesungen. Winter-Semester 1900/01. 1900. 4°.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Bd. IX. 1899. 1900. 8°.

Historischer Verein in München:

Altbayerische Monatsschrift 1900. Heft 4—6. 4°.

Verein für Naturkunde in München:

I. Jahresbericht 1898—99. 1900. 4°.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:

Beobachtungen der meteorologischen Stationen des Königreichs Bayern. Jahrg. 20 (1890). Heft 4. 4⁰.

Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:

27. Jahresbericht für 1898/99. 1899. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Sér. II, Tome 16, fasc. 34; Sér. III, Tome 1, fasc. 3. 1900. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 31. 1900. 8⁰.
Rendiconto. Anno 38. 1900. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie III. Vol. 6, fasc. 5—7. 1900. gr. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. 14, Heft 1 u. 2. Berlin 1900. 8⁰.

Société des sciences naturelles in Neuchatel:

Bulletin. Tom. 26. Année 1897—98 et Table des matières des tomes 1—25. 1898. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Series. Vol. 10, No. 55—60; Vol. 11, No. 61. 1900. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Memoirs. Vol. II, part 1. 1899. 4⁰.
Annals. Vol. XII, No. 2, 3. 1900. 8⁰.

American Jewish Historical Society in New-York:

Publications. No. 8. 1900. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. XII, 1899. 1900. 8⁰.
Annual Report for the year 1899. 1900. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 32, No. 3, 4. 1900. 8⁰.

Archaeological Institut of America in Norwood, Mass.:

American Journal of Archaeology. II. Series. Vol. 4, No. 1—3. 1900. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Bd. XIII. 1900. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1899. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrg. 1899. 8⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. II. Ser. Vol. 5. 1899. gr. 8⁰.

R. Osservatorio astronomico in Padua:

All' Astronomo G. V. Schiaparelli. Omaggio 30 Giugno 1860 — 30 Giugno 1900. 4⁰.

Reale Accademia di scienze, lettere e belle arti in Palermo:

Atti. III. Serie. Vol. 5. 1900. 4°.
Bulletino. Anni 1894—98. 1899. 4°.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. 14, fasc. 5. 1900. 4°.
Atti del collegio degli ingegneri 1900 Jan.—Juni. 1899. 4°.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1900. No. 27—48. 8°.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 131, No. 1—27. 1900. 4°.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 704—709 (Août 1900 — Janvier 1901). 4°.

Musée Guimet in Paris:

Annales in 4°. Tome XVI, 4me partie Recueil de Talismans Laotiens. 1900. 4°.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 41, No. 1, 2. 1900. 8°.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1900, No. 2—4. 8°.
Nouvelles Archives. IV. Série. Vol. I, fasc. 1, 2. 1899. 4°.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 1899, fasc. 4. 8°.

Société des études historiques in Paris:

Revue. Nouv. Série. Tom. 2, No. 4—6. 1900. 8°.

Société de géographie in Paris:

La Géographie (Bulletin) Année 1900, No. 7—12. gr. 8°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 28, fasc. 2—4. 1900. 8°.

Société zoologique de France in Paris:

Mémoires. Tome 12. 1899. 8°.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Oeuvres de P. L. Tschebychef. Tom. I. 1899. 4°.
Byzantina Chronika. Tom. 6, No. 3, 4; Tom. 7, No. 1, 2. 1899—1900. 4°.
Mémoires. a) Classe historico-philologique. Vol. III, No. 6; Vol. IV, No. 1—7.
b) Classe physico-mathématique. Vol. VIII, No. 6—10; Vol. IX, No. 1—9; Vol. X, No. 1, 2. 1899—1900. 4°.
Bulletin. Ve Sér. Tom. 10, No. 5; Tom. 11, No. 1—5; Tom. 12, No. 1. 1899—1900. 4°.
Annuaire du Musée zoologique. Tom. 5, No. 1—3. 1900. 8°.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XVIII, No. 3—10. 1899—1900. 8°.
Mémoires. Vol. VII, No. 3 u. 4; Vol. IX, No. 5; Vol. XV, No. 3. 1899. 4°.

Kaiserl. botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. 15, fasc. 2; Tom. 17, fasc. 1, 2. 1898—1899. 8°.
Historische Skizze des kais. botan. Gartens. 1899. 8° (russ. Spr.)

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XX. 1900. 8°.
Verhandlungen. II. Serie. Bd. 37, Lief. 2; Bd. 38, Lief. 1. 1899—1900. 8°.

Kaiserl. freie ökonomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Volksschulstatistik in Russland. 1900. 8°.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 32, Heft 7 u. 8. 1900. 8°.

Physikalisch-mathematische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 32, No. 4—6. 1900. 8°.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Histoire de l'Observatoire phys. central 1849—1899 par M. Rykatchew. Partie I. 1900. 4°.
Annalen. Jahrg. 1898, Theil I, II. 1899. 4°.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Obosrenije (Vorlesungsverzeichnis) für 1900—1901. 1900. 8°.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1899, part III; 1900, part I. 8°.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. 48th annual Meeting at Richmond 1900. Baltimore 1900. 8°.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

Proceedings on the Death of Charles Janeway Stillé, President of the Society. 1900. 8°.
The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 24, No. 2 u. 3. 1900. 8°.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 36, No. 8—11. 1900. 8°.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 39, No. 161 u. 162. 1900. 8°.
Brinton Memorial Meeting held January 16th 1900. 1900. 8°.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XII, pag. 1—138. 1900. gr. 8°.
Atti. Vol. XVII. 1900. gr. 8°.

Società Italiana di fisica in Pisa:

Il nuovo cimento. Ser. IV. Tom. XI, Maggio e Giugno; Tom. XII, Luglio e Agosto. 1900. 8°.

Carnegie Museum in Pittsburgh:

Publications. No. 6 u. 7. 1899—1900. 8°.

Historische Gesellschaft in Posen:

Historische Monatsblätter. Jahrg. I, No. 4—7. 1900. 8°.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Rozprawy. Trída I, Ročník VII, číslo 1, 2; Trída II, Ročník VIII; Trída III, Ročník VII, číslo 1. 1899. gr. 8⁰.
Historický Archiv. Bd. 16. 1899. gr. 8⁰.
Vestník. Bd. VIII, No. 1—9. 1899—1900. gr. 8⁰.
Almanach. Ročník X. 1900. 8⁰.
Čeněk Zíbrt, Bibliografie České historie, Theil I. 1900. gr. 8⁰.
Sbírka pramenův Skupina I, Řada 1, číslo 2. 1899. gr. 8⁰.
Fr. Nušl, Prokop Diviš. 1899. gr. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Forschungen zur Kunstgeschichte Böhmens. Mit 1 Atlas. 1900. fol.
Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. III, Heft 1. 1900. 8⁰.
Mittheilung. No. 11, 12. 1900. 8⁰.
Jos. Mrha, Beiträge zur Kenntnis des Kelyphit. Wien 1899. 8⁰.
Jos. Langer, Untersuchungen über Biengift (II. Mitteilung), Sep.-Abdr. Gand u. Paris 1899. 8⁰.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Prager Tychoniana von F. J. Studnička. 1901. gr. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. 1900. Bd. 74, Heft 1—6. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Die Tychonischen Instrumente auf der Prager Sternwarte von L. Weinek. 1901. 4⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rectors für das Jahr 1899/1900. 1900. 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Bd. XX. 1900. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. VII. Heft. 1900. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt. XLIII. 1900. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Boletin mensual 1900, jan.—abril. 4⁰.
Annuario. 1900. 8⁰.
L. Cruls, Methodo para determinar as horas das Occultacões de estrellas pela Lua. 1899. 4⁰.

Augustana Library in Rock Island, Ill.:

Publications. Vol. 2. 1900. 4⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. IX, fasc. 5, 6. 1900. 8⁰.
Atti. Serie V, Rendiconti. Classe di scienze fisiche. Vol. IX, semestre 1, fasc. 11, 12; semestre 2, fasc. 1—11. 1900. 4⁰.
Atti. Ser. V, classe di scienze morali. Vol. VIII, parte 2. Notizie degli scavi Marzo—Agosto. 1900. 4⁰.
Rendiconto dell' adunanza solenne del Giugno. 1900. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bolletino. Anno 1900, No. 1, 2. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 53 (1899—1900), Sessione V—VII. 1900. 4⁰.

Kaiserl. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Bd. XV, fasc. 1—3. 1900. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Indici e cataloghi. XV. Biblioteca Riccardiana di Firenze. Vol. I, fasc. 8, 9. 1900. 8⁰.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Catalogo degli strumenti sismici e meteorologici per Luigi Fascianelli. 1900. 8⁰.

K. italienische Regierung in Rom:

Le Opere di Galileo Galilei. Vol. X. Firenze 1900. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 23, fasc. 1, 2. 1900. 8⁰.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4⁰ u. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III. Vol. 6, fasc. 2, 3. 1900. 8⁰.

Museo Civico in Rovereto:

Materiali per una bibliografia Roveretana per Giovanni de Corelli. 1900. 8⁰.

The American Association for the advancement of science in Salem:

Proceedings. 48th meeting at Columbus. August 1899. Easton 1899. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 40. Vereinsjahr. 1900. Salzburg. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Neujahrsblatt für 1900. 4⁰.
Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte. Bd. 27, Teil 2. 1900. 8⁰.
Max Gmür, Die verfassungsgeschichtliche Entwicklung. 1900. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Almanaque náutico. 1900. 8⁰.

Museu Paulista in S. Paulo:

Revista. Vol. IV 1900. 8⁰.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1897. Wien 1899. 4⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresbericht. 65. Jahrg. 1900. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bulletino di Archeologia. Anno 23. 1900. No. 5—11. 8⁰.
Nella Dalmazia Romana di Charles Diehl. 1900. 8⁰.
Ant. Mattiassevich-Caramaneo, Riflessioni sopra l'istoria di S. Doimo primo vescovo di Salona. 1900. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Briefe von Joh. Müller an Anders Retzius. 1900. 4°.
Statut et Reglement de la fondation Nobel. 1900. 8°.
Bihang til Handlingar. Vol. 25 (1899), Section 1—4. 1900. 8°.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 22, Heft 5. 1900. 8°.

Nordiska Museet in Stockholm:

Meddelanden 1898. 1900. 8°.
Tjugufemårsminne 1873—1898. 1900. 8°.
6 verschiedene kleinere Schriften.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. 34. Bd. 1900. Heft 6 (Juni). 8°.

Kaiserl. Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4° u. 8°.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. IX. Jahrg. 1900. Heft 1—4. 8°.

K. Württemberg. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Beschreibung des Oberamts Rottenburg. 2 Teile. 1899—1900. 8°.
Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrg. 1899. Teil I u. II. 1900. 4°.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Annual Mining Report for 1899. 1900. fol.
Mineral Resources. No. 7, 8. 1900. 8°.
Records. Vol. 6, part 4; Vol. 7, part 1. 1900. 4°.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. 33. 1899. 8°.

Observatoire astronomique et physique in Taschkent:

Publications. No. 1, 2 et Atlas. 1899—1900. 4°.

Earthquake Investigation Committee in Tokyo:

Publications. No. 3, 4. 1900. 4°.

Kaiserl. Universität Tokyo (Japan):

Calendar (1899—1900). 1900. 8°.
The Journal of the College of Science. Vol. XII, part 4; Vol. XIII, part 1. 1900. 4°.
Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. IV, No. 7. 1900. 4°.
The Bulletin of the College of Agriculture. Vol. 2, No. 1—7; Vol. 3, No. 1—5; Vol. IV, No. 1—3. 1894—1900. 8°.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. New Ser. Vol. 2, part 3. 1900. 8°.
Transactions. Vol. VI, part 1 u. 2. 1899. gr. 8°.

University of Toronto:

Studies. a) History. First Series. Vol. 4. 2d Series. Vol. I, p. 77—155. 4°.
b) Psychological. Series No. 2 u. 3. 1899. 4°.
c) Physiological. Series No. 1, 2. 1900. 4°.

Faculté des Sciences à l'Université in Toulouse:

Annales. IIe Série. Tome 2, fasc. 1. 1900. 4°.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XV, fasc. 1. 1900. 8°.

Universität Tübingen:

Verzeichnis der Doktoren im Jahre 1899—1900. 4°.
Schriften aus dem Jahre 1899/1900 in 4° u. 8°.

Tufts College Library in Tufts Coll. Mass.:

Studies. No. 6. 1900. 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 35, disp. 7—15. 1900. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Series III. Vol. 18, fasc. 2. 1900. 4°.

K. Universität in Upsala:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1899—1900 in 4° u. 8°.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

H. van Golder, Geschichte der alten Rhodier. Haag 1900. 8°.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Meteorologisch Jaarboek voor 1897, 49. Jaarg. 1900. 4°.

Physiologisches Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. V. Reeks. Tom. 2, aflev. 1. 1900. 8°.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Concorsi a premio. 1900. 8°.

Accademia di Verona:

Memorie. Vol. 74, fasc. 3; Vol. 75, fasc. 1, 2. 1899—1900. 8°.
Gio. Battista Perez, La provinzia die Verona ed i suoi vini. 1900. 8°.
Enrico Nicolis, Marmi, pietre e terre coloranti della Provinzia di Verona. 1900. 8°.

Redaction der Prace matematyczno-fizyczne in Warschau:

Prace. Tom. XI. 1900. 8°.

Bureau of Education in Washington:

Report of the Commissioner of Education for 1898—99. Vol. I. 1900. 8°.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Report of the Chief of the Division of Soils for 1900. 8°.
Yearbook 1899. 1900. 8°.
Division of Biological Survey. Bulletin, No. 13. 1900. 8°.
North American Fauna, No. 18 u. 19. 1900. 8°.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Report 1897—98. 1899. 4°.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 33. Jahrg., 1. Hälfte. 1900. 8°.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Südarabische Expedition. Bd. I. Die Somalisprache von Leo Reinisch. 1900. 4°.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Bd. 49, Heft 4; Bd. 50, Heft 1. 1900. 4°.
Verhandlungen. 1900. No. 6—12. 4°.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Abhandlungen. Bd. II. 1900. No. 1—7. 4°.

K. K. Gradmessungs-Commission in Wien:

Verhandlungen. 7. Juli 1899. 8°.
Astronomische Arbeiten. XI. Band. 1899. 4°.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1900, No. 28—42, 44—52, 4°; 1901, No. 1, 2. 4°.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXX, Heft 3—5. 1900. 4°.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Bd. 50, Heft 5—9. 1900. 8°.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Bd. XV, No. 1 u. 2. 1900. 4°.

K. K. Universität in Wien:

Bericht über die volksthümlichen Universitätsvorträge 1899/1900. 1900. 8°.
Oeffentliche Vorlesungen im Sommer-Semester 1900 und im Winter-Semester 1900/1901. 8°.
Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1900/1901. 1900. 8°.
Die feierliche Inauguration des Rektors für das Studienjahr 1900/1901. 1900. 8°.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien.

Schriften. Bd. 40, Jahrg. 1899/1900. 1900. 8°.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 53. 1900. 8°.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. Bd. 33, No. 4; Bd. 34, No. 1. 1900. 8°.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1900, No. 1. 8°.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen 1898. 35. Jahrg. 1900. 4°.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Neue Folge. Lief. IX. Bern 1900. 4°.

Schweizerisches Landesmuseum in Zürich:

7. u. 8. Jahresbericht. 1898 u. 1899. 1900. 8⁰.
Die Wandmalereien in der Waffenhalle des Schweizerischen Landesmuseums. 1900. 8⁰.
Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde. N. F. Bd. 2, No. 2. 1900. 4⁰.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen. No. 91. 1900. 8⁰.

Universität in Zürich:

Schriften aus dem Jahre 1899—1900 in 4⁰ u. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Albert I. Prince de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. XIII—XVI avec 2 cartes. 1899—1900. fol.
Jules Richard, Les campagnes cientifiques de S. A. le Prince Albert I[er] de Monaco. 1900. 8⁰.

Joh. Ambr. Barth in Leipzig:

Beiblätter zu den Annalen der Physik. Bd. 24. Stück 1—11. 1900. 8⁰.

Francis Bashforth in Cambridge:

A second Supplement to a revised Account of the Experiments made with the Bashforth Chronograph. 1900. 8⁰.

Hermann Böhlaus Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift der Savigny-Stiftung. Bd. 21 (Röm. u. Germ. Abth.). 1900. 8⁰.

Johann Brunner in München:

Das Postwesen in Bayern in seiner geschichtlichen Entwicklung von den Anfängen bis zur Gegenwart. 1900. 8⁰.

Luigi Cerebotani in München:

Meine Telegraphie. 1900. 4⁰.

Jos. Anton Endres in Regensburg:

Frobenius Forster, Fürstabt von St. Emmeran in Regensburg. Freiburg i. B. 1900. 8⁰.

Camille Gaspar in Brüssel:

Essai de Chronologie Pindarique. 1900. 8⁰.

M[me] V[ve] Godin in Guise (Aisne):

Le Devoir, Revue des questions sociales Année 1898, 1899 u. 1900. Paris. 8⁰.
Le Familistère Illustré 1880—1900. Paris. 8⁰.
Robert Owen par Auguste Fabre. Nimes 1896. 8⁰.
Solutions sociales par Godin. Paris 1871. 8⁰.
Le gouvernement par Godin. Paris 1883. 8⁰.
Mutualité sociale par Godin. Paris 1880. 8⁰.
Les sky scratchers par Aug. Fabre. Nimes 1896. 8⁰.
La concurrence asiatique par Aug. Fabre. Nimes 1896. 8⁰.
Le féminisme par Aug. Fabre. Nimes 1897. 8⁰.

Antonio de Gordon y de Acosta in Habaña:

La legislación sanitaria escolar. 1900. 8⁰.
El Azucar como alimento del hombre. 1899. 8⁰.

Bauinspektor Gugenhan in Stuttgart:

Beitrag zur Bestimmung der früheren Ausdehnung der Flussthäler der schwäbischen Alb. 1900. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Kunstformen der Natur. Lief. 5. Leipzig 1900. fol.

Hermann Hahn in Grunewald:

Die Grabsteine des Klosters Werschweiler. Berlin 1900. 8⁰.

Otto Herman in Budapest:

Die Forschungsreisen des Grafen Eugen Zichy in Asien, „dritte Reise". Bd. I recensiert. Nebst Nachtrag. 1900. 8⁰.

Friedrich Hirth in München:

Sinologische Beiträge zur Geschichte der Türkvölker. I. Die Ahnentafel Attila's nach Johannes v. Thuróczy. St. Petersburg 1900. 4⁰.

Georg W. A. Kahlbaum in Basel:

Friedrich Wöhler. Ein Jugendbildnis in Briefen an Herm. v. Meyer. Leipzig 1900. 8⁰.

O. Kars in Berlin:

Der einstige zweite Mond der Erde. Berlin 1900. 8⁰.

Verlag von Knorr & Hirth in München:

Rückblicke und Erinnerungen anlässlich ihres 25jährigen Jubiläums. 1900. 4⁰.

Ed. König in Bonn:

Stilistik, Rhetorik, Poetik in Bezug auf die biblische Litteratur. Leipzig 1900. 8⁰.

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. IX, Heft 4. Leipzig 1900. 8⁰.

Berthold Laufer in Nordamerika:

Preliminary Notes on Explorations among the Amoor Tribes. Sep.-Abdr. 1900. 8⁰.
Petroglyphs on the Amoor. Sep.-Abdr. 1900. 8⁰.

Abraham Levg in Hamburg:

Philosophie der Form. Berlin 1901. 8⁰.

Chr. Mehlis in Neustadt a. H.:

Die Ligurerfrage. II. Mitteilung. Braunschweig 1900. 4⁰.

Lady Meux in London:

The Miracles of the blessed Virgin Mary and the Life of Hannâ (Saint Anne) ethiopic texts publ. by E. A. Wallis Budge. 1900. 4⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 74, No. 1, 2; Tom. 75, No. 1. Paris 1900. 8⁰.

Richard v. Muth in St. Pölten:

Die Abstammung der Baiuwaren. 1900. 8⁰.

Karl Neureuther in München:

Das erste Jahrhundert des topographischen Bureaus des k. bayer. Generalstabes. 1900. 8°.

Karl Pamperl in Ruckerlberg bei Graz:

Universalgeld auf Grundlage des metrischen Gewichtes und des Monometallismus. Graz 1900. 8°.

Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 5. Jahrg., Heft 2. 1900. 4°.

Lucian Scherman in München:

Oriental Bibliography. Vol. XIII (for 1899), Second Half. Berlin 1900. 8°.

Seitz & Schauer in München:

Deutsche Praxis. 1900. No. 12—23. 8°.

Emil Selenka in München:

Menschenaffen. Lief. 3. Wiesbaden 1900. 4°.

A. Thieullen in Paris:

Les pierres figures à retouches intentionelles à l'époque du creusement des vallées. 1900. 4°.

Josef Vincenti in Ivrea:

Prononciation et Phonographie. Turin 1900. 8°.

Adolf Vuković in Wien:

Erdbeben und Magnetnadel. 1899. 8°.

Albrecht Weber in Berlin:

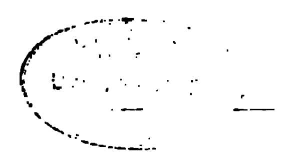
Vedische Beiträge, No. 8. 1900. gr. 8°.

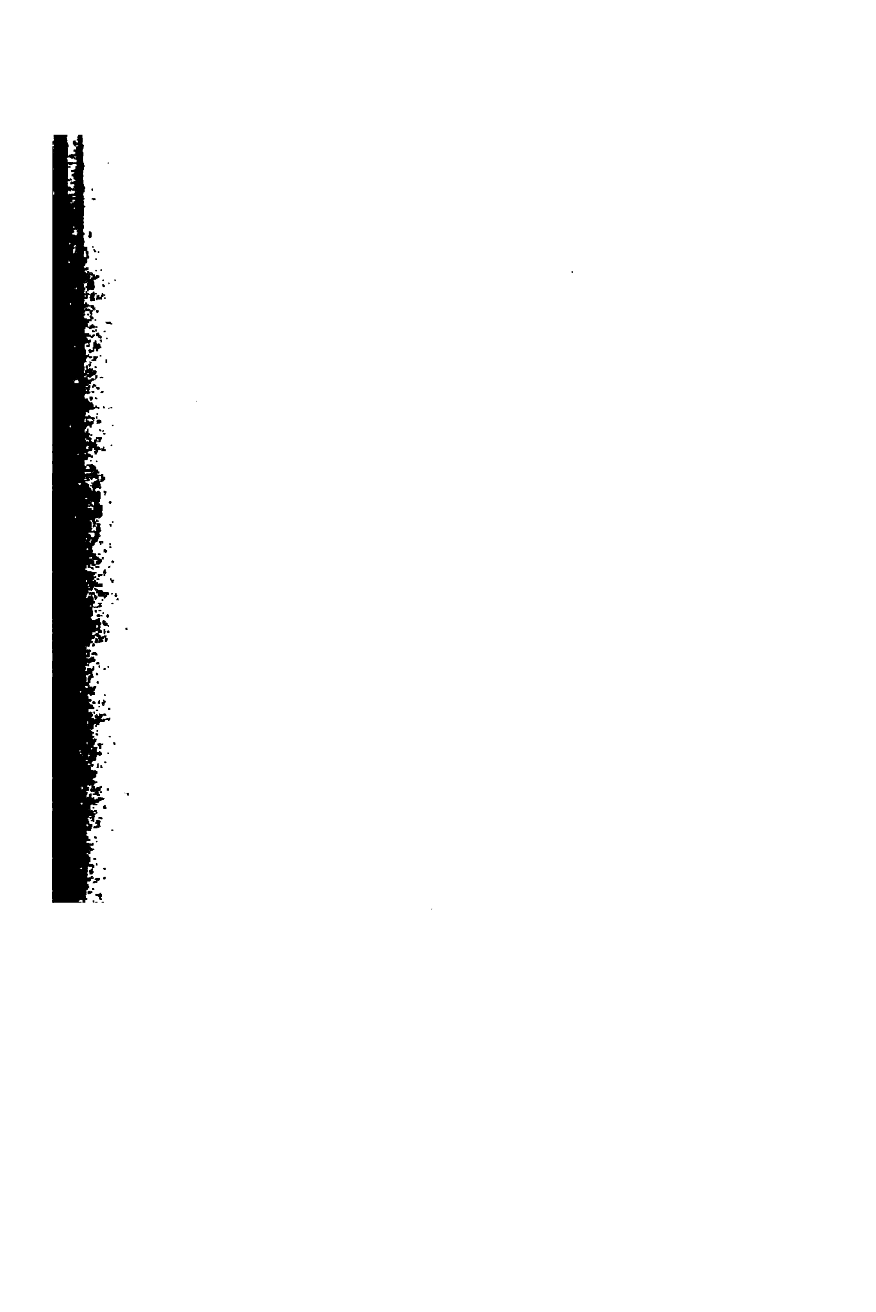
N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. 3, pars 3. Lipsiae 1900. 8°.

Eduard von Wölfflin in München:

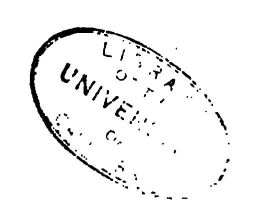
Archiv für lateinische Lexikographie. Bd. XI, 4; Bd. XII, 1. Leipzig 1900. 8°.

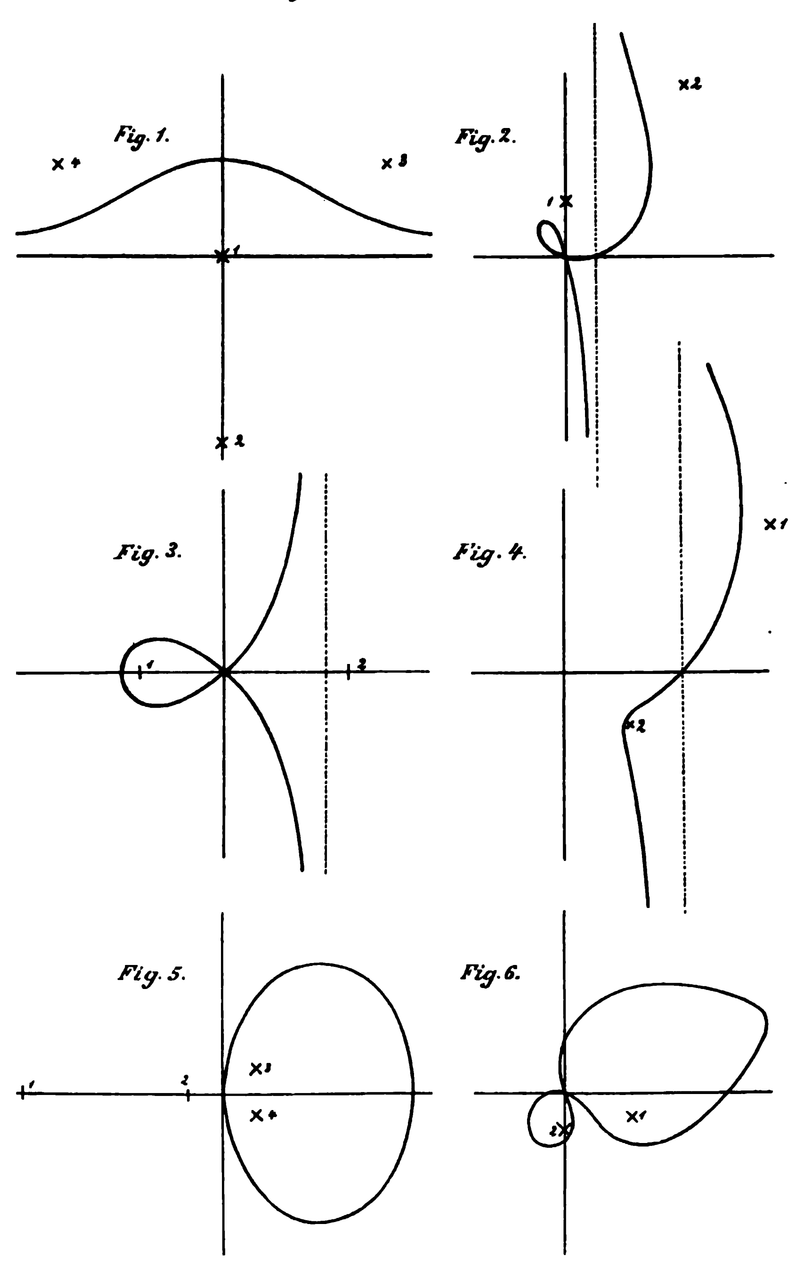




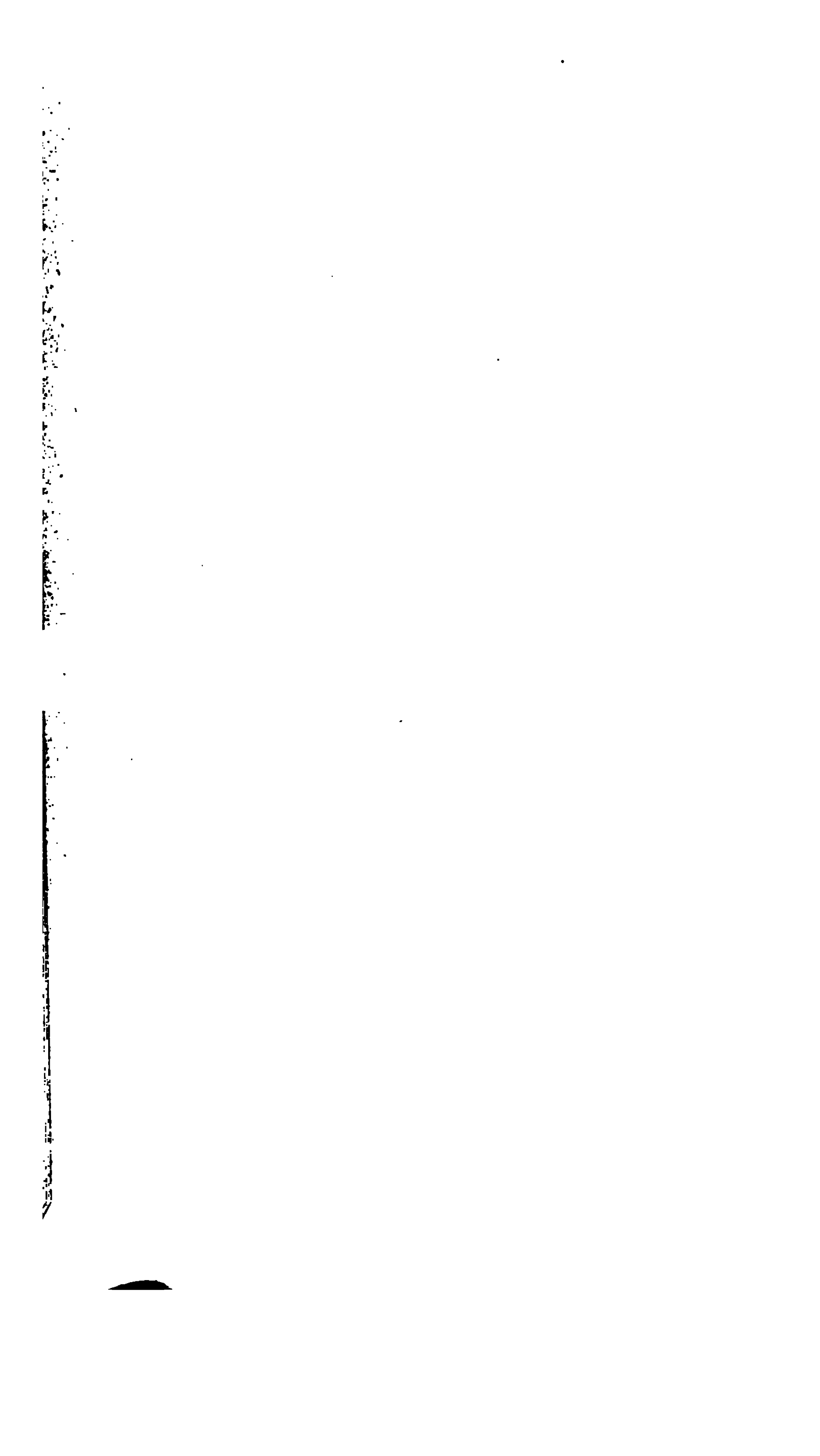
Photogrammetrische Rekonstruktion nach Ballonaufnahmen.

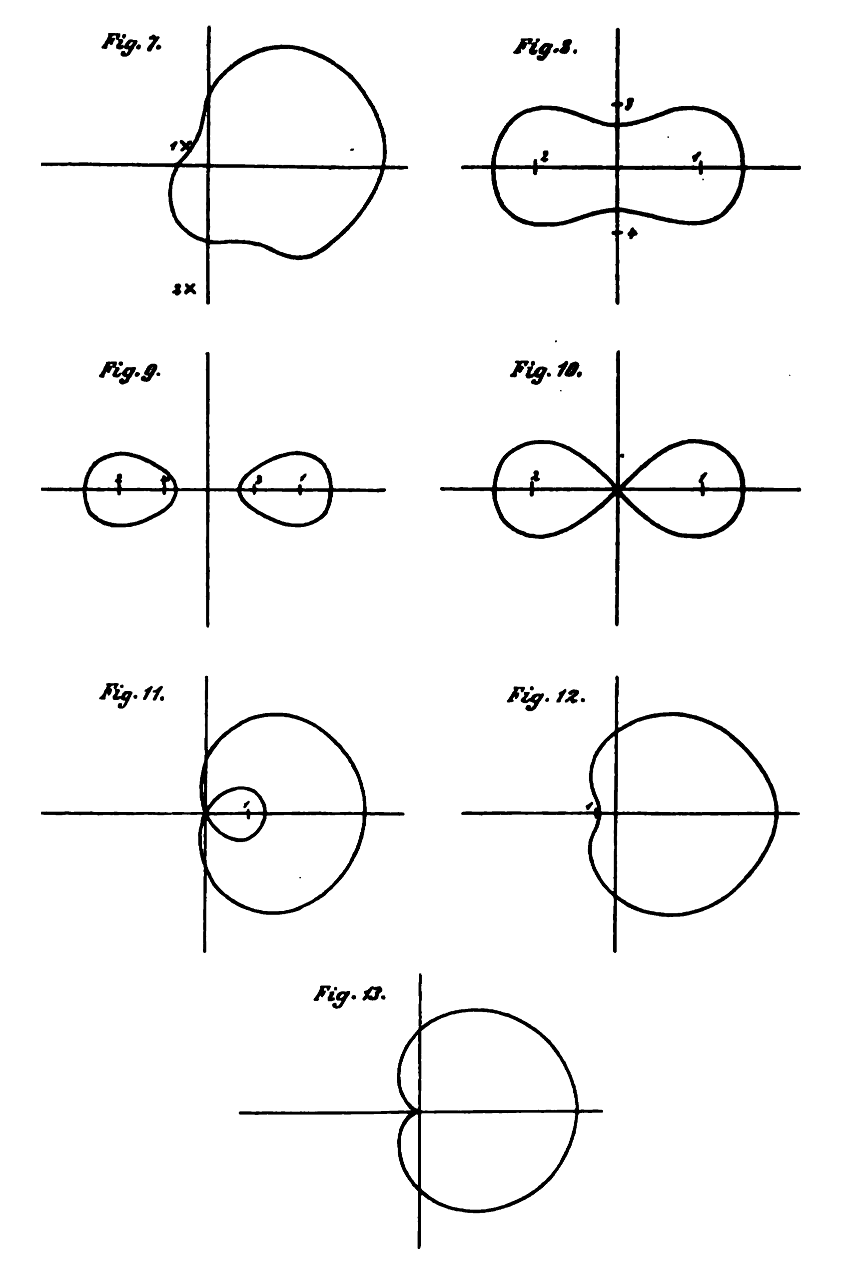
Lith. Hub. Köhler München





Lith. Hub. Köhler, München.

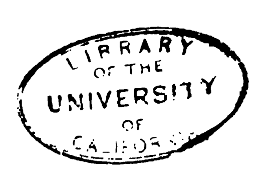




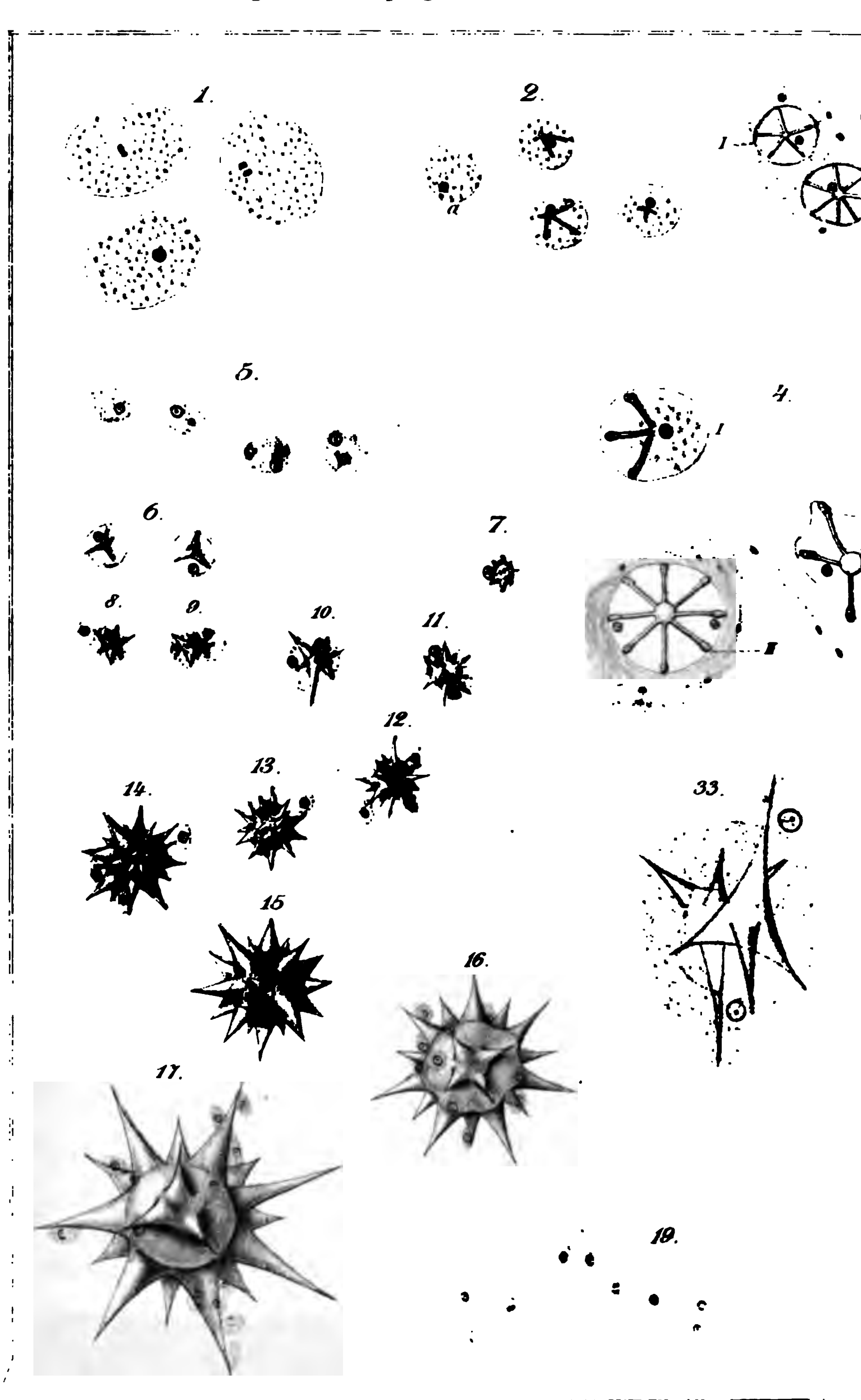
Lith. Hub. Köhler, München.



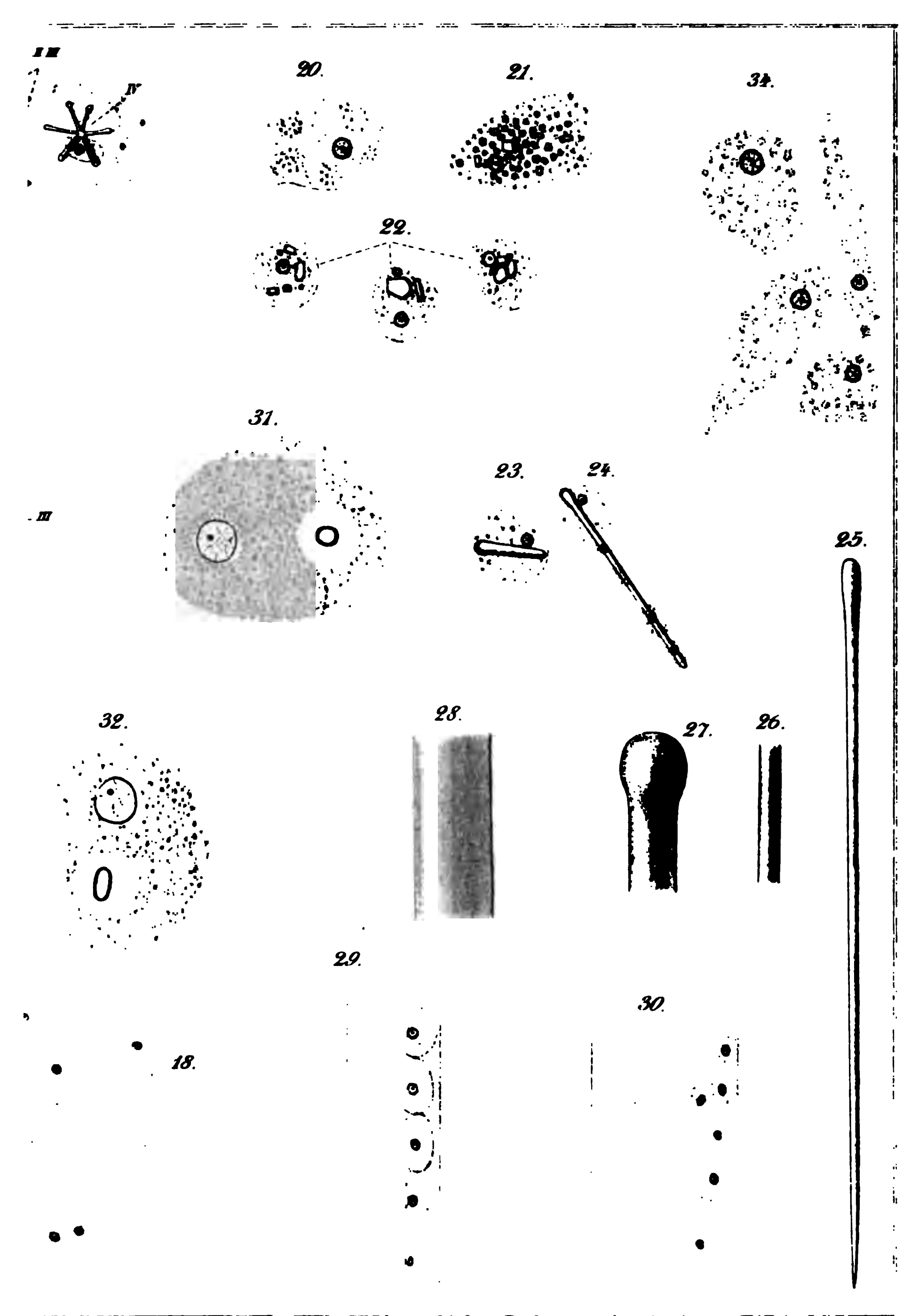


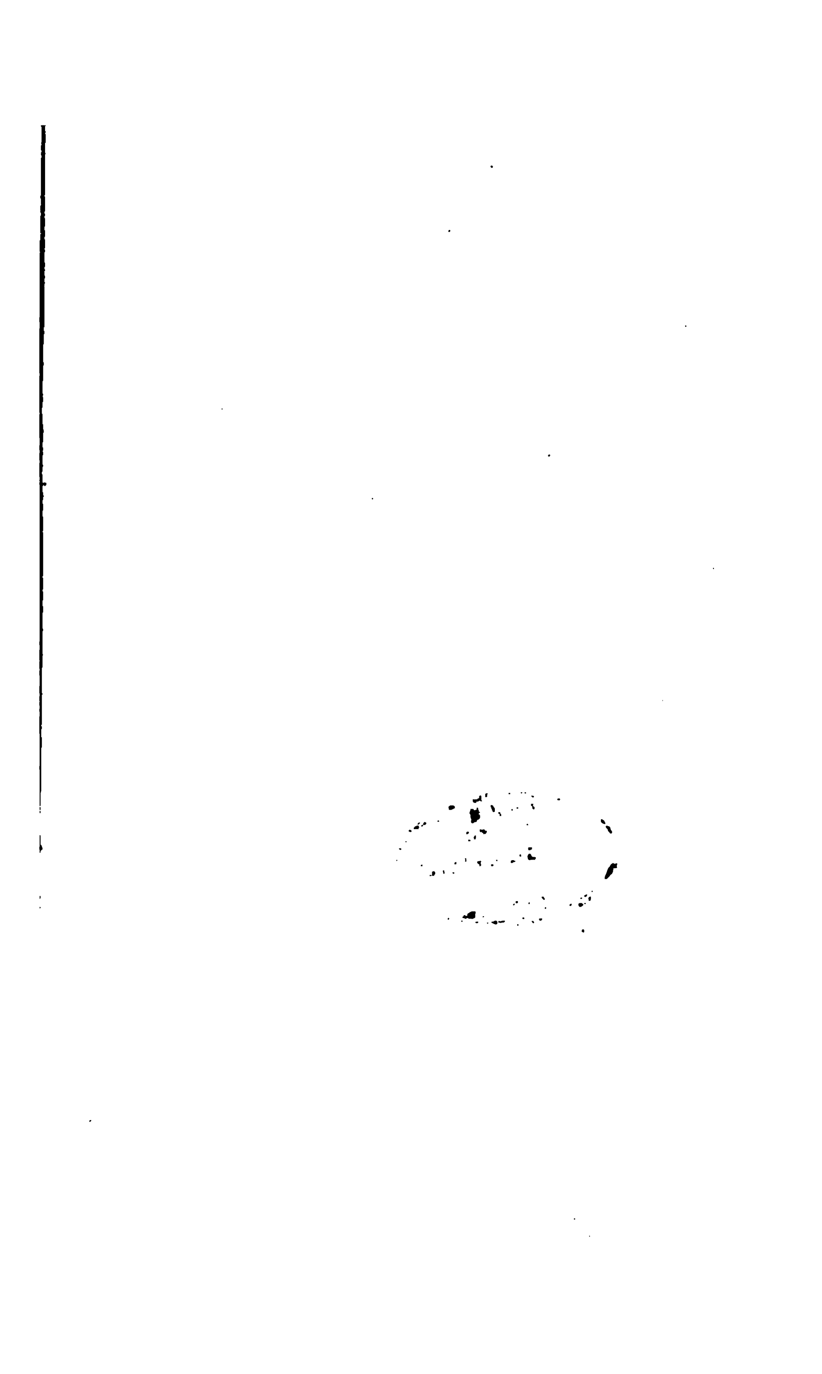




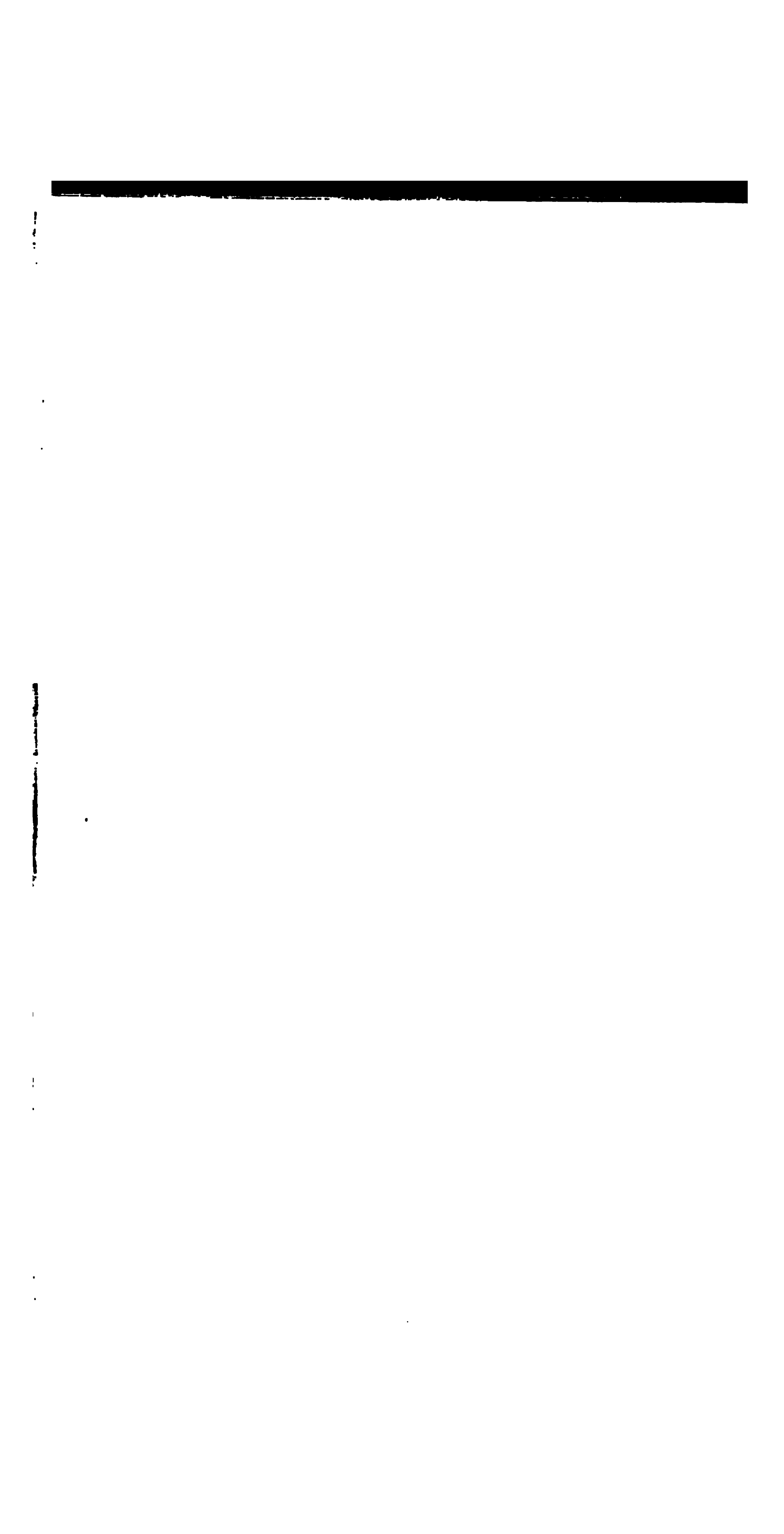

1.
2.
a
I
5.
4.
I
6.
7.
8.
9.
10.
11.
II
12.
13.
14.
33.
15
16.
17.
19.

Taf. V.












U.C. BERKELEY LIBRARIES
C036240631